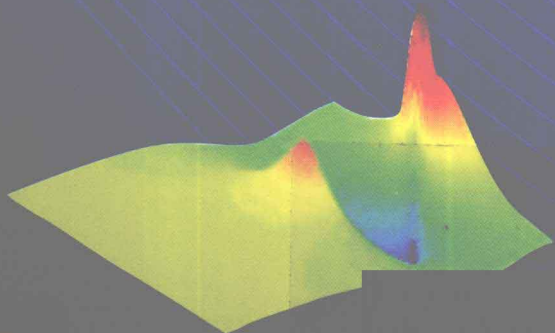


# 绝缘结构电场分析 有限元法与应用

郑殿春 著



科学出版社

# 绝缘结构电场分析 有限元法与应用

郑殿春 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书从高电压绝缘技术的角度,论述了绝缘配合方法及绝缘结构设计  
的意义、方法和原则;结合常见高压电气绝缘配合的关键技术,详细论述了  
典型电气设备电场分析模型的构建方法、有限元法计算程序实现方略以及  
大型代数方程组求解技巧;并针对超高压和特高压绝缘的热点,结合实例给  
出高压直流电缆联接盒耦合场分析方法,同时依据气体介质放电研究的最新  
成果,建立了不同种类电压下空气、 $N_2$ 、 $SF_6$  以及混合气体间隙放电模型  
和空间电荷场解析方法,为极端条件下气体放电机理的探索提供有效的分  
析工具。

本书可作为高等院校电气工程类相关专业的研究生和本科生教材,也  
可供从事高电压电介质放电现象研究的科技人员与高压电气绝缘配合及结  
构设计的工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

绝缘结构电场分析有限元法与应用/郑殿春著. —北京:科学出版社,  
2012. 4

ISBN 978-7-03-033958-4

I. ①绝… II. ①郑… III. ①高压绝缘-绝缘结构-电场-有限元分析  
IV. ①TM835. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 059012 号

责任编辑:余 江 / 责任校对:包志虹

责任印制:张克忠 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京天时彩色印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销



\*

2012 年 4 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2012 年 4 月第一次印刷 印张:14 1/2

字数:292 000

定价:65.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

高压电气绝缘配合和设计的任务,是在允许的外施电场作用下,经过实验仿真、强度校核及优化设计获得满足预期寿命的结构。而新型电介质的发现、绝缘结构设计新方法的探索,以及高电压技术应用领域的拓展,其关键的理论方法和实验技术是建立在研究不同类型电场下电介质放电的微观机制和理化过程基础之上,所以绝缘结构的电场数值分析方法已经成为科技工作者和电气工程师必备的知识与技能,并且也成为高等院校相关专业的必修课程。

本书从高压绝缘技术的角度,论述了绝缘配合方法及绝缘结构设计意义、方法、原则和目的;并以函数空间为出发点,系统论述了泛函、变分原理以及算子方程的近似解法,由此引出电场微分方程边值问题的有限元法原理;结合线性方程组的求解方法和高级语言,详细阐述了电场微分方程边值问题的有限元法数值分析程序设计方法和技巧,分别编制了相应的计算机数值计算 BASIC 和 C 语言程序;结合多年的教学和科研实践,针对高压电气设备绝缘配合和结构设计的关键问题,论证并给出常见高压电气绝缘结构电场有限元分析模型的构建方法,以及典型结构数值计算和分析的完整过程;同时针对高压直流下绝缘结构与配合问题进行了分析和探索,结合高压直流电缆联接盒耦合场分析给出应用实例;尤其重要的是,建立了短气隙空间电荷场的物理和数学模型,实现了其放电过程碰撞电离、复合、附着、扩散及光致电离等动力学行为的定量分析;另外,建立了不同脉冲电压下电极覆盖空气间隙放电模型及空间电场分析方法,为极端条件下气体放电机理的研究提供理论方法和分析工具。

