考研数学历年真题及详解

1995～2005

易过

2006年 考研系列

- 把握命题规律与趋势
- 归纳核心考点和难点
- 查漏补缺，有的放矢推进复习
- 提高速度，熟练运用解答技巧

新大纲 新题型

【数学二】

主编 黄庆怀

中国社会出版社

考研数学历年真题

数 学 二

（1995～2005）

主 编 黄庆怀

中 国 社 会 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题及详解·数学二/黄庆怀主编.—北京:
中国社会出版社,2005.4
(考研数学历年真题及详解)
ISBN 7-5087-0470-3

Ⅰ.考... Ⅱ.黄... Ⅲ.高等数学-研究生-入学
考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028360 号

从 书 名:考研数学历年真题及详解
书 名:考研数学历年真题及详解·数学二
主 编:黄庆怀
责任编辑:杨 晖 张国洪

出版发行:中国社会出版社 **邮政编码**:100032
通联发行:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
电话:88516087 传真:66016392
欢迎读者拨打免费热线 8008108114 **或登录** www.bj114.com.cn **查询相关信息**
经 销:各地新华书店

印刷装订:香河新华印刷有限公司
开 本:787×1092 毫米 1/16
印 张:11.625
字 数:280 千字
版 次:2005 年 4 月第 1 版
印 次:2005 年 4 月第 1 次

书 号:ISBN 7-5087-0470-3/O·10
定 价:70.80 元(全四册)

前　　言

本套丛书共有四册，分别为《考研数学历年真题及详解·数学一》、《考研数学历年真题及详解·数学二》、《考研数学历年真题及详解·数学三》、《考研数学历年真题及详解·数学四》，丛书以最新考试大纲为基础，并结合名校名师多年考研试题研究的经验和考研高分学生的心得编著而成。

每本书均按照时间顺序成套题形式编排，收集了1995年到2005年11套全国硕士研究生入学考试数学试卷，每套试卷由三部分内容组成：第一部分是真题，第二部分是详细答案，第三部分是解析。答案部分不仅给出了试卷评分的标准答案，有些题还列出了多种不同的解法，以扩展考生的解题思路，解析部分对每道真题进行了精辟的解说，不仅对每题所考知识点和难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳和总结。

本书主要具有如下特点：

（1）解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解答。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

（2）难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有作为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书在解析部分都进行了总结和分析。

需要特别说明的是：

历年考研试卷的每道题都是一道珍贵的典型例题，读者应该把每一道题认真地看懂、研读，要做到举一反三，融会贯通；对于在解题过程中出现的问题和错误，更要下大工夫弄明白，只有这样，才有可能考研中取得好成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多得的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不甚感激。

编　者

2005年4月

目　录

1995 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题

一、填空题(本题 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$,则 $y' =$ ________.

(2) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为________.

(3) 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}\right) =$ ________.

(5) 曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为________.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x) \neq 0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

【　】

(2) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x - \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

【　】

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导,且对任意 x_1, x_2,当 $x_1 > x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,则

(A) 对任意 x,$f'(x) > 0$.　　(B) 对任意 x,$f'(-x) \leqslant 0$.

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$,则 $f'(1)$、$f'(0)$、$f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$.　　(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

(C)$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　　　　　　(D)$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

【　　】

(5) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有

(A)$f(0)=0$.　　　　　　(B)$f'(0)=0$.

(C)$f(0)+f'(0)=0$.　　　　　　(D)$f(0)-f'(0)=0$.

【　　】

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 求摆线 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的孤长.

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1)，问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 8 分)

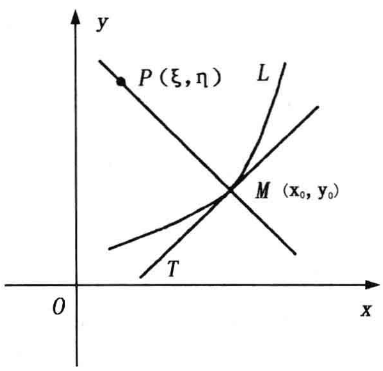
求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 8 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\Big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

六、(本题满分 8 分)

如图，设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，且 $y''>0$. 又 MT、MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为 $\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$(其中 $y_0'=y'(x_0)$，$y_0''=y''(x_0)$)，试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.



