

高等数学

XUE XI LUN

GAO DENG SHU XUE

学习论

王有文 ■ 著

$$\int_a^b f(x,y,z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} ds$$
$$\int_a^b f(x,y) dx = F(b) - F(a) \quad \int u dv = uv - \int v du$$
$$\vec{r} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\}$$

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

高等数学学习论

王有文 著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习论 / 王有文著. -- 北京: 中央民族大学出版社, 2015.12

ISBN 978-7-5660-1142-8

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学—学习方法—研究 IV. ①013-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 308087 号

高等数学学习论

著 者 王有文

责任编辑 张林刚

装帧设计 宗彦辉

出 版 者 中央民族大学出版社

北京市海淀区中关村南大街 27 号

邮编: 100081

电话: 68472815 (发行部)

传真: 68933757 (发行部)

68932218 (总编室)

68932447 (办公室)

发 行 者 全国各地新华书店

印 刷 厂 三河市天润建兴印务有限公司

开 本 787×1092 (毫米) 1/16 印张: 12.875

字 数 200 千字

版 次 2016 年 2 月第 1 版 2016 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5660-1142-8

定 价 38.00 元

版权所有 翻印必究

山西工程技术学院资助出版

前 言

高等数学是一门基础性学科，是许多理工类学科的基础，在实践中也有着广泛而重要的应用。学习伊始，学习者给予这门课足够的重视，投入很大精力进行概念、定理、公式的理解与巩固性练习，希望学好它，结果却令很多人失望。究其原因，首当其冲的是高等数学更强的形式化给惯于形象思维的学习者造成了困难，此外学习者学习过程中存在的不足更应是主要方面。他们不知道在超越书本知识的基础上从哪些方面优化自己的学习，使得学习新知识时总是难于提要钩玄，不善于突破难点，很少灵活地进行纵向和横向联系，巩固知识时也不能形成稳定、可资有效利用的认知结构，运用知识解决问题时常觉缺少知识和方法，特别是对新问题更感困惑不解。他们向别人请教，希冀得到点石成金的钥匙，得到的却是理想答案的一鳞半爪；查询相关文章，看到的只是分散的资料；查阅图书，也看不到系统性论述高等数学学习的书籍。

为了使学习者学习高等数学时克服上述困难，学有所倚，学有多得，作者凭借自己这几年在数学教育心理学、数学思维理论、学习心理学等教育教学理论方面的积淀，根据自己从事高等数学教学的直接和间接经验，依靠其他同事的帮助，写就这本《高等数学学习论》。本书从学习者较为关注的 6 个方面对高等数学的学习进行了理论探索，再从相应的角度提出了优化高等数学学习的措施和方法。写作时力求与学习者学习实际相结合，与高等数学教材内容相结合。

全书共有六章，各章主要内容如下。

第一章是高等数学认知结构，主要论述了高等数学认知结构的特点和良好高等数学认知结构的培养。

第二章是高等数学问题解决，在常见的一般意义的问题解决模式、数学教育家的数学问题解决模式和高等数学问题解决的影响因素的基础上，提出了高等数学问题解决模式。

第三章是高等数学学习中的数学美，论述了高等数学中数学美的种类、作用以及如何发挥它们的作用。

第四章是高等数学学习中的数学思想方法，阐述了高等数学中数学思想方法的种类、作用，重点是结合例子论述了如何发挥各类思想方法的作用。

第五章是高等数学学习中的数学思维，论述了数学形象思维、数学逻辑思维、数学直觉的定义、特点、形式、作用，再结合例子论述如何发挥其作用，接着论述了创造性思维的定义、特点、形式、在高等数学学习中的作用与培养方法。

第六章是高等数学学习中的非智力因素，分别论述了元认知、动机、注意力三种重要心理因素的内容、作用和高等数学学习中怎样发挥它们的作用。

目 录

第一章 高等数学认知结构	1
第一节 认知结构	1
一、认知结构的定义	1
二、认知结构的特点	2
三、认知结构的影响因素	5
四、认知结构的作用	6
第二节 高等数学认知结构	7
一、高等数学认知结构的定义	7
二、高等数学认知结构的特点	8
三、数学认知结构的分类	8
四、高等数学认知结构的影响因素	13
五、高等数学认知结构的意义和作用	13
第三节 良好高等数学认知结构的培养	15
一、提高自己的学习兴趣，强化学习动机	15
二、学习能促进建立数学认知结构的数学思维方法	16
三、学习新知识以前弄清自己原有的相关认知结构	16
四、学习者要形成层次明晰、形态优美的认知结构	17
五、发掘定理、例题的逻辑内涵，使证明的思路易于理解	17

