华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(二)

配高教社《概率论与数理统计教程》第四版 沈恒范 主编

概率论与数理统计教程

沈恒范 第四版

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 戎晓政

本书主编 清华大学 吴庆伟

◈紧扣教材 ◈知识精讲 ◈习题全解

◈应试必备 ◈联系考研 ◈网络增值

中国矿业大学出版社

概率论与数理统计教程

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　戎晓政
本书主编　清华大学　吴庆伟

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，沈恒范编的《概率论与数理统计教程》(第四版)教材的配套辅导书。本书由课程学习指南、知识点归纳、重难点解析、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析、课后习题全解及 2008 年考研真题等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学习分析问题和解决问题的方法技巧，并提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校概率论与数理统计课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程同步辅导及习题全解 / 吴庆伟主编. 一徐州：中国矿业大学出版社，2008.1

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 978-7-81107-913-5

Ⅰ.概… Ⅱ.吴… Ⅲ.①概率论一高等学校一教学参考资料②数理统计一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003077 号

书　　名　概率论与数理统计教程同步辅导及习题全解

主　　编　吴庆伟

责任编辑　罗　浩

选题策划　孙怀东

特约编辑　王丽娜

出版发行　中国矿业大学出版社

江苏省徐州市中国矿业大学内　邮政编码221008

网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com

印　　刷　北京市昌平百善印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　850×1168　1/32　**本册印张** 12.75　**本册字数** 432 千字

版次印次　2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷

总 定 价　77.80 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

概率论与数理统计是理工科及经济管理等专业重要的基础课之一，也是报考该类专业硕士研究生的专业考试课程。沈恒范编写的《概率论与数理统计教程》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《概率论与数理统计教程同步辅导及习题全解》(第四版)。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本的解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到概率论与数理统计这门课程的特点，我们在内容上做了以下安排：

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 知识点归纳　串讲概念，总结性质和定理，使得知识全面系统，便于掌握。

3. 重难点解析　梳理各章重点、难点，有助于学生把握概念之间的本质区别和需要注意的问题，同时特别点出考试中的常考重要知识点。

4. 典型例题与解题技巧　精选各类题型，涵盖本章

所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

5. 历年考研真题评析　精选历年考研真题进行深入的讲解。

6. 课后习题全解　本书给出了沈恒范编写的《概率论与数理统计教程》(第四版)各章课后习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

7. 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题　本书给出 2008 年硕士研究生入学考试数学一的真题及详解，使学生可以全面、深刻、透彻地分析真题，把握考研的重点、难点。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：

http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件：

huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南 …… 1

第一章 随机事件及其概率 …… 3

知识点归纳 …… 3

重难点解析 …… 9

典型例题与解题技巧 …… 10

历年考研真题评析 …… 28

课后习题全解 …… 30

第二章 随机变量及其分布 …… 64

知识点归纳 …… 64

重难点解析 …… 71

典型例题与解题技巧 …… 73

历年考研真题评析 …… 96

课后习题全解 …… 101

第三章 随机变量的数字特征 …… 144

知识点归纳 …… 144

重难点解析 …… 149

典型例题与解题技巧 …… 150

历年考研真题评析 …… 160

课后习题全解 …………………………………………………… 167

第四章　正态分布 ……………………………………………… 196

知识点归纳 …………………………………………………… 196

重难点解析 …………………………………………………… 199

典型例题与解题技巧 ……………………………………………… 200

课后习题全解 …………………………………………………… 210

第五章　数理统计的基本知识 ………………………………… 227

知识点归纳 …………………………………………………… 227

重难点解析 …………………………………………………… 233

典型例题与解题技巧 ……………………………………………… 234

历年考研真题评析 ……………………………………………… 242

课后习题全解 …………………………………………………… 244

第六章　参数估计 ……………………………………………… 259

知识点归纳 …………………………………………………… 259

重难点解析 …………………………………………………… 263

典型例题与解题技巧 ……………………………………………… 264

历年考研真题评析 ……………………………………………… 270

课后习题全解 …………………………………………………… 278

第七章　假设检验 ……………………………………………… 303

知识点归纳 …………………………………………………… 303

重难点解析 …………………………………………………… 306

典型例题与解题技巧 ……………………………………………… 306

历年考研真题评析 ……………………………………………… 312

课后习题全解 …………………………………………………… 314

第八章　方差分析 …………………………………………… 330
知识点归纳 …………………………………………………… 330
重难点解析 …………………………………………………… 334
典型例题与解题技巧 ………………………………………… 335
课后习题全解 ………………………………………………… 339
第九章　回归分析 …………………………………………… 353
知识点归纳 …………………………………………………… 353
重难点解析 …………………………………………………… 357
典型例题与解题技巧 ………………………………………… 357
课后习题全解 ………………………………………………… 360
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ………………… 383
参考答案 ……………………………………………………… 386