本书从思想、内容、结构及写作上尽量注重知识的系统性、学术的前瞻性、思维的缜密性、方法的完备性和技术的先进性。但由于作者的水平有限,书中的疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正。

本书的出版获得国家自然科学基金项目(No. 51077032)、黑龙江省教育厅科学技术研究项目(No. 12511z008)、电介质工程国家重点实验室培育基地项目及哈尔滨理工大学高电压与绝缘技术国家重点学科建设基金的资助。

在本书即将出版之际,衷心地感谢我的师长和挚友,他们的关心和支持使我在困境中获得激励并坚持不懈地追求自己认定的科研方向,始终不渝地努力工作。同时要感谢我的研究生,他(她)们在不同时期参与了我的研究工作,在共同相处的美好时光里结下了深厚的师生友谊,祝他(她)们生活阳光,愿友谊长存。

作 者

2011年12月于哈尔滨

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 绝缘结构的概念和绝缘结构设计意义 .....	1
1.2 绝缘结构设计的基本要求 .....	2
1.3 电介质击穿过程 .....	2
1.4 高电压技术应用领域的拓展 .....	3
1.5 电场数值分析方法 .....	3
1.6 本书的目的 .....	5
<b>第 2 章 函数空间与算子方程</b> .....	6
2.1 距离空间 .....	6
2.2 Banach 空间 .....	8
2.3 Hilbert 空间 .....	9
2.4 泛函与变分.....	14
2.4.1 算子概念.....	14
2.4.2 变分问题.....	16
2.4.3 算子方程的近似解 .....	20
2.5 压缩映像原理.....	23
<b>第 3 章 偏微分方程及定解条件</b> .....	25
3.1 引言.....	25
3.2 偏微分方程的一些定义.....	26
3.3 线性偏微分方程的分类.....	26
3.4 数理方程的建立.....	27
3.4.1 波动方程.....	27
3.4.2 Poisson 方程与 Laplace 方程.....	28
3.4.3 电磁场方程 .....	29
3.4.4 电磁场标量位与矢量位 .....	30
3.5 定解条件.....	31
3.5.1 初始条件.....	32
3.5.2 边界条件.....	32
3.6 变分与泛函极值.....	34
3.7 Ritz 法.....	36

3.8	Галёркин 法 .....	37
3.9	有限差分法 .....	38
<b>第 4 章</b>	<b>变分与多元函数极值 .....</b>	<b>39</b>
4.1	引言 .....	39
4.2	有限单元法的变分原理 .....	39
4.3	分片插值与基函数 .....	40
4.4	确定泛函的方法 .....	42
4.4.1	数学变换 .....	42
4.4.2	经典法 .....	44
4.5	多元二次函数极值 .....	46
4.5.1	多元二次函数的形式 .....	46
4.5.2	多元二次函数极值与方程组的解 .....	47
<b>第 5 章</b>	<b>电场变分原理 .....</b>	<b>48</b>
5.1	静电场及其边值问题 .....	48
5.1.1	静电场基本方程 .....	48
5.1.2	静电场边值问题 .....	49
5.1.3	静电场的变分原理 .....	50
5.2	有限元法的一个简例 .....	56
<b>第 6 章</b>	<b>二维电场有限元法 .....</b>	<b>64</b>
6.1	平面场有限元法 .....	64
6.1.1	单元剖分 .....	64
6.1.2	构造插值函数 .....	65
6.1.3	单元分析 .....	68
6.1.4	总体合成 .....	69
6.1.5	强加边界条件处理 .....	71
6.2	轴对称场有限元法 .....	76
6.3	二维等参元有限元法 .....	77
6.3.1	等参元的基本概念 .....	77
6.3.2	四边形四节点等参元 .....	78
6.3.3	四边形八节点等参元 .....	80
6.3.4	计算格式的形成 .....	82
6.3.5	$[K]_e$ 和 $[P]_e$ 的计算步骤 .....	85
6.4	总体刚度矩阵的性质 .....	85
6.4.1	剖分网格中节点数与单元数的比例关系 .....	85
6.4.2	总体刚度矩阵的稀疏性 .....	86
6.5	场强的计算和等位线绘制 .....	88

