高等数学精选习题解析

北京大学数学科学学院

林源渠 编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等数学精选习题解析

北京大学数学科学学院

林源渠　编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学精选习题解析/林源渠编. —北京：北京大学出版社，2011. 8
ISBN 978-7-301-19262-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 140814 号

书　　　名：高等数学精选习题解析
著名责任者：林源渠　编
责 任 编 辑：刘　勇　潘丽娜
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-19262-7/O·0849
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
890mm×1240mm　A5　15.25 印张　430 千字
2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　　数：0001—4000 册
定　　　价：30.00 元

内 容 简 介

本书是高等院校非数学专业大学生学习高等数学课程的辅导教材. 作者在北京大学从事高等数学等课程的教学四十余年, 具有丰富的教学经验, 深知学生的疑难与困惑. 作者根据学生学习高等数学课程遇到的难点与易混淆的概念, 通过精选的典型例题进行分析、讲解与评注, 释疑解惑, 从多侧面给出归纳和总结, 以帮助学生更好地理解与掌握高等数学内容; 用典型例题分析展现的平台教会学生正确的解题方法与技巧, 以提高学生分析问题和解决问题的能力.

全书共分九章, 内容包括: 函数、极限与连续, 一元函数微分学, 一元函数积分学, 向量代数与空间解析几何, 多元函数微分学, 多元函数积分学, 无穷级数, 常微分方程, 典型综合题. 本书所选例题有些是北京大学等高校非数学类研究生入学考试的高等数学试题; 有些是为理解难点作者自编的习题; 而综合题解题方法独特新颖、难易适度、涵盖知识面广, 是很好的考研复习资料. 本书用 U 形等式串或 U 形不等式串给出的数学推理 U 形图简明、易懂; 用绘图软件制作的精美图形, 会使读者眼前一亮, 并有助于对题目的理解, 帮助解题.

读者在阅读本书时, 如遇到疑难问题, 可与作者联系, 电子邮件地址: lyq@math.pku.edu.cn

作者简介

林源渠 北京大学数学科学学院教授. 1965年毕业于北京大学数学力学系, 从事高等数学、数学分析、泛函分析、线性代数、渐近分析、数值分析、常微分方程、控制论等十余门课程的教学工作, 研究方向为反应扩散方程. 在四十余年的高等数学、数学分析的教学工作中, 作者对高等数学的解题思路、方法与技巧有深入研究, 造诣颇深, 有自己的特色. 参加编写的教材有《泛函分析讲义》(上册)、《数值分析》、《数学分析解题指南》、《数学分析习题集》、《高等数学精选习题解析》、《泛函分析学习指南》等.

目　　录

第一章　函数、极限与连续 ······ 1

§1　函数 ······ 1

内容提要 ······ 1

1. 函数与反函数 ······ 1

2. 周期函数 ······ 2

3. 复合函数 ······ 3

典型例题解析 ······ 3

§2　序列极限 ······ 10

内容提要 ······ 10

1. 序列极限的定义 ······ 10

2. 序列极限的性质与运算 ······ 10

3. 单调序列极限存在的准则 ······ 11

4. 一个重要极限 ······ 11

5. 函数极限 ······ 11

6. 无穷小与无穷大 ······ 12

7. 函数极限与序列极限的关系 —— 归结原理 ······ 13

典型例题解析 ······ 13

§3　连续 ······ 22

内容提要 ······ 22

1. 函数连续的判定 ······ 22

2. 函数间断点的判定及类型 ······ 22

3. 闭区间上连续函数的性质 ······ 22

典型例题解析 ······ 23

第二章　一元函数微分学 ······ 31

§1　导数和微分 ······ 31

内容提要 ······ 31

1. 导数的定义 …… 31
2. 导数的几何意义 …… 31
3. 单侧导数 …… 31
4. 导数基本公式 …… 32
5. 求导的基本法则 …… 32
6. 高阶导数 …… 33
7. 微分定义 …… 33
8. 函数可微的充分必要条件 …… 33
9. 一阶微分形式的不变性 …… 33
10. 几何应用 …… 34
典型例题解析 …… 35
§2 微分中值定理 …… 47
内容提要 …… 47
典型例题解析 …… 48
§3 函数的升降、极值、最值问题 …… 66
内容提要 …… 66
1. 函数单调性判别法 …… 66
2. 函数极值的定义 …… 67
3. 函数取极值的判别法 I …… 67
4. 函数取极值的判别法 II …… 67
典型例题解析 …… 68
§4 函数的凹凸性、拐点及函数作图 …… 88
内容提要 …… 88
1. 曲线凹凸性的等价命题 …… 88
2. 曲线拐点的判别法 …… 89
3. 渐近线定义 …… 89
4. 函数作图的步骤 …… 89
典型例题解析 …… 90
§5 洛必达法则与泰勒公式 …… 111
内容提要 …… 111
1. 洛必达法则 …… 111