课程学习指南

概率论与数理统计是理工类以及相关专业必修的一门核心理论基础课，也是以后继续深化系统学习数学理论的基础课程，同时也是理工类及经济管理各专业硕士研究生入学考试的必考科目。

学习概率论与数理统计的目的是掌握概率论与数理统计的基本理论，掌握解题的方法与技巧，提高综合分析及解决问题的能力，进而提高自己处理实际问题的能力。在社会经济高速发展的今天，概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工农业生产、金融、经济各方面的应用越来越普遍。

概率论与数理统计具有很强的理论性和系统性，需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力，因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当的预习，并了解一下相关理论的发展历程，对所学的课程有一个整体性的把握。同时，本课程又是一门指导性的学科，对它的掌握直接关系到其他后续的专业课程。

本书包含九章内容，可分为两大部分。第一部分为概率论相关内容，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及正态分布等内容；第二部分为数理统计相关内容，包括数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析以及回归分析等内容。

概率论与数理统计是一门逻辑性很强的课程，因此学习这门课程有一定难度。为了学好这门课程，建议在学习过程中应按以下方法学习：

1. 理解掌握基本概念与定理，掌握基本方法。

2. 注意理论前后发展的系统性与关联性，做到融汇贯通。

3. 注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合。

4. 要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯。

第一章

随机事件及其概率

知识点归纳

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验

自然界中的客观现象一般可分为决定性现象和随机现象.决定性现象是指在一定的条件下必然出现或必然不出现的现象,而随机现象是指在一定的条件下可能出现也可能不出现的现象,概率论是研究大量随机现象的统计规律性的数学分支.概率论中将满足下列三个特点的试验称为随机试验,简称试验,通常用 E 或 $E_1,E_2,\cdots\cdots$ 来表示,试验满足下列三个特点:

(1) 试验可在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但所有的结果是明确可知的;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果所组成的集合称为 E 的样本空间,常记为 Ω.Ω 中的元素即 E 的每一个结果称为样本点,常记为 ω,于是有 $\omega\in\Omega$.

3. 随机事件

样本空间的子集,即试验的满足某些条件的可能结果称为随机事件,简称事件,常用大写英文字母 A、B、C 等表示,有时用$\{\cdots\cdots\}$表示事件,大括号中用文字或式子描述事件的内容.在每次试验中,当且仅当事件中的一个样本点出现时,称这个事件发生.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件；由多于一个样本点组成的集合称为复合事件.

显然，Ω 和空集 $\varnothing$ 都是 Ω 的子集，从而也是事件，它们分别称为必然事件——每次试验中一定发生的事件，不可能事件——每次试验中一定不发生的事件.

二、事件的关系及其运算

1. 事件的关系和运算

(1) 四种关系

关系	符号	概率论的定义	集合论的含义
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必然导致 B 发生	A 是 B 的子集
相等	$A=B$	$A\subset B$ 且 $B\subset A$	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	A 不发生所构成的事件	A 的补集
互不相容(或互斥)	$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不能同时发生	A 与 B 没有公共元素

(2) 三种运算

运算	符号	概率论的定义	集合论的定义
事件的并(或和)	$A\cup B$ (或 $A+B$) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件 A 与 B 至少一个发生 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少一个发生	A 与 B 的并集 $A_1,\cdots,A_n$ 的并集
事件的交(或积)	$A\cap B$ (或 AB) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件 A 与 B 同时发生 事件 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生	A 与 B 的交集 $A_1,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$ 或($A\overline{B}$)	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集

(3) 事件的运算律

① 交换律

$$A\cup B=B\cup A;\quad A\cap B=B\cap A.$$

② 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

③ 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

④ 德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k;\quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n;$$
$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k;\quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

⑤ 吸收律　$A \cap (A \cup B) = A$;　$A \cup (A \cap B) = A$.