6.5.1	电场强度计算 .....	88
6.5.2	等位线绘制 .....	89
<b>第7章</b>	<b>电场有限元法计算程序设计 .....</b>	<b>91</b>
7.1	线性代数方程组的存储方法 .....	91
7.1.1	变带宽存储法 .....	91
7.1.2	索引存储法 .....	92
7.2	直接法 .....	93
7.3	迭代法 .....	97
7.4	有限元法计算程序设计 .....	98
7.5	方程组的求解 .....	104
7.6	数据准备和输入 .....	105
7.7	主程序和计算示例 .....	106
7.7.1	主程序 .....	106
7.7.2	计算示例 .....	108
7.8	自动剖分 .....	110
7.8.1	直线内插法 .....	110
7.8.2	射线内插法 .....	112
7.8.3	任意四边形区域剖分法 .....	113
<b>第8章</b>	<b>电力变压器绝缘结构与电场 .....</b>	<b>115</b>
8.1	干式变压器绝缘结构及电场 .....	115
8.2	干式变压器端部绝缘电场物理模型 .....	115
8.3	干式变压器端部电场数学模型 .....	116
8.4	端部电场分析 .....	117
8.4.1	情况1 .....	117
8.4.2	情况2 .....	119
8.5	电力变压器端部结构与电场 .....	120
8.5.1	电力变压器端部电场模型 .....	121
8.5.2	模型建立 .....	122
8.5.3	端部电场分布 .....	123
<b>第9章</b>	<b>电缆附件结构与电场分析 .....</b>	<b>125</b>
9.1	电力电缆终端接头盒结构 .....	125
9.2	电缆终端接头盒电场模型 .....	125
9.3	35kV 电力电缆终端接头盒电场 .....	126
9.4	高压直流电缆连接盒及耦合场 .....	131
9.4.1	直流电压下的电介质特性 .....	131
9.4.2	耦合场 .....	133

9.4.3	求解模型及边界条件	133
9.5	耦合场分析	135
9.5.1	空载特性	135
9.5.2	最大负载下电流场分布	136
9.5.3	最大负载下的电场分布	136
<b>第 10 章</b>	<b>110kV 真空断路器结构与电场</b>	<b>141</b>
10.1	真空灭弧室结构与电场模型	141
10.2	计算模型和边界条件	142
10.3	灭弧室的电场分布	142
10.3.1	主屏蔽的影响	145
10.3.2	端部屏蔽罩的影响	147
10.3.3	触头影响	147
<b>第 11 章</b>	<b>短气隙空间电荷场及放电特性</b>	<b>149</b>
11.1	气体放电流体模型	149
11.1.1	非电负性气体流体模型	149
11.1.2	电负性气体流体模型	150
11.1.3	初始条件与求解域	150
11.2	$N_2/SF_6$ 及其混合气体放电特性	151
11.2.1	$N_2$ 间隙粒子运动过程	151
11.2.2	$SF_6$ 放电特性	156
11.2.3	混合气体 $N_2/SF_6$ 放电特性	159
11.3	不同初始种子电子对放电过程的影响	163
11.3.1	$N_2$ 放电特性	164
11.3.2	$SF_6$ 放电特性	167
11.3.3	50%-50% $N_2/SF_6$ 放电特性	170
<b>第 12 章</b>	<b>电极覆盖短气隙放电及电场</b>	<b>174</b>
12.1	电极覆盖短气隙放电模型	174
12.2	数学表述与分析方法	175
12.3	高频正弦电压下的短空气隙放电特性	176
12.3.1	电荷输运与放电电流脉冲的关系	178
12.3.2	大气压短气隙放电的影响因素	180
12.4	非电负性气体放电过程表述	186
12.5	$N_2$ 短间隙放电特性	187
12.5.1	间隙放电电流演化过程	187
12.5.2	间隙放电电流时频特征	191
12.5.3	气隙空间带电粒子动力学行为	192