2. 泰勒公式 ······ 112
3. 常用函数的麦克劳林公式 ······ 112
典型例题解析 ······ 113
第三章　一元函数积分学 ······ 137
§1　不定积分 ······ 137
内容提要 ······ 137
1. 不定积分的概念 ······ 137
2. 不定积分的基本性质 ······ 137
3. 基本积分表 ······ 137
4. 积分法 ······ 138
5. 可积函数类 ······ 138
典型例题解析 ······ 140
1. 分项积分法 ······ 140
2. 换元法 ······ 146
3. 分部积分法 ······ 155
4. 联合求解法 ······ 160
5. 综合应用 ······ 163
§2　定积分和广义积分 ······ 169
内容提要 ······ 169
1. 定积分的定义 ······ 169
2. 函数可积的充分条件 ······ 169
3. 微积分基本定理 (牛顿–莱布尼茨公式) ······ 169
4. 定积分性质 ······ 170
5. 变限定积分 ······ 171
6. 定积分的积分法 ······ 171
7. 变限定积分的求导公式 ······ 171
8. 广义积分的比较审敛法 (极限形式) ······ 171
9. 绝对收敛的广义积分 ······ 172
10. 几个重要公式 ······ 172
典型例题解析 ······ 172
1. 定积分的计算与等式证明 ······ 172

2. 含定积分的不等式证明 …… 189
3. 含定积分的中值命题 …… 190
4. 定积分的极限 …… 194
§3 定积分应用 …… 196
内容提要 …… 196
1. 几何应用 …… 196
2. 物理上的应用 …… 196
典型例题解析 …… 196
第四章 向量代数与空间解析几何 …… 216
内容提要 …… 216
1. 向量概念 …… 216
2. 向量的运算 …… 216
3. 平面及其方程 …… 217
4. 直线及其方程 …… 218
5. 平面束方程 …… 220
6. 曲面概念 …… 220
7. 二次曲面 …… 220
8. 空间曲线概念 …… 221
典型例题解析 …… 221
第五章 多元函数微分学 …… 241
内容提要 …… 241
1. 二元函数的极限与连续 …… 241
2. 多元函数微分学 …… 242
典型例题解析 …… 246
第六章 多元函数积分学 …… 273
§1 重积分 …… 273
内容提要 …… 273
1. 重积分的基本概念与性质 …… 273
2. 重积分化累次积分 …… 274
3. 重积分变换 …… 275
4. 重积分的应用 …… 276

典型例题解析 277
§2 平面曲线积分与格林公式 301
内容提要 301
1. 曲线积分 301
2. 格林公式 303
3. 曲线积分与路径无关的条件 303
4. 当曲线积分与路径无关时, 求原函数的简捷算法 303
典型例题解析 305
§3 曲面积分 328
内容提要 328
1. 对面积的曲面积分 (第一型曲面积分) 328
2. 对坐标的曲面积分 (第二型曲面积分) 329
3. 第二型曲面积分的简便算法 330
4. 高斯公式 331
5. 斯托克斯公式 331
6. 通量与散度, 环流量与旋度 331
典型例题解析 332
第七章 无穷级数 364
§1 数项级数 364
内容提要 364
1. 收敛与发散定义 364
2. 级数收敛的必要条件 364
3. 正项级数 364
4. 任意项级数 366
5. 任意项级数的审敛法 367
典型例题解析 367
§2 幂级数与傅里叶级数 385
内容提要 385
1. 幂级数 385
2. 傅里叶级数 387
典型例题解析 389

第八章　常微分方程 ······ 398

§1　一阶微分方程 ······ 398

内容提要 ······ 398

1. 一阶微分方程 ······ 398
2. 可降阶的高阶微分方程的解法 ······ 400
3. 二阶常系数齐次线性微分方程的解法 ······ 400
4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 ······ 401

典型例题解析 ······ 402

第九章　典型综合题 ······ 424

第一章　函数、极限与连续

§1　函　　数

内 容 提 要

1. 函数与反函数

定义 (函数)　给定数集合 X, Y, 如果有某种对应法则 f, 使得对于每一个元素 $x \in X$, 都存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 是从 X 到 Y 的函数或映射, 记做 $f: X \to Y$; f 在点 x 处的值记做 $y = f(x)$; X 称为 f 的**定义域**, Y 称为 f 的**取值域**;

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) | x \in X\}$$

称为 f 的**值域**. 当我们只给出对应法则与定义域时, 约定取值域即为值域.

若 $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ 或 $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, 则称 f 为**单射** (图 1.1);

若 $f(X) = Y$, 则称 f 为**满射** (图 1.1);

若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射或一一对应** (图 1.1).