⑥ 双重否定律　$\overline{\overline{A}} = A$.

三、事件的概率及其性质

概率是事件发生的可能性大小的定量描述，是事件的本质特征，它客观存在，我们常用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率.

1. 概率的统计定义

在相同条件下，独立重复进行 n 次试验，则事件 A 在 n 次试验中发生的次数称为 A 发生的频数，记为 m. 比值 $f_n(A) = \dfrac{m}{n}$ 称为 A 发生的频率，当试验次数 n 增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出某种稳定性，即它在某一常数 p 附近波动，且 n 越大，波动的幅度越小，则称 p 为事件 A 发生的概率. 显然，p 固然存在，但实际上无法精确确定它，于是用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值，这个猜测在概率论的进一步学习中会得到证明. 描述随机事件发生可能性的大小，介于 0 与 1 之间的数叫做随机事件 A 的概率.

2. 概率的古典定义

若试验 E 的样本空间 Ω 只包含有限个样本点，即有限个基本事件，且每个样本点出现的可能性相同，则称试验 E 为古典概型. 此时，事件 $A \subset \Omega$ 的概率定义为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}},$$

上式计算出的概率称为古典概率.

3. 概率的几何定义

若试验 E 的样本空间 Ω 为几何空间中的一个区域(这个区域可以是一维、二

维、三维，甚至 n 维的)，且 Ω 中每个样本点，即基本事件出现的可能性相同(即样本点落入一个可度量的区域的可能性大小与它的几何测度成正比，而与位置和形状无关)，则称试验 E 为几何概型，此时，事件 $A\subset\Omega$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量(长度、面积或体积)}}{\Omega\text{ 的度量(长度、面积或体积)}},$$

上式计算出的概率称为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对 E 的任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：对任意两两互不相容的事件列：$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的基本性质

(1) 对于不可能事件 $\varnothing$，$P(\varnothing)=0$；对于必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$.

(2) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(5) 广义加法公式(多除少补原理)：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),$$

特别有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

(6) 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，当 $B\subset A$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(B)\leqslant P(A)$.

四、条件概率与乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式

1. 条件概率

设A、B为任意两个事件，若$P(A)>0$，称在已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率为条件概率，记为$P(B\mid A)$，并定义

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

容易验证，条件概率$P(\cdot\mid A)$满足概率公理化定义中的三个条件，因此条件概率也是一种概率，概率的一切性质和重要结果都适用于条件概率. 例如

$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A),$$

$$P(B_1\cup B_2\mid A)=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)-P(B_1B_2\mid A).$$

2. 乘法公式

如果$P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

对于$n(n\geqslant 2)$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

如果事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$是一个完备事件组，即$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，且$P(A_i)>0(1\leqslant i\leqslant n)$，则对任一事件$B$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

4. 贝叶斯(Bayes)公式(逆概率公式)

如果事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$是一个完备事件组，且$P(A_i)>0(1\leqslant i\leqslant n)$，则对任一事件$B$，只要$P(B)>0$，有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)},1\leqslant i\leqslant n.$$

五、事件独立性与独立试验序列

1. 事件的独立性

(1) 对于两个事件A，B，如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B 相互独立.

(2) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意两个事件相互独立，即对 $\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$,均有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意 k 个事件($2\leqslant k\leqslant n$)：A_{i_1}，$A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ 均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(4) 对于事件序列$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$，如果对任意正整数$n(n\geqslant 2)$，事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则称事件序列$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立.

2. 独立事件的性质

(1) 若 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i).$$

3. 试验的独立性

(1) 如果试验 E_1 和 E_2 分别产生的任意两个事件 A_1 与 A_2 都相互独立，则称试验 E_1 和 E_2 相互独立，其直观含义是一个试验结果的发生不影响另一个试验结果发生的概率.

(2) 对于n个试验$E_1,E_2,\cdots,E_n$，如果它们分别产生的事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$都相互独立，则称 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相互独立.

4. 伯努利(Bernoulli) 概型

(1) 伯努利概型：假设每次试验只有两个对立的结果，即 A(成功) 和 $\overline{A}$(失败) 的试验称为伯努利概型或伯努利试验，将这样一个伯努利试验独立重复进行n次就称为一个n重(次) 伯努利试验或n重伯努利概型，有时也简称为伯努利概型. 在这里，“独立”是指试验之间相互独立，“重复”是指每次试验中 A 发生的