六、结合情境性知识形成认知结构	19
七、改变公式的呈现形式,使自己从更高层次上学习	19
八、形成整体性的认知结构	20
九、形成生动有趣的认知结构	21
十、利用信息技术和心理学知识形成认知结构	22
第二章 高等数学问题解决	23
第一节 问题解决	23
一、问题	23
二、问题的分类	24
三、问题解决	26
四、一些问题解决模式	27
五、问题解决的影响因素	27
第二节 高等数学问题解决	32
一、高等数学问题解决	32
二、一些数学问题解决的模式	32
三、数学问题解决的影响因素	34
第三节 高等数学问题解决能力的培养	36
一、提出高等数学问题解决模式的原则	36
二、高等数学问题解决模式	38
第三章 高等数学学习中的数学美	45
第一节 高等数学中的数学美	45
一、数学美	45
二、数学美在高等数学学习中的功能	54

第二节 高等数学学习中的数学美功用的发挥	55
一、应遵循的原则	56
二、高等数学学习中数学美功用的发挥	57
 第四章 高等数学学习中的数学思想方法	65
第一节 高等数学中的数学思想方法	65
一、数学思想方法	65
二、高等数学学习中数学思想方法的作用	67
第二节 高等数学学习中的数学思想方法的运用	69
第三节 高等数学学习中的数学思想方法作用的强化	133
 第五章 高等数学学习中的数学思维	139
第一节 高等数学学习中的形象思维	139
一、数学形象思维的定义和特点	139
二、数学形象思维的形式	140
三、数学形象思维在高等数学学习中的作用	143
四、高等数学学习中形象思维作用的发挥	144
第二节 高等数学学习中的逻辑思维	149
一、数学逻辑思维的定義和特点	149
二、数学逻辑思维的形式	149
三、数学逻辑思维在高等数学学习中的作用	151
四、高等数学学习中逻辑思维作用的发挥	151
第三节 高等数学学习中的直觉思维	154
一、数学直觉思维的定义和特点	154
二、数学直觉思维的形式	155

三、数学直觉思维在高等数学学习中的作用	155
四、高等数学学习中直觉思维作用的发挥	156
第四节 高等数学学习中的创造性思维	160
一、数学创造性思维的定义和特点	160
二、数学创造性思维的形式	161
三、数学创造性思维在高等数学学习中的作用	161
四、高等数学学习中创造性思维的培养	163
 第六章 高等数学学习中的非智力因素	 175
第一节 高等数学学习中的注意力	175
一、注意力的定义和特征	175
二、注意力的分类	176
三、注意力的作用	176
四、高等数学学习中注意力作用的发挥	177
第二节 高等数学学习中的学习动机	181
一、学习动机的定义和特征	181
二、学习动机的分类	181
三、学习动机的作用	182
四、高等数学学习中学习动机作用的发挥	183
第三节 高等数学学习中的元认知	186
一、元认知的定义与结构	186
二、元认知在高等数学学习中的作用	188
三、高等数学学习中元认知作用的发挥	189
 参考文献	 193

第一章 高等数学认知结构

许多人认为认知结构就是简化了的知识结构，不重视认知结构的作用。有鉴于此，本章将论述认知结构、高等数学认知结构、良好高等数学认知结构的培养。

第一节 认知结构

认知结构并不等同于知识结构，它的特点和作用为越来越多的人所认识，广泛运用于教学中。

一、认知结构的定义

认知是人脑反映知识以及知识间的联系，并揭示其规律的心理活动，表现为感觉、知觉、听觉、注意、记忆、想象、思维和言语等。依据认知心理学的观点，认知是个体对外部信息的吸收、加工、储存和提取的过程。认知结构就是在认知的基础上形成的，它是人在对认知对象进行感知、记忆等多种心理活动后在头脑中形成的知识结构。

二、认知结构的特点

对认知结构特点的认识,不同的人有不同的观点.美国心理学家布鲁纳认为人的学习的实质在于主动形成认知结构,强调认知活动中认知结构的作用,他把认知结构称为“表征”,表征分为动作性表征、映像性表征和符号性表征三种形式,将学科基本结构作为教学中心,对学科基本结构的理解即形成了个体的认知结构,他还强调要通过发现学习形成认知结构.皮亚杰认为,人的智力结构的基本单位是图式,即有组织的思考或行动的模式,是用来了解周围世界的认知结构.通过同化、顺应和平衡的过程,人的认知逐渐成熟起来.同化是指人将外界信息纳入到已有的认知结构的过程,但是有些信息与现存的认知结构不十分吻合,这时个体就要改变认知结构,这个过程即是顺应.平衡是一种心理状态,当个体已有的认知结构能够轻松地同化环境中的新经验时,就会感到平衡,否则就会感到失衡.心理状态的失衡驱使个体采取行动调整或改变现有的认知结构,以达到新的平衡.他还认为结构的特征是整体性、转换性和自我调节性.^①曹志希认为,人的认知结构的形成是一个不断发展的过程,所形成的是一个具有鲜明特征的系统,在运用中具有各自典型的模式,因而具有鲜明的动态性、过程性、系统性和模式性特征^②.奥苏贝尔认为,可利用性、可辨别性和稳定性是决定良好认知结构的三个重要认知结构变量^③,其中可辨别性是指当原有结构同化新知识时,新旧观念的异同点是否可以清晰地辨别.