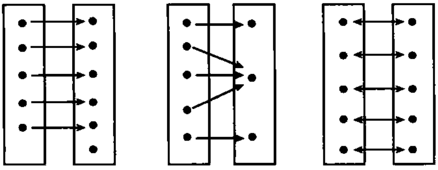

图　1.1

例如, 所有实数与实轴上的点是一一对应的. 但若设

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$f: [-1, 1] \to [-1, 1]$, 既不是单射也是不满射. 事实上, $f(-1) = f(1) = 0$ (图 1.2), 故非单射; 又 $f([-1, 1]) = [0, 1] \neq [-1, 1]$, 故非满射.

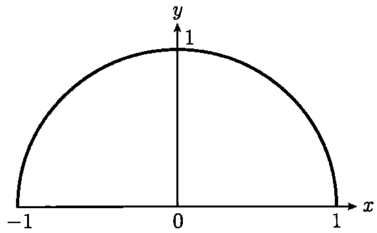

图 1.2

定义 (反函数) 给定 $f: X \to Y$, 若对任意的 $y \in Y$, 方程 $f(x) = y$ 在 X 上有且仅有一解, 则由此定义一个从 Y 到 X 的函数, 称为 f 的**反函数**, 记做 $f^{-1}: Y \to X$.

$f: X \to Y$ 有反函数的充分必要条件是 f 是一一对应的. 若 $f(x)$ 在 X 上严格单调, 则 f 在 X 上是一一对应的, 所以 f 的反函数存在. 但是一一对应的函数不一定是严格单调的. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

在 $[0,2]$ 上既是单射又是满射 (图 1.3), 所以是一一对应的, 但不是单调函数, 这个函数的反函数仍是它自己.

函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形相同, 然而, $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形不同, 它们关于直线 $y = x$ 对称.

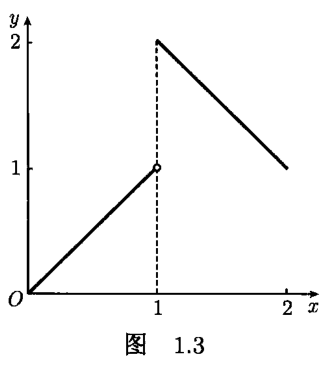

图 1.3

2. 周期函数

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若存在 $l > 0$, 对任意的 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是周期函数, l 称为函数 $f(x)$ 的周期. 显然, 周期函数有无穷多个周期.

若在无穷多个周期 l 中, 有一个最小的正数 T, 则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期, 简称**周期**.

既然周期函数的值每隔一个周期都是相同的, 所以作周期函数图形只要作出一个周期的图形, 然后周而复始地复制这个图形, 即得整个周期函数的图形.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D, u=\varphi(x)$ 的定义域为 X, 值域为 $U\subseteq D$, 则称

$$y=f(\varphi(x)),\quad x\in X$$

是由 f 与 φ 复合而成的**复合函数** (图 1.4).

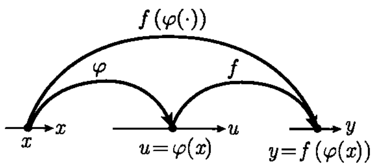

图 1.4

反函数也可以用复合函数来定义, 这就是:

给定函数 $y=f(x)$, 其定义域和值域分别记做 X 和 Y, 若在集合 Y 上存在函数 $g(y)$, 满足

$$g(f(x))=x,\quad 对任意的\ x\in X,$$

则称 $g(y)=f^{-1}(y)$, 对任意的 $y\in Y$.

典型例题解析

例 1 作函数 $y=\arccos(\sin x)$ 的图形.

分析 因为 $\sin x$ 的周期是 2π, 所以 $\arccos(\sin x)$ 的周期也是 2π. 再注意到 $\arccos x$ 的主值区间是 $[0,\pi]$, 从而有

$$\arccos(\cos t)=t,\quad t\in[0,\pi]. \tag{1}$$

为了便于应用公式 (1), 选择长度为 2π 的基本区间 $[\pi/2, 5\pi/2]$, 并将其分开为 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 和 $[3\pi/2, 5\pi/2]$ 两部分, 在这两部分区间上, 分别有 $x-\pi/2 \in [0,\pi]$ 与 $5\pi/2 - x \in [0,\pi]$, 都可以应用公式 (1).

