高等学校教材配套教辅 7

线性代数与空间解析几何疑难解答

XIAN XING DAI SHU YU KONG JIAN JIE XI JI HE YI NAN JIE DA

主编 王春程 杨枫林 蒋卫华

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数与空间解析几何疑难解答

XIAN XING DAI SHU YU KONG JIAN JIE XI JI HE YI NAN JIE DA

主　编　王春程　杨枫林　蒋卫华
编委会　王忠英　王春程　边　伟
　　　　李祝春　杨枫林　孟晨辉
　　　　郑宝东　徐　阳　郭　潇
　　　　蒋卫华

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为线性代数与空间解析几何的参考书，其内容包含行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵、二次型的主要知识点与相关习题，并附有近八年考研真题。

本书适用于理工科大学本科生阅读参考，并可供考研学生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何疑难解答/王春程，杨枫林，蒋卫华主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.10

ISBN 978－7－5603－5627－3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… ②杨… ③蒋… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料 ②立体几何－解析几何－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O151.2 ②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 229992 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨久利印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 14.25 字数 282 千字
版　　次 2015 年 10 月第 1 版 2015 年 10 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－5627－3
定　　价 20.00 元

目录

第一章　行列式 …… 1
第二章　矩阵 …… 33
第三章　向量 …… 59
第四章　线性方程组 …… 83
第五章　相似矩阵 …… 109
第六章　二次型 …… 135
2008～2015 **年代数考研试题详解** …… 179
2008 年 …… 181
2009 年 …… 188
2010 年 …… 194
2011 年 …… 199
2012 年 …… 205
2013 年 …… 210
2014 年 …… 214
2015 年 …… 219

第 一 章

行列式

第一课

[illegible]

行列式起源于对线性方程组的研究，后来被广泛应用于线性代数以及其他数学分支中，成为一个重要的工具. 行列式的计算是一个重要的问题，也是一个很麻烦的问题. 在行列式计算中，行列式的性质起着十分重要的作用.

一、基本内容及基本方法提要

1. n 阶行列式的定义

2. n 阶行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，那么这个行列式等于两个行列式的和，例如

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j}+a'_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j}+a'_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj}+a'_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & a'_{1j} & \cdots \\ \cdots & a'_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a'_{nj} & \cdots \end{vmatrix}$$

(5) 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

(6) 行列式中任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式.

(7) 行列式中任一行(列)中各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

3. 几种特殊类型行列式

直接利用行列式的定义即可得到下面几类行列式的值.

(1) 一阶行列式

$$D=|\ a\ |=a$$

(2) 二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(3) 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(4) 对角行列式

心得 体会 拓广 疑问

$$D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

(5) 上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

其中 $*$ 表示该位置的元素是任意的.

结合行列式的性质,还可得到下面几个行列式的计算公式.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & 0 & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & 0 & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & 0 & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}a_{i,n-i+1}$$

4. 行列式乘法公式

设 $D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$.

记 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, $D=\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}$.

则 $D=D_1D_2$.

5. 行列式的计算

行列式计算是本章的主要内容. 行列式的性质是行列式计算(证明)

年 月 日

的重要依据.计算行列式时常常利用行列式的性质、公式和定理,将其化为特殊行列式,有时还需用到递推法、升阶法、分拆法等技巧.

6.行列式的应用(克莱姆(Cramer)法则)

(1)推导克莱姆法则.

(2)利用克莱姆法则解方程组.

在以后几章中,还将利用行列式讨论方阵的逆,求矩阵的秩,求方阵的特征多项式及特征值等.