① 李士琦: PME: 数学教育心理 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001: 61—62.

② 曹志希, 陈友良. 语言认知结构的基本特征 [J]. 湖南社会科学, 2005 (1): 161—162.

③ [美] 奥苏贝尔等. 教育心理学 [M]. 余星南, 宋钧译. 北京: 人民教育出版社, 1994: 202—222.

综合上述观点,良好认知结构应该具有以下特点.^①

1. 个性化

不同的学习者由于知识基础、学习方式、心理状态不同而对知识的表征方式有所差异,形成的内隐的认知结构也各不相同,使认知结构体现出个性化的特点.学习者形成认知结构的过程伴随着元认知的活动,元认知知识、元认知体验、元认知监控在其中起一定的作用,最终形成的结构自然包含着自身的元认知因素.

2. 动态性

新学习的知识对学习者原有的认知结构不断造成冲击,使认知结构经常发生分化、重组和改造,实现对知识的同化和自身的顺应,达到暂时的平衡,如此反复,促使认知结构愈加精致.

3. 层次性

知识结构中的许多知识既有上位知识,又有下位知识,进入认知结构后也就会随层级的不同而按阶梯排列,一个节点对应的上位知识包摄着多个不同节点的下位知识.

4. 可辨别性

可辨别性不只是指是指当原有结构同化新知识时,新旧观念的异同点是否可以清晰地辨别.实际上,可辨别性还应该指原有结构中的观念与已有的邻近观念能否清晰地辨别.在学习数学新知识、解决问题时需要头脑中储存的认知结构,在数量众多的认知结构中,相应的认知结构的可辨别性强,达到“万绿丛中一点红”、“鹤立鸡群”的效果,就能有利于知识的快速检索、识别和提取,有利于问题的快速解决.

5. 趣味性

“知之者不如好之者,好之者不如乐之者.”(《论语·雍也》)

^① 王有文.高等数学教学中学习者良好认知结构的培养[J].成都师范学院学报,2013(1):119—120.

兴趣是最好的老师，人们若对知识感兴趣，就想急切地学习，学习起来就快捷、专注、深入，建构也就富有效果。建立认知结构也是如此，知识及其组织结构具有趣味，主体就情愿倾注精力积极地建构，并容易留下较深的记忆痕迹。

6. 情境性

认知结构不应只是结果性知识，应是情境（过程）和结果相结合的知识，其中的情境知识尤为重要。威尔逊（B. G. Wilson）和迈尔斯（K. M. Myers）的情境认知理论认为，思维和学习只有在特定的情境中才有意义。^①结合具体情境习得的认知结构，伴随有其它知识，包含着数学思想方法、双向产生式、数学问题解决的有效方法，还有学习者在学习过程中的情感体验和自我监控体验，而这些元认知知识对于未来的学习不可或缺。

7. 整体性

皮亚杰认为的一般认知结构的三个特性之一的整体性是指内化后的数学概念按照一定的逻辑规则和数学运算以及各人的理解能力组成为一个有机的整体。这种整体性在数学学习活动中表现为新的数学知识与原有的数学知识不断沟通，形成具有一定整体性和相对独立性的知识块。^②认知结构的整体性越强，与主要知识联系的各类知识就越多，主要知识的分量就越重，巩固效果就越好。思接千载、视通万里可使古代哲人分析问题时得出富有思想的深邃结论，具有整体性的认知结构也有类似效果，它可使学习者从更深更广的角度运用既有知识来习得新知识，解决新问题。

8. 良好的结构性

对知识进行记忆时，材料重现的速度与准确性与材料的组织有

① 喻平. 数学教育心理学 [M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008: 49—50.

② 刘斌. 数学认知结构及其建构 [J]. 湖北大学学报 (自然科学版), 1997 (9): 222—226.