解 ① 当 $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ 时, $x-\pi/2 \in [0,\pi]$, 故有

$$\begin{array}{ccc} y & & x-\pi/2 \\ \| & & \| \\ \arccos(\sin x) & = & \arccos(\cos(x-\pi/2)) \end{array}$$

根据上面 U 形等式串的两端, 即知

$$y = x - \pi/2, \quad x \in [\pi/2, 3\pi/2].$$

② 当 $x \in [3\pi/2, 5\pi/2]$ 时, $5\pi/2 - x \in [0,\pi]$, 故有

$$\begin{array}{ccc} y & & 5\pi/2-x \\ \| & & \| \\ \arccos(\sin x) & = & \arccos(\cos(5\pi/2-x)) \end{array}$$

根据上面 U 形等式串的两端, 即知

$$y = \frac{5\pi}{2} - x, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

于是, 在这个基本区间 $[\pi/2, 5\pi/2]$ 上, 我们有

$$y = \arccos(\sin x) = \begin{cases} x - \pi/2, & x \in [\pi/2, 3\pi/2], \\ 5\pi/2 - x, & x \in [3\pi/2, 5\pi/2], \end{cases}$$

它的图形如图 1.5 所示, 然后周而复始地复制这个图形, 即得整个周期函数的图形 (图 1.6).

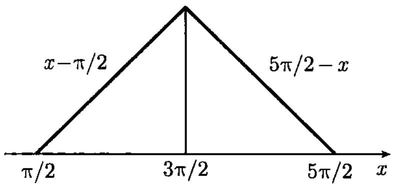

图 1.5

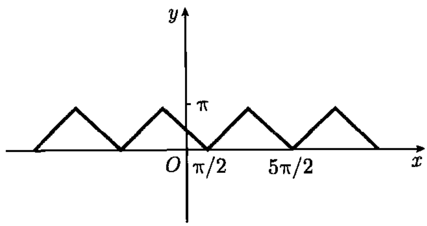

图 1.6

例 2　设 $f(x)$ 既关于直线 $x=a$ 对称, 又关于直线 $x=b$ 对称, 已知 $b>a$, 求证: $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

证　由已知

$$f(a-x)=f(a+x) \xRightarrow{t=a+x} f(2a-t)=f(t), \tag{1}$$

$$f(b-x)=f(b+x) \xRightarrow{t=b+x} f(2b-t)=f(t). \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[d, equal, "(1)"', "t=x"] & f(x+2(b-a)) \arrow[d, equal] \\ f(2a-x) \arrow[r, equal, "(2)", "t=2a-x"'] & f(2b-(2a-x)) \end{tikzcd}$$

根据上面 U 形等式串的两端, 即知 $f(x)$ 是周期函数, 并且其周期是 $2(b-a)$.

评注　本例给出利用函数图像特性判定函数为周期函数, 并同时求得周期的方法.

例 3　求函数 $y=2x+|2-x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数并作出它的图形.

解　对任意给定的 y, 视 x 为未知数, 解方程 $2x+|2-x|=y$, 为了去掉绝对值, 将方程改写为

$$y=\begin{cases} x+2, & x\leqslant 2, \\ 3x-2, & x>2. \end{cases}$$

当 $x\leqslant 2$ 时, $y=x+2 \Longrightarrow x=y-2,\ y\leqslant 4$;

当 $x>2$ 时, $y=3x-2 \Longrightarrow x=\dfrac{y+2}{3},\ y>4$.

综上所述即得:

$$x=\begin{cases} y-2, & y\leqslant 4,\\ \dfrac{y+2}{3}, & y>4 \end{cases} \xrightarrow{x,y\ 互换} y=\begin{cases} x-2, & x\leqslant 4,\\ \dfrac{x+2}{3}, & x>4. \end{cases}$$

于是, 若记 $f(x)=2x+|2-x|$, 则有

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2, & x\leqslant 4,\\ \dfrac{x+2}{3}, & x>4, \end{cases}$$

两者图形如图 1.7 所示.

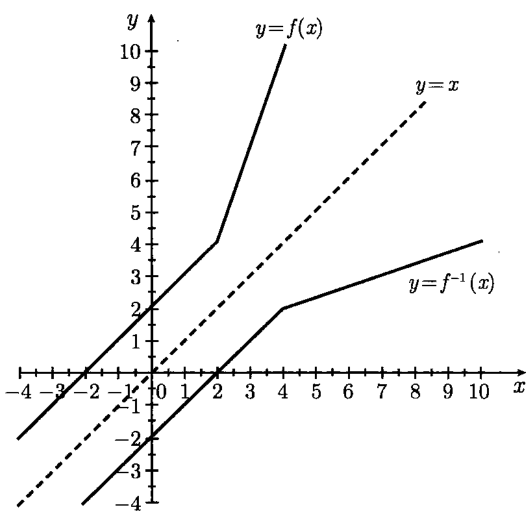

图 1.7

例 4 求证: ① $\sin x<x<\tan x,\ 0<x<1$;

② $\arctan x<x<\arcsin x,\ 0<x<1$.

证 ① 从如图 1.8 所示的三角单位圆第一象限, 易知

$$\triangle POA\ 面积 < 扇形\ POA\ 面积 < \triangle TOA\ 面积,$$

即有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,\quad 0<x<1.$$