BO CONG SHI LUN
博士论丛

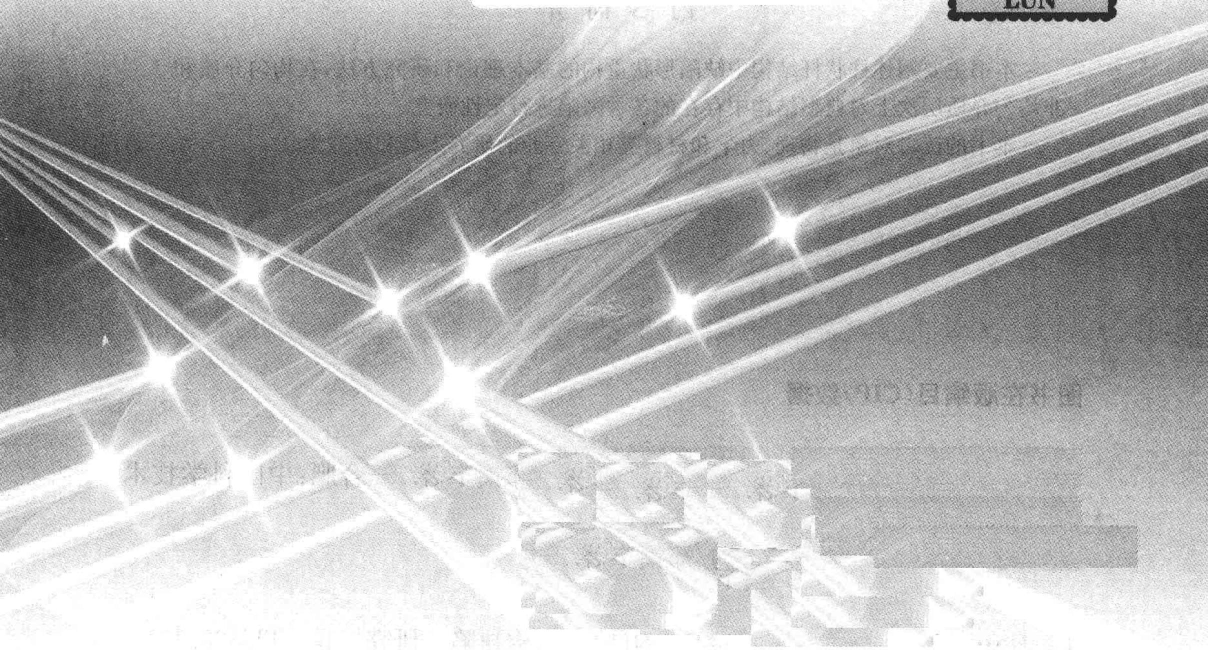
Inverse Scattering Theory and Shape Reconstruction of the Flaws in the Cylindrical Rod Structures

柱状杆结构中的
逆散射理论与缺陷形状重构

郑钢丰 著

中国科学技术大学出版社

博士论丛



Inverse Scattering Theory and Shape Reconstruction of the Flaws in the Cylindrical Rod Structures

柱状杆结构中的逆散射理论与缺陷形状重构

郑钢丰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书主要阐述柱状杆结构中缺陷形状重构的基本理论和研究方法，在均匀介质和非均匀介质层次上对典型结构中存在的各种缺陷进行定性研究.

本书的读者对象是物理、力学和材料类相关专业的研究人员和研究生.

图书在版编目(CIP)数据

柱状杆结构中的逆散射理论与缺陷形状重构/郑钢丰著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2011.9

ISBN 978-7-312-02908-0

Ⅰ. 柱…　Ⅱ. 郑…　Ⅲ. 柱(结构构件)—结构缺陷—研究　Ⅳ. TU323.101

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 184187 号

出版　中国科学技术大学出版社

地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

印刷　安徽省瑞隆印务有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　710 mm×1000 mm　1/16

印张　12.25

字数　240 千

版次　2011 年 9 月第 1 版

印次　2011 年 9 月第 1 次印刷

定价　30.00 元

前　　言

无损检测由于是在不损坏被检物的结构和使用性能的情况下，利用声、光、热、电、磁和射线等方法来揭示其内部或表面存在的缺陷，以期提高被检物的内在质量和使用时的可靠性，因而近年来引起人们的广泛关注.

众所周知，典型结构，如杆、板、管等，在复杂的服役环境中(如飞机、航天器、高层建筑、海洋平台、新型桥梁、网架结构等)将受到设计载荷的作用以及各种突发性外在因素的影响而面临结构缺陷损伤程度积累的问题，这些缺陷损伤程度的积累势必会导致结构发生破坏或使用性能降低. 因此，为保证结构的安全，需要建立探测结构缺陷的方法，尽早地探测结构缺陷的出现和发生缺陷的位置以及缺陷的程度(形状、大小等)，从而对结构实时进行修复，以避免灾难性事故的发生. 最近二十多年来，利用非破坏性方法来检测结构是否存在缺陷，并对缺陷进行定位与评估已成为国内外学术界、工程界非常关注而且研究活跃的领域.