12.5.4 短间隙长期放电特征 .....	193
12.6 雷电脉冲下的电极覆盖短空气隙放电 .....	194
12.6.1 气体间隙尺度的影响 .....	196
12.6.2 阻挡介质特性与尺度的影响 .....	199
<b>附录 1 二维电场有限元法 C 语言程序列表 .....</b>	<b>202</b>
<b>附录 2 不同初始种子电子对放电过程的影响 .....</b>	<b>208</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>221</b>

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 绝缘结构的概念和绝缘结构设计意义

电气设备或产品一般包括导体、磁路、绝缘和机械结构部分,绝缘部分属于最薄弱的环节。国际大电网会议(CIGRE)23.10 工作组的调查报告统计表明,在 1985 年以前投入运行的高压电器产生的故障中,绝缘故障占 60%;在 1985 年以后投入运行的高压电器产生的故障中,绝缘故障占 51%。由这些统计数字可知,高压电气绝缘故障是主要的故障类型,而且,系统电压等级越高,发生绝缘故障的概率越大,这是由于系统工作电压等级的提高、电力设备容量的增大,绝缘介质承受的工作场强相应增大所导致的。

绝缘的作用是将不同电位的导体分开,从而能保持不同的电位。因此,绝缘是电气设备结构中的重要组成部分,具有绝缘功能的材料为电介质(绝缘材料),这些电介质材料构成电气设备的绝缘结构。

随着用电量的上升、输电距离的增长,电力系统的最高电压等级必将进一步提高,解决电气设备的绝缘也变得更加复杂。当作用电压超过临界值时,绝缘被破坏而失去绝缘作用。工作电压越高,绝缘的费用在设备成本中所占比例越大,设备的体积及质量也越大。如果不采用新技术,甚至有时无法构成设备绝缘。绝缘又常是电气设备中的薄弱环节,是运行中诸多设备故障的产生因素。研究绝缘、改善绝缘,不仅是经济问题,更是安全问题。因此,努力采用先进技术,既经济合理又安全可靠地解决各种高压电气设备的绝缘问题就显得十分重要。

正常运行时,电气设备长期处于工作电压作用之下;电力系统中的电压有时会出现短时不利于绝缘的电压升高现象,即两类过电压,一类是雷电过电压,另一类是操作过电压。虽然过电压的作用时间很短,但幅值比工作电压高得多,可能造成绝缘破坏。因此,设备绝缘除应能耐受正常工作电压的长期作用外,还必须能耐受过电压的作用。为确保电气设备安全可靠运行,一方面应分析过电压的幅值、波形等参数,采取有效措施降低或限制作用于设备的过电压;另一方面应设法保证及提高绝缘结构的耐受电压。这两方面构成高电压技术的主要内容。

为设计出技术先进、经济合理而安全可靠的绝缘结构,首先必须掌握电介质在不同种类电场作用下的电气性能,尤其强电场的击穿特性及其规律,并依据这些规律进行绝缘结构的设计,包括如何选择结构型式,以及确定绝缘尺寸等。其次,绝缘的破坏取决于在外施电压下分配在该处的电场强度。因此,在满足电气设备基本要求的前提下,应设法改善绝缘结构,使电场尽可能分布均匀。此外,还可以引

用新型绝缘材料,以及改进制造工艺等以提高绝缘的介电强度。

绝缘结构设计和绝缘材料的选用不可分割,任何优质材料都有其特点,某一种材料不可能在任何绝缘结构中都适用。只有充分利用它们的优点,规避或限制它们的缺点,综合平衡考虑,使材料的应用获得最佳的效果,这样才可能达到绝缘结构的性能要求,使制造和运行更加经济合理。