心得 体会 拓广 疑问

二、复习题及基础

1 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2-x&1&\cdots&1\\1&1&3-x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&n-x\end{vmatrix}$$

解

$$D_n\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1-x&0&\cdots&0\\0&0&2-x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1-x\end{vmatrix}=$$

$$(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)=\prod_{i=1}^{n-1}(i-x)$$

2 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}a_1&&&b_1\\&a_2&b_2&\\&b_3&a_3&\\b_4&&&a_4\end{vmatrix}$$

解法一

$$D_4=a_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&\\b_3&a_3&\\&&a_4\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}b_4\begin{vmatrix}&&b_1\\a_2&b_2&\\b_3&a_3&\end{vmatrix}=$$

$$a_1a_4\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}-b_4b_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}=$$

$$a_1a_4a_2a_3-a_1b_2b_3a_4-b_1a_2a_3b_4+b_1b_2b_3b_4=$$

$$(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解法二

$$D_4 \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_4]{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_4 & a_4 & & \\ & & a_3 & b_3 \\ & & b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$(a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$$

3 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$D_4 \xlongequal{r_1 + 1 \cdot r_i (i=2,3,4)} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + (-1)r_1 (i=2,3,4)} 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 512$$

4 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & & \\ & x_2 & \ddots & \\ & & \ddots & y_{n-1} \\ y_n & & & x_n \end{vmatrix}$$

解 行列式按第 1 列展开，有

$$D_n = x_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & y_{n-1} \\ & & & x_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y_n \begin{vmatrix} y_1 & & & \\ x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} y_i$$

5 计算

$$D_3 = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

解 $$D_3 \xlongequal{r_1 + 1 \cdot r_i (i=2,3)} \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} =$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(-x-y)r_1]{r_2+(-y)r_1}$$

$$2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x-y \\ 0 & -y & -x \end{vmatrix} =$$

$$2(x+y)(-x^2+xy-y^2) = -2(x^3+y^3)$$

6 计算

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[\substack{c_3+(-1)c_1 \\ c_2+(-1)c_1}]{c_4+(-1)c_1+(-1)c_2+(-1)c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2+(-\frac{1}{4})c_4]{c_3+(-1)c_4}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 4a & 4 \\ b^2 & 2b & 4b & 4 \\ c^2 & 2c & 4c & 4 \\ d^2 & 2d & 4d & 4 \end{vmatrix} = 0$$

7 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal{c_1+1\cdot c_i(i=2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} =$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,\cdots,n)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n-1}a^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$$

8 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 2x_1^2-1 & 2x_2^2-1 & 2x_3^2-1 & 2x_4^2-1\\ 4x_1^3-3x_1 & 4x_2^3-3x_2 & 4x_3^3-3x_3 & 4x_4^3-3x_4\end{vmatrix}$$

解

$$D_4\xlongequal[r_4+3\cdot r_2]{r_3+1\cdot r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 2x_1^2 & 2x_2^2 & 2x_3^2 & 2x_4^2\\ 4x_1^3 & 4x_2^3 & 4x_3^3 & 4x_4^3\end{vmatrix}=8\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)$$

9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

解

$$D_n\xlongequal{r_i+r_1(i=2,3,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

10 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & b_1 & & & \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & & \\ & -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & -1 & 1-b_n\end{vmatrix}$$

解

$$D_{n+1}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & b_1 & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & \\ & -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & -1 & 1-b_n\end{vmatrix}\xlongequal[r_n+r_{n-1}]{r_3+r_2,\ \cdots}\begin{vmatrix}1 & b_1 & & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & & \\ & 0 & 1 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

11 计算

$$D_5=\begin{vmatrix}1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x\end{vmatrix}$$

解 按第一行展开

$$D_5=(1-x)D_4-x\begin{vmatrix}-1 & x & & \\ 0 & 1-x & x & \\ & -1 & 1-x & x \\ & & -1 & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)D_4+xD_3$$

得到递推公式

$$D_5-D_4=-x(D_4-D_3)=\cdots=-x^3(D_2-D_1)$$

由于 $D_2=\begin{vmatrix}1-x & x \\ -1 & 1-x\end{vmatrix}=1-x+x^2, D_1=1-x$

于是得

$$\begin{cases}D_5-D_4=-x^5 \\ D_4-D_3=x^4 \\ D_3-D_2=-x^3\end{cases}$$

容易推出

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$D_5 = -x^5 + x^4 - x^3 + D_2 = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