关^①，故认知结构不应是模糊的、未经精细加工的相互之间有联系的知识堆砌，应该是上下位知识层次分明、结构优美完善、形式独特、富有启发性的结构性知识，这样才能使学习者对知识进行总体把握，易于记忆。

三、认知结构的影响因素

影响良好认知结构形成和发展的因素有学科的知识结构和结构、学习者的知识储备、学习者原有认知结构的特点、学习者的心理特点、学习者的审美能力等。

学科的知识结构和结构是学科内容及其组织结构，主要体现在教材和教师的讲解中。知识的系统性、抽象程度、所包含程序性知识比重的多少、与其它知识的联系程度均会影响认知结构的质量。知识的系统性越强，越易形成完整的认知结构；抽象程度越低，越易快捷地纳入认知结构；所包含的程序性知识的比重越多、越易于结合具体例子的应用纳入认知结构；与其它知识的联系越广泛，越易形成包摄性和趣味性更强的认知结构。知识组织结构越简单、层次性越明显、越具有逻辑顺序，也就越易纳入认知结构。

学习者知识储备指头脑中的相关知识，这种知识储备得丰厚，所包含的当前知识的上位知识和横向联系知识就越多，在建立认知结构时当前知识就容易被同化，或者所建立的以新知识为主的新的认知结构就容易很快地形成，反之则效果较差。例如，学习者学习高等数学的向量积时，如果熟悉平面向量和空间向量的性质、物理学中力矩的定义、线性代数中的行列式运算，那么向量积的认知结构即容易形成。学习者储备的这些知识中，特别值得一提的是其中的“先行组织者”，所谓“先行组织者”是先于学习任务本身呈现的一种引导性材料。它要比学习任务本身有较高的抽象、概括和综合水平，并能清晰

① 章志光. 心理学(修订版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2002: 160.

地与认知结构中原有的观念和新的学习任务相关联.^①

学习者原有认知结构的特点主要是指原有认知结构中观念模式的主导作用.观念是指数学学习中比较有效的活动经验,观念模式是由观念形成的模式,其结构的特点直接影响着对新信息的同化和原有认知结构的顺应,也就直接影响数学认知结构的发展.学习者对观念模式有时还会产生“偏爱效应”.^②

与建立高等数学认知结构有关的学习者心理特点包括学习者的兴趣、动机、注意、想象、记忆等.学习者对知识的兴趣和动机越强,就愿意更加投入地进行思考,思维的深刻性和广阔性也就越强;对知识的注意力越集中,思考问题时也越专注,但是有时又不利于进行注意的转移,以及时和其它知识相联系;想象力越丰富,越易和相关数学知识和其它学科知识相联系,建立内容广泛、富有情境性的认知结构;记忆越得法,越容易利用不同的记忆方法如字头记忆法、联想记忆法等建立较为牢固的认知结构.

学习者若具备较强的审美能力,建立认知结构时就会从美学的角度对认知结构进行考虑,使知识之间的联系、局部或整体结构体现出美,例如知识联系之间的意境美、整体结构的对称美等,这样的认知结构较易巩固和运用时提取.

四、认知结构的作用

在学习过程中,认知结构起着重要作用.布鲁纳认为作为认知结构的学科基本结构至少有4种功能:(1)懂得基本原理可以使得学科更容易理解;(2)可以促进人们对知识的记忆和保持;(3)有助于学习的迁移;(4)能够缩小“高级”知识和“初级”知识之间的差

① 李伯黍,燕国材.教育心理学[M].上海:华东师范大学出版社,1993:224.

② 徐文生,崔俊英.浅论数学认知结构[J].河北师范大学学报(自然科学版),1993(4):25.

距.^① 奥苏贝尔认为,如果认知结构是明晰、稳定的和适当组织起来的,就会产生正确的和毫不模糊的意义,并有助于保持这些意义的分离强度或可利用性. 司根普认为,在数学学习中,图式的基本认知作用有两个:一是使已学的知识得到完整的组织;二是学习新知识的智力工具.^② 喻平认为,认知结构是将陈述性知识和程序性知识组合起来的一个表征系统,其功能就大于个别的分散的知识功能,具有优良认知结构的个体,才具有优良的结构转换能力,认知结构又具有自我发展和完善的调节功能.^③ 习得良好的知识结构,可提高学习者感受美、鉴别美、欣赏美的能力,提高他们用辩证唯物主义知识分析问题的能力和将所学知识运用于实践的能力.

第二节 高等数学认知结构

结合高等数学这门学科高度抽象性、逻辑严谨性、应用广泛性的特点和认知结构的共性研究高等数学认知结构,有助于揭示其规律,培养学习者良好的高等数学认知结构.

一、高等数学认知结构的定义

高等数学认知结构就是学习者头脑中的数学知识,按照自己理解的深度、广度,结合着自己的感觉、知觉、记忆、思维、联想等

① [美] 布鲁纳. 教育过程 [M]. 邵瑞珍译. 北京: 文化教育出版社, 1982: 41—42.

② 李士琦. PME: 数学教育心理 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001: 61—62.

③ 喻平. 数学教育心理学 [M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008: 165.