从事绝缘结构设计的技术人员必须熟悉绝缘结构设计的原理、电场的计算和调整、绝缘材料性能、绝缘结构制造工艺以及产品的绝缘试验等方面知识。此外,制造人员必须对产品使用有一定的了解,使用人员也必须对产品制造有一定的了解,这样双方才能为共同提高电气设备的制造质量和运行质量发挥作用。

## 1.2 绝缘结构设计的基本要求

绝缘结构设计的目的和任务是根据产品技术条件或使用要求确定结构的形式,选用合适的绝缘材料和工艺,从而使产品达到在技术上先进和经济上的合理。

绝缘结构设计必须考虑设备或产品在运行中受到电、热、机械、环境等作用因素的影响。高压绝缘结构通常首先考虑电压的作用,而低压绝缘结构则通常首先考虑热的作用。当然,在实际的应用中所有因素都应予以考虑,过分强调某一因素而忽略其他因素可能导致设计错误。因此,人们在绝缘结构中常采用复合材料,如电力电容器、电缆和变压器采用油纸绝缘,高压电机绝缘采用云母带,低压电机槽绝缘采用聚酯薄膜纤维纸复合材料等。绝缘采用复合材料,可以使各组分互相取长补短以发挥绝缘的最大效果,这也是绝缘结构设计的任务。绝缘结构设计要求产品性能可靠并具有一定的寿命。可靠性和寿命是既有联系,又有区别。

## 1.3 电介质击穿过程

由电介质物理理论可知,电场作用下的击穿是由局部放电触发并伴随物理化学等现象的联合老化作用,击穿是其最终的表现形式。产生局部放电的主要原因是电介质不均匀时,绝缘系统的电场分布不均匀,某些局部区域的电场强度达到或超过介质的耐电场强。高电压电气设备的绝缘结构比较复杂,使用的绝缘介质多种多样,容易导致整个绝缘系统电场分布不均匀。由于设计或制造工艺不完善,使不同绝缘介质分界面含有气隙,或是在长期运行过程中绝缘受潮,在电场作用下水发生分解产生气体而形成气泡。因为气体的介电常数比固体绝缘介质的介电常数小,而其承受的电场强度与介电常数成反比,即远大于固体绝缘介质承受的场强,故气泡很容易放电。另外,固体绝缘介质内部存在缺陷或混有杂质,或者在绝缘结构中存在某些不良的电气连接,这均会导致局部电场集中,在电场集中的区域易发生固体绝缘介质表面放电和悬浮电位放电。

局部放电加剧介质绝缘性能劣化,破坏机理有以下几个方面:①高能粒子(电子、离子等)冲击绝缘,使分子链断裂,丧失本征绝缘特性;②高能粒子的撞击作用使介质局部温度升高,易引起介质过热,介质表面长时间碳化而加剧这种现象;③局部放电产生的臭氧( $O_3$ )及氮的氧化物( $NO, NO_2$ )会侵蚀介质,遇到水分子则产生硝酸,加剧对介质的破坏侵蚀作用;④在局部放电过程中,机制绝缘油因电解及电极的肖特基辐射效应使油分解,加上油中原来存在杂质,故易使纸层处凝结因聚合作用生成的油泥(多在匝绝缘或其他绝缘的油楔处),油泥使绝缘的介质损耗角  $\tan\delta$  激增,散热能力降低,甚至导致热击穿。局部放电的持续发展会使绝缘的劣化损伤逐步扩大,最终使绝缘正常寿命缩短,短时绝缘强度降低,可能使整个介质丧失绝缘性能甚至击穿。

#### 1.4 高电压技术应用领域的拓展

科学发展和技术进步使得高电压技术的应用领域不断拓展。高电压放电现象正在被广泛应用并取得重大成果,如高能粒子加速器、磁流体发电、受控热核反应、薄膜沉积、微电子刻蚀、环境治理、新型光源、新型推进器、飞行器隐身及高功率脉冲等。