12 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

证　令

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} -$$

$$b_1 \begin{vmatrix} c_1 & b_2 & & & \\ & a_3 & \ddots & & \\ & c_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} - b_1c_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & & \\ c_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} =$$

$$a_1D_{n-1} - b_1c_1D_{n-2}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2c_2 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix} - b_1c_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3c_3 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix} =$$

$$a_1B_{n-1} - b_1c_1B_{n-2}$$

当 $n=1$ 时，$D_1 = B_1 = a_1$；

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - b_1c_1$，$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - b_1c_1$，结论成立.

假设 $n \leqslant k$ 时，$D_n = B_n$，往证 $n = k+1$，$D_{k+1} = B_{k+1}$ 时也成立

$$D_{k+1} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_k \\ & & c_k & a_{k+1} \end{vmatrix} - b_1c_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & & \\ c_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_k \\ & & c_k & a_{k+1} \end{vmatrix} =$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$a_1D_k-b_1c_1D_{k-1}$$

$$B_{k+1}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2c_2 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_kc_k \\ & & 1 & a_{k+1}\end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3c_3 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_kc_k \\ & & 1 & a_{k+1}\end{vmatrix}=$$

$$a_1B_k-b_1c_1B_{k-1}$$

所以 $$D_{k+1}=B_{k+1}$$

由数学归纳法结论成立.

13 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5\end{vmatrix}$$

解 由 $D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}$,有

$$D_n-3D_{n-1}=2(D_{n-1}-3D_{n-2})=\cdots=$$
$$2^{n-3}(D_3-3D_2)=2^{n-2}(D_2-3D_1)=2^n$$

所以

$$D_n-3D_{n-1}=2^n$$
$$D_{n-1}-3D_{n-2}=2^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$D_3-3D_2=2^3$$
$$D_2-3D_1=2^2$$

容易得到

$$D_n=2^n+3\cdot 2^{n-1}+\cdots+3^{n-3}\cdot 2^3+3^{n-2}\cdot 2^2+3^{n-1}\cdot D_1$$

于是

$$D_n=2^n+3\cdot 2^{n-1}+\cdots+3^{n-3}\cdot 2^3+3^{n-2}\cdot 2^2+3^{n-1}\cdot 2+3^n=$$
$$3^{n+1}-2^{n+1}$$

14 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n\end{vmatrix}\quad (x_i\neq a, i=1,2,\cdots,n)$$

解法一

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a-x_1 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+\frac{-a}{x_i-a}r_i(i=2,\cdots,n)}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} x_1-(a-x_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{a}{x_i-a} & 0 & \cdots & 0 \\ a-x_1 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=$$

$$(x_2-a)\cdots(x_n-a)[x_1-a(a-x_1)(\frac{1}{x_2-a}+\cdots+\frac{1}{x_n-a})]=$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})$$

解法二

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,\cdots,n+1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+(\frac{1}{x_i-a})c_{i+1}(i=1,\cdots,n)}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=$$

$$(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

15 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -a & \cdots & \cdots & -a \\ a & x & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & x & -a \\ a & \cdots & \cdots & a & -a \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal{c_i+1\cdot c_n(i=1,2,\cdots,n-1)}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} x-a & -2a & -2a & \cdots & -a \\ 0 & x-a & -2a & \cdots & -a \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix} =$$

$$-a(x-a)^{n-1}$$

16 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

解 有

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} =$$

$$c\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + (a-c)\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix} =$$

$$c(a-b)^{n-1} + (a-c)D_{n-1} \tag{1}$$

又

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a-b \end{vmatrix} =$$

$$b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \tag{2}$$

由 $(a-b)\times(1)-(a-c)\times(2)$，得

$$(c-b)D_n = c(a-b)^n - b(a-c)^n$$

$$D_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} \quad (c \neq b)$$

而 $c=b$ 时

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$$

年 月 日