七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

八、(本题满分 8 分)

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)\geqslant x$.

1995年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题详解及评析

一、填空题

(1) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$,则 $y' = \underline{-2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos(x^2)}$.

[详解] $y' = [\cos(x^2)]'\sin^2\frac{1}{x} + \cos(x^2)\cdot(\sin^2\frac{1}{x})'$

$$= -2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos(x^2).$$

[评析] 直接按照复合函数求导法则求导即可.

(2) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $\underline{y = -2x + C_1\cos x + C_2\sin x}$.

[详解] 相应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$,其根为 $\lambda_1 = \mathrm{i}, \lambda_2 = -\mathrm{i}$,

由于非齐次项为 $-2x$,$\lambda = 0$ 不是特征根,可设非齐次方程的特解为 $y^* = A + Bx$,代入原方程解,得 $A = 0, B = -2$,因此通解为

$$y = -2x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

[评析] 对于线性方程的求解问题,只需利用非齐次方程的求解方法,再按特征方程法和待定系数法求解即可.

(3) 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为 $\underline{3x - y - 7 = 0}$.

[详解] 当 $t = 2$ 时,$x_0 = 5, y_0 = 8$,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3}{2}t, \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2} = 3,$$

可知过曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 上对应于 $t = 2$ 的切线斜率为3,切点为点(5,8).

因此切线方程为

$$y - 8 = 3(x - 5) \text{ 或 } 3x - y - 7 = 0.$$

[评析] 本题考查参数方程求导和导数的几何意义,直接按照参数方程求导得出切线斜率,再代入点斜式即可.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$.

［详解］　利用夹逼定理，由

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$

知 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} = \frac{i}{n^2+n+i} = \frac{1}{2}.$$

［评析］　对于几项求和的数列极限问题，一般考虑用夹逼定理或定积分定义计算.

夹逼定理为：设在 x_0 邻域内（x_0 除外），有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

(5) 曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为 $\underline{\quad y = 0\quad}$.

［详解］　由于 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$，

所以，$y = 0$ 为水平渐近线.

［评析］　直接用渐近线的定义讨论相关的极限即可，渐近线有三种：

① 若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = C$（$C$ 为常数且存在），

则直线 $y = C$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

② 若 $\lim\limits_{\substack{x\to+a \\ (x\to-a)}} f(x) = \infty$（$a$ 为常数），

则直线 $x = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直（垂直）渐近线.

③ 若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$ （a 为常数），

则 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) - ax = b$（$b$ 为常数）.

二、选择题

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

【　　】

［答］　应选(D).

［详解］　方法一（用反证法）：

若$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$无间断点,即连续,则

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \varphi(x)$$

也连续,与已知条件矛盾,所以$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.(A)、(B)、(C)均可举反例说明不成立.

方法二:

取 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 1, \end{cases} f(x) = x^4 + 1$,则 $f(x),\varphi(x)$ 符合要求,而 $\varphi[f(x)] = 1$,$\varphi^2(x) = 1, f[\varphi(x)] = 2$ 均无间断点,故排除(A),(B),(C),应选(D).

[评析] 对于此题考查的复合函数的连续性,直接利用分析法或举反例排除法均可求出.

(2) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x - \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

【　】

[答] 应选(C).

[详解] 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴的交点为 $x = 0, x = 1, x = 2$,因此该曲线与 x 轴所围图形的面积可表示为

$$\int_0^2 |x(x-1)(2-x)|\mathrm{d}x = -\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x.$$

[评析] 直接可利用定积分的几何意义求得,即求出曲线与 x 轴的交点,确定哪一段是位于 x 轴上方,哪一段是位于 x 轴下方,从而可得出面积的表示.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导,且对任意 x_1、x_2,当 $x_1 > x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,则

(A) 对任意 $x, f'(x) > 0$.