例如,介质阻挡放电是一种非平衡态气体放电,由于它可以在大气压条件下获得化学反应所需的活性粒子,具有特殊的光、热、声、电等物理过程和化学过程,因此在材料表面处理、纳米技术、薄膜沉积、环境保护、飞行器减阻和隐身等领域有着广阔的应用前景。

纳秒亚纳秒开关是高功率超宽谱脉冲源的关键部件,其中的电介质是气体或液体。此类开关以其响应快、损耗小、传导电流大、抖动低、绝缘恢复迅速等优越特性在高功率脉冲装置中具有相当重要的作用。但是高场强极端窄脉冲条件下,如何优化开关结构,提高使用寿命,提高其可靠性仍然是亟待解决的技术难题。

空气净化是利用气体放电产生的高能电子使烟气中的  $O_2, N_2$  和  $H_2O$  等分子被激活、电离甚至裂解,产生大量活性粒子,它们的强氧化性使  $SO_2$  和  $NO_x$  被氧化并最终形成  $H_2SO_4$  和  $HNO_3$ ,在外加添加剂的情况下,使  $H_2SO_4$  和  $HNO_3$  生成不同形态的物质,从气相脱除而达到脱硫脱硝的目的。为了提高净化效果,研究人员由原始的电子束法产生高能电子,利用直流高压法产生高能电子,进而用脉冲电源产生脉冲放电等离子体提供高能电子并取得了较好的效果。由此可知,如何产生高能电子是影响气体净化程度的关键点,而电极布置及其电场分布是其决定因素。

#### 1.5 电场数值分析方法

电介质发生局部放电乃至击穿的根本原因是电场畸变,电气绝缘结构的复杂

性使得电场的分析用解析法有一定的困难,而电场数值解析随着计算机技术和计算方法的发展而进步,并且成为高电压电器绝缘配合电场分析的有力工具。电场计算的基本任务就是寻求给定边值问题的解。边值问题的求解方法经历了一百多年的发展而日益完善。下面对此加以扼要说明。

### 1. 解析法

(1) 直接积分法。这种方法只有当场域和边界条件具有某种特殊的对称性,并且置于适当的坐标系下电位仅是一个坐标的函数时才能应用。例如,同心圆柱电容器电场、同心球面电极间都可利用直接积分法获得其解。

(2) 分离变量法。分离变量法是求解 Laplace 方程的经典方法。它将电位函数假定为几个单变量函数的乘积,从而将偏微分方程分离成几个常微分方程,一般得到的通解往往是一个包含许多特定函数的无穷级数。但是,从中确定满足给定边界条件的特解并不容易,要凭一定的经验和技巧,对于介质或场域边界形状或边界条件稍复杂的电场,求解相当困难。

(3) 保角变换法。它是借助复变函数中的解析函数和保角变换求解电场的方法。由于复变函数定义在复平面上,故这种方法仅适用于两维场。对于分层介质,电位函数在分界面处导数不连续,故也不能应用保角变换法。另外,保角变换法对场域的边界形状限制过大。鉴于上述原因,实际上能用保角变换法求解的电场所占的比例很小。此外,还有以“位场唯一性定理”为依据的电轴法和镜像法。

### 2. 数值法

对一些复杂的电场问题,利用上述解析法求解很困难,甚至根本不可能,此时必须借助数值方法。数值方法都是将边值问题转化成线性代数方程组的求解问题,而形成和求解线性代数方程组所涉及的运算量大,手工难以完成,必须借助计算机。因此,数值方法在 20 世纪 60 年代随计算机的推广使用才进入实用阶段。虽然数值方法得到的只是近似解,但是现阶段计算机的发展水平已能充分保证数值解的精度。目前,电场数值计算的主要方法有:

(1) 场域元法。场域元法是指整个场域都需要进行剖分的一种数值计算法,包括有限差分法、基于变分原理的有限元法、伽辽金有限元法及能将微分方程进行离散的其他各种方法。其中,基于变分原理的有限元法最为典型,它是求解偏微分方程的一种重要而且实用的数值方法。它将变分问题适当地进行离散化,进而求出全域上的数值解。

(2) 边界元法和等效源法。边界元法是一种将边界积分方程离散成代数方程组的方法,其剖分对象为场域边界和不同介质的分界面。边界元法中的场源为等效源,它可以位于场域边界及不同介质的分界面上,也可以位于无效区域内。根据等效源不同的位置,分别称为边界元法(表面电荷法)和等效源法(模拟电荷法)。

边界元法和等效源法中的匹配点都位于边界或分界面上。

有限元法、表面电荷法和模拟电荷法是目前最实用的数值方法。每一种方法都有各自的特点和适用范围。一般说来,有限元法的通用性最强,适用于线性场、非线性场和 Poisson 方程所描述的各类电场问题。与其他方法相比,有限元法对分层介质、边界复杂的电场尤为适用。

(3) 组合法。用场域元法计算电场时,即近似满足泛定方程又近似满足边界条件;用边界元法和等效源法计算电场时,虽然也近似满足边界条件,但是完全满足电场的基本方程。由于这两种方法各具特点,在实际电场的计算中,使用单一的数值计算方法时又可能满足不了所需的计算精度,或有可能对计算机的内存量需求太大,还有可能定解条件不易确定等。如果将两种甚至三种方法组合起来,则有可能解决更多的电场问题。因此,在分域法基础上的电场数值计算组合法随之产生。

电场数值解析的目的,一是预先通过对具体绝缘结构、复合电介质配合中的电场分布进行理论分析,预知其设计的合理性;二是对绝缘结构中可能出现的电场畸变程度进行模拟,根据电介质的耐电强度,预测局部放电发生的位置和可能发生局部放电的区域。

## 1.6 本书的目的

电场数值仿真技术是科学研究、高电压技术及其应用领域最重要的工具之一,目前众多的电场数值分析商业软件可以为科技工作者和技术人员提供便利的分析方法与手段。但是,电场数值分析方法的复杂性及待求场域的多样性使商业软件的诸多用户在使用时遇到不少困难,进而为解决特殊问题还必须研究新的分析方法,有时遇到某些具体的问题时不知如何解决,甚至对某些问题的数值计算结果不知所以然。所以,作者依据多年的教学实践经验、科研成果积累及亲身体会而著成此书,供相关领域的科技工作者和同行参考。

## 第 2 章 函数空间与算子方程

泛函分析是一种广义的函数分析。它以各种具体学科为背景,把现实世界中的研究对象看成抽象的元素及元素的集合,而把对象之间的数量关系(函数关系)抽象成为元素之间或集合之间的映像。具有一定性质的元素的集合称为空间。泛函分析是专门研究无穷维空间中元素、集合、映像等普遍规律的学科。它把表面上彼此互不相关的学科统一在它的普遍规律之下,因此它具有广泛的应用。

无穷维空间是描述具无穷多自由度的物理系统的数学工具,因此泛函分析已成为定量研究力学、光学、电磁场理论等一类具无穷多自由度的物理系统的有效工具。随着科学发展和技术的进步,泛函分析已不再仅仅是数学工作者感兴趣的学科,它越来越引起了广大专业科技人员的兴趣和重视。

与有限单元法密切相关的变分问题留在 Hilbert 空间中讨论,因此作为有限单元法的数学基础,了解泛函分析中一些有关的基本概念和初步知识有助于进一步学习掌握电场有限元数值分析方法。

### 2.1 距离空间

设  $R$  表示一集合(如某类函数的集合),对其中任意两元素  $x$  和  $y$ ,都按照一定的法则与一个实数  $\rho(x, y)$  相对应,如果  $\rho(x, y)$  满足以下三个公理:

- (1)  $\rho(x, y) \geq 0$ , 当且仅当  $x = y$  时等号成立(非负性);
- (2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (对称性);
- (3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (三角不等式);