(B) 对任意 $x, f'(-x) \leqslant 0$.

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加.

(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

【　】

[答] 应选(D).

[详解] 因为对任意 x_1、x_2,当 $x_1 > x_2$ 时,$-x_1 < -x_2$,则有 $f(-x_1) < f(-x_2)$,即 $-f(-x_1) > -f(-x_2)$,故 $-f(-x)$ 是单调增加的.

[评析] 主要运用单调性与导数的关系来求解.但应注意,(A)项的结论只是$f(x)$单调增加的充分条件而非必要条件;B项的结论也是不对的,因题设$f(x)$严格单增,可知$f(-x)$严格单减,而$f(x)$可导,这就知$[f(-x)]'\leqslant 0$,即$f'(-x)(-1)\leqslant 0$,即$f'(-x)\geqslant 0$.这两个选项是最容易错选的,故应特别注意(在求解时).

(4) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上$f''(x)>0$,则$f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序是

(A)$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$. (B)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C)$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$. (D)$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

【 】

[答] 应选(B).

[详解] 由题设$f''(x)>0$,所以$f'(x)$单调增加,即

$$f'(0)<f'(x)<f'(1)\quad (x\in(0,1)),$$

又 $f(1)-f(0)=f'(\xi),\xi\in(0,1)$,

于是有

$$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1).$$

可见应选(B).

[评析] 直接运用$u'>0$时,u必严格增的结论来判断.

但一般情况下,$f^{(n)}(x)>0$(或<0)$\Rightarrow f^{(n-1)}(x)$单调增或减,而微分学中值定理是讨论函数两点值的差与导数的关系常用的工具.

(5) 设$f(x)$可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$.若使$F(x)$在$x=0$处可导,则必有

(A)$f(0)=0$. (B)$f'(0)=0$.

(C)$f(0)+f'(0)=0$. (D)$f(0)-f'(0)=0$.

【 】

[答] 应选(A).

[详解]

因 $$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\sin x}{x}\cdot f(x)\right]=f'(0)-f(0),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x-f(0)}{x}=f'(0)+f(0).$$

要使$F'(0)$存在,必有$F'_-(0)=F'_+(0)$,即$f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$,

从而有$f(0)=0$.

[评析] 对于函数表达式中含有绝对值,应作为分段函数来处理,对于本题,先分别求左导数和右导数,再应用可导的充要条件来判断是其左、右导数相等即可.

三、(1) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

[详解]　原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

[评析]　本题可用两种方法解答:一种是直接用洛必达法则;另一种是用等价无穷小代换,因为表达式含有根式,所以应先有理化,然后利用等价无穷小代换即可.

熟记以下等价无穷小关系:

① $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

② $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

③ $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

④ $a^x-1\sim x\ln a(a>0$,且 $a\neq1)$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq1$,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

[详解]　方法一:

方程两边取自然对数,得

$$\ln x+f(y)=y,$$

对 x 求导,得

$$\frac{1}{x}+f'(y)\cdot y'=y',$$

从而 $y'=\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}$,

故　$y''=-\dfrac{1-f'(y)-xf''(y)y'}{x^2[1-f'(y)]^2}=-\dfrac{(1-f'(y))^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

方法二:

在等式 $xe^{f(y)}=e^y$ 两边对 x 求导,得

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)y'=e^yy',$$

从而 $y'=\dfrac{e^{f(y)}}{e^y-xe^{f(y)}f'(y)}=\dfrac{e^{f(y)}}{xe^{f(y)}[1-f'(y)]}=\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}$,

y'' 的求法同方法一.

[评析]　直接应用隐函数求导的法则先求一阶导数,再求二阶导数,另外,本题可先取对数再求导,这也是一种求解方法.

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\int\varphi(x)dx$.