(其中,  $x, y, z$  为  $R$  中任意三个元素)

则称集合  $R$  为距离空间,  $\rho(x, y)$  即为该空间中定义的距离,距离空间中的元素也称为“点”。

例如,  $n$  维实向量

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

的全体所构成的空间称为  $n$  维向量空间。其中定义距离如下:

设

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

为  $n$  维向量空间中任意两元素, 则

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

容易验证, 这样定义的距离  $\rho$  满足距离三公理, 因此  $n$  维向量空间是一个距离空间, 通常记为  $R^n$ 。

另外, 也可以在  $R^n$  中用另一种方式定义距离

$$\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$$

同样可以证明, 这样定义的距离也满足距离三公理。所以, 在同一个集合中引入距离的方式可以不限于一种。

又如, 定义在  $[0, 1]$  上所有连续函数的全体所组成的空间就是一个距离空间, 记为  $C[0, 1]$ 。其中对于任意  $x(t), y(t) \in C[0, 1]$ , 定义距离为

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

验证它满足距离三公理:

(1) 显然  $\rho(x, y) \geq 0$ , 且只有当  $x(t) = y(t)$  时有

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x(t)| = 0$$

即

$$\rho(x, y) = 0$$

(2) 因为

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - x(t)|$$

所以

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

(3) 对任意  $t \in [0, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &\leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - z(t)| \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

因为不等式对于  $t \in [0, 1]$  都成立, 所以有

$$\rho(x, z) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - z(t)| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

在距离空间中, 通常可以引入“收敛”的概念。距离空间中元素序列  $\{x_n\}$  收敛于点  $x$  是指当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\rho(x, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

则称  $x$  为点列  $\{x_n\}$  的极限, 记为



$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

距离空间中的点列  $\{x_n\}$  如果有极限, 则极限是唯一的。

事实上, 假设不然, 设  $\{x_n\}$  收敛于两个不同的极限  $x$  和  $y$ , 则对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\rho(x_n, x) < \epsilon, \quad \rho(x_n, y) < \epsilon$$

另一方面, 由三角不等式

$$\rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < 2\epsilon$$

及  $\epsilon$  的任意性, 可得

$$\rho(x, y) = 0$$

即只有  $x = y$ , 这与假设矛盾。

在距离空间中, 点列  $\{x_n\}$  称为基本点列或 Cauchy 点列, 是指对与任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $m, n > N$  时有

$$\rho(x_m, x_n) < \epsilon$$

显然, 如果某一点列  $\{x_n\}$  在空间  $X$  中收敛, 则它也是 Cauchy 点列。反之, Cauchy 点列则不一定在  $X$  中收敛。例如, Cauchy 点列, 即有理数序列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots \quad (2-1)$$

在有理数域中就没有极限。它的极限是无理数  $\sqrt{2}$ , 即有理数序列 (2-1) 在有理数域 (当然是距离空间) 中只是 Cauchy 序列, 而不是收敛序列, 而它是在扩充的无理数域中为收敛序列。

在距离空间  $X$  中, 如果任何一个 Cauchy 点列必收敛于  $X$  中的点, 则称距离空间  $X$  是完备的距离空间。

前面所举距离空间的两个例,  $R^n$  与  $C[0, 1]$  都是完备的距离空间。

显然, 有理数域是不完备的距离空间。

## 2.2 Banach 空间

如果对空间  $B$  中的任意两组元素  $x, y$  与实数  $\alpha, \beta$  恒有:

- (1)  $\alpha x + \beta y \in B$ ;
- (2)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;
- (3)  $1x = x$ ;
- (4)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;

则称  $B$  为线性空间。

如果在线性空间  $B$  中设一个元素  $x$ , 赋一数  $\|x\|$  (称为范数) 与之对应, 且满足范数公理:

- (1)  $\|x\| \geq 0$ , 当且仅当  $x$  为零元素时等号才成立;
- (2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  ( $\alpha$  为任意实数);