[详解]　由于 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$,

故　$f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

又 $f[\varphi(x)] = \ln \dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$,

从而$\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$,即 $\varphi(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

于是$\displaystyle\int \varphi(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x = 2\ln(x-1) + x + C$.

[评析] 本题难度不是很大,只要掌握有关的函数的概念和简单的不定积分,便可求出.对于本题,首先应利用函数关系与自变量的表示符合无关,来求出 $f(x)$ 的表达式,从而解出 $f[\varphi(x)]$,再解出 $\varphi(x)$,然后求$\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

[详解] 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4},$$

而 $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x} = \frac{\pi}{2},$$

又 $$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

[评析] 利用导数的定义和求导数的法则,分别求出 $x=0$ 和 $x\neq 0$ 时的导数,再求 $f'(0-)$ 与 $f'(0+)$,然后讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 可导,直接求导得 $f'(x)$,并求出$\lim\limits_{x\to 0} f'(0)$,再根据导数的定义求 $f'(0)$,来检验$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ 是否成立即可.

(5) 求摆线$\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的弧长.

[详解] 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

从而 $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 8$.

[评析] 应用弧长公式直接化为定积分计算即可.

弧长公式:$S = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

其中,$a = 0, b = 2\pi$

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动,初速度 $v|_{t=0} = v_0$.已知阻力与速度成正比(比例

常数为 1)，问 t 为多少时此质点的速度为$\frac{v_0}{3}$?并求到此时刻该质点所经过的路程.

［详解］ 设质点的运动速度为 $v(t)$，由题设，阻力

$$f = m\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v'(t),$$

而 $f = -v(t)$，即有

$$\begin{cases} v'(t) + v(t) = 0 \\ v\big|_{t=0} = v_0 \end{cases},$$

解此方程，得

$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-t},$$

由$\frac{v_0}{3} = v_0 \mathrm{e}^{-t}$，得 $t = \ln 3$.

所以，从 $t = 0$ 到 $t = \ln 3$，该质点所经过的路程为

$$S = \int_0^{\ln 3} v_0 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \frac{2}{3}v_0.$$

［评析］ 对于像本题这种由物理问题建立微分方程的题型，应结合题意，由牛顿第二定理建立关于速度的微分方程，而建立的方程是一阶线性齐次方程或称变量可分离的微分方程，应先求通解再求特解.

四、求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2 - t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

［详解］ 由题知

$$f'(x) = 2x(2 - x^2)\mathrm{e}^{-x^2},$$

令 $f'(x) = 0$，知 $f(x)$ 在区间$(0, +\infty)$内有惟一的驻点 $x = \sqrt{2}$.

当 $0 < x < \sqrt{2}$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > \sqrt{2}$，$f'(x) < 0$.

所以 $x = \sqrt{2}$ 是极大值点，由极值点惟一知，这也是最大值点，最大值为

$$f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2 - t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -(2 - t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{-2}.$$

因为$\int_0^{+\infty} (2 - t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -(2 - t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1$，以及 $f(0) = 0$，

故 $x = 0$ 是最小值点.

所以 $f(x)$ 的最小值为 0.

［评析］ 对于这种变限积分求导、求函数最值和广义积分的综合题，直接应用变限定积分的求导公式，求 $f'(x)$，再分区间讨论 $f'(x)$ 的符号，从而求出 $f(x)$ 的最值.

五、设 $y = \mathrm{e}^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

［详解］ 把 $y = \mathrm{e}^x$ 代入原方程，得

$$p(x) = x\mathrm{e}^{-x} - x,$$

代入原方程,得

$$xy' + (xe^{-x} - x)y = x,$$

化为标准形式

$$y' + (e^{-x} - 1)y = 1,$$

此为一阶线性微分方程,其通解为

$$y = e^{-\int(e^{-x}-1)dx}\left[\int e^{\int(e^{-x}-1)dx}dx + C\right] = e^x + Ce^{x+e^{-x}}.$$

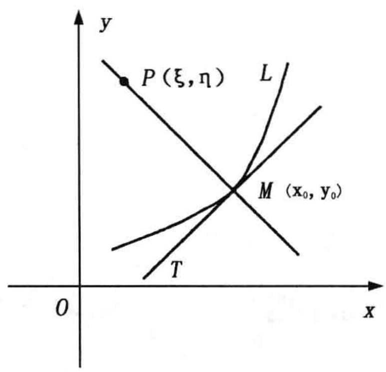
由 $y\Big|_{x=\ln 2} = 0$,得 $C = -e^{-\frac{1}{2}}$.

故所求特解为

$$y^* = e^x - e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

[评析] 本题主要是考查微分方程的概念和求解方法,直接把特解 $y = e^x$ 代入原方程求出 $p(x)$,再根据公式求出一般解及满足初始条件的特解.

六、如图,设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$,且 $y'' > 0$. 又 MT、MP 分别为该曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$(其中 $y'_0 = y'(x_0)$, $y''_0 = y''(x_0)$),试推导出点 $P(\xi, \eta)$ 的坐标表达式.



[详解] 由题设得

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 = \frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}, \text{①}$$

又 $PM \perp MT$,所以

$$y'_0 = -\frac{x_0 - \xi}{y_0 - \eta}. \qquad \text{②}$$

由 ①、②,解得

$$(y_0 - \eta)^2 = \frac{(1+y_0'^2)^2}{(y''_0)^2}.$$

由于 $y'' > 0$,曲线 L 是凹的,故 $y_0 - \eta < 0$,从而

$$y_0 - \eta = -\frac{1+y_0'^2}{y''_0}.$$

又 $\quad x_0 - \xi = -y'_0(y_0 - \eta) = \frac{y'_0(1+y_0'^2)}{y''_0},$

于是得

$$\begin{cases} \xi = x_0 - \dfrac{y'_0(1+y_0'^2)}{y''_0}, \\ \eta = y_0 + \dfrac{1+y_0'^2}{y''_0}. \end{cases}$$

[评析]　对于本题而言,题中的$\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$实际上是曲线在 M 点的曲率半径,所以可以把本题转化为求曲率中心 P 的坐标问题.

但应注意,若按题意,则要用 x_0, y_0 和 y_0', y_0'' 等表示 P 点的坐标,而且必须列出两个关于未知量 ξ, η 的方程.

七、设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,计算$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

[详解]　用分部积分法.

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t - \int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2.$$

[评析]　应注意这里积分$\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$积不出来,如果先要求出函数 $f(x)$ 是行不通的,因此,可用分部积分法求解,因为 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.本题也可以用交换二次积分的次序来求解,但要对二重积分特别熟悉即可.

八、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$,证明 $f(x)\geqslant x$.

[详解]　方法一:

由题设知 $f(0)=0, f'(0)=1$.

令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(0)=0$,

由于 $F'(x)=f'(x)-1$,所以 $F'(0)=0$,

又由 $F''(x)=f''(x)>0$,知 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的极小值,$F''(x)$ 单调,故 $F(x)$ 只有一个驻点,从而 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的最小值,因此 $F(x)\geqslant F(0)=0$,即 $f(x)\geqslant x$.

方法二:

用泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{x^2}{2}f''(\xi) = x+\frac{x^2}{2}f''(\xi) \quad (\xi\text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

因为 $f''(\xi)>0$,所以 $f(x)\geqslant x$.

方法三:

由于 $f''(x)>0$,故 $f'(x)$ 单调增加,且

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi), \xi\in(0,x).$$

由条件知

$$f(0)=0, f'(0)=1,$$

故　$f(x)=xf'(\xi)$.

若 $x>0, \xi\in(0,x) f'(\xi)>f'(0)>1$,

因此 $f(x)=xf'(\xi)>x$.

同理 $x \leqslant 0$ 时，$f(x) > x$.

[评析] 在解答此题的过程中，应注意隐含条件 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ 的应用，然后，再利用极值、最值、中值定理及泰勒公式证明不等式即可.