目前，关于无损检测的论著很多，但还极少见到有关缺陷形状重构方面的专著. 为此，作者根据多年从事缺陷形状重构的研究成果，以及近年来在这一领域所发表的相关论文，编著了本书. 全书共分 7 章，第 0 章简要介绍阅读本书必备的张量分析基础知识. 第 1 章概述结构中缺陷形状识别的反演方法. 第 2 章简要介绍用形状因子与特征函数的关系对结构中的缺陷形状进行重构. 第 3 章分别对 Born 近似和 Kirchhoff 近似的反演理论进行研究. 第 4 章讨论波在非均匀介质中的传播理论以及非均匀介质中的缺陷形状重构理论. 第 5 章介绍结构中缺陷形状重构的有限元模拟过程及结果. 第 6 章利用实验研究的方法，对均匀介质、非均匀介质中的缺陷形状进行重构，从而验证了缺陷散射理论的正确性.

本书的主要内容均是作者多年来在此领域内悉心研究的课题. 在国家自然科学基金项目(No. 10872001)、教育部重点研究项目(No. 211076)及安徽省优秀青年科技基金项目(No. 10040606Y26)的支持下,作者在柱状杆结构中缺陷形状重构方面进行了理论、实验和数值模拟方面的研究工作. 今天有机会把这些研究成果和研究体会汇集起来,以学术专著的形式呈现给同行和读者,作者要衷心感谢国家自然科学基金委员会、教育部科学技术司和安徽省科技厅对研究工作的长期支持. 同时,作者还要感谢那些在书中被引用的专著和相关文献的作者,感谢我的学生在本书编写过程中所给予的帮助.

由于作者水平有限,书中不足之处,恳请同行和读者批评指正.

郑钢丰
2011 年 2 月

目　　录

第 0 章　预备知识 —— 张量分析基础

在力学、几何学和物理学中，有各种各样的量. 例如，温度是标量；速度、加速度以及力是矢量. 和标量相比，矢量不仅要表示出量的大小，而且要表示出方向. 还有一些更复杂的量，仅仅给出大小和方向不足以完全确定这个量. 例如，材料力学中我们用应力描述一点的应力状态时，不仅要指明该应力是在过该点的哪一个截面上，而且要指明是在该截面的法向还是切向上. 表征一点的应力状态和应变状态分别用应力张量和应变张量；在曲面几何中表征曲面的几何性质用曲率张量，等等. 张量比矢量更加复杂.

一个量是不是张量，要用一定的规则来判定. 判定的方法在本章后面会讲到.

张量的提出最早可追溯到高斯、黎曼和克里斯托夫在绝对微分几何学方面的研究工作. 1892 年，意大利数学家黎奇发表了一篇系统阐述绝对微分方法和紧凑表示方法的报告. 1901 年，黎奇和他的学生、另一位意大利数学家列维-奇维塔对张量的运算方法给出了进一步阐述. 1916 年，爱因斯坦将它命名为“张量分析”. 在此之前，张量分析看起来相当繁琐，很少得到应用. 1915 年爱因斯坦发表了广义相对论，在数学工具上黎奇的张量算法起了基本作用. 爱因斯坦从 1908 年发表狭义相对论到 1915 年发表广义相对论经历了七年时间，在谈到这个问题时他写道：“为什么还需要七年才能建立广义相对论呢?主要原因在于不那么容易从坐标必须有一个直接的尺度这一概念中解脱出来. ”可见，正是张量分析这一有力工具极好地描述了这一新的思路. 此后，张量分析对理论物理的发展起到了重要作用.

张量的英文名称为“tensor”，首先由物理学家 W. Voigt 给出. 这个名字表明它来源于弹性力学. 但是很长一段时间内它在弹性力学中却用得很少，多数情况下只是出现一下张量这个名词. 到 1960 年左右，一方面张量分析学科本身发生了明显变化，另一方面力学学科的发展需要张量分析这个有效的工具. 目前，物理、力学的书籍文献中大量使用张量分析和指标符号表示法. 正如美国普林斯顿大学爱林根教授所指出的：“今日，如果你对张量分析没有一定程度的通晓，你就不能阅读大部分文献. ”掌握张量分析这个数学工具，对力学工作者是不可或缺的.

张量的应用在某种程度上是为了把方程写得简洁、紧凑，但绝不仅仅如此. 自然规律在本质上是不依赖于坐标系的，或者说应该存在着对各种坐标系都成立的

描述物理规律的基本方程式. 而张量形式写出的方程正好具有不依赖于某一特定坐标系的特点,这种不依赖于坐标系的方程式非常有利于人们对物理本质的把握.

本章从指标符号表示法开始,主要介绍张量分析的最基本内容,包括张量代数、张量的微分和积分、正交曲线坐标系和张量场论等内容.

0.1 指标符号与求和约定

物理量按其性质可以分为三类:① **标量**:只有大小、没有方向的量. 如速率 v、温度 T、密度 ρ、时间 t 等. ② **矢量**:既有大小又有方向性的量. 矢量常用黑斜体或加箭头表示,如速度 $\boldsymbol{v}$(或 $\vec{v}$)、力 $\boldsymbol{F}$(或 $\vec{F}$)、位移 $\boldsymbol{u}$(或 $\vec{u}$)、矢径 $\boldsymbol{r}$(或 $\vec{r}$) 等等. ③ **张量**:具有多重方向性的比矢量更为复杂的物理量. 张量常用黑斜体或加下横线表示,例如应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$(或 $\underline{\sigma}$). 一般情况下,在印刷时常用黑斜体记法表示矢量或张量.

一个矢量 $\boldsymbol{u}$ 在任何参考坐标系中,其大小和方向都是不变的. 当选定参考坐标系后,可以把 $\boldsymbol{u}$ 分解. 例如,在笛卡尔坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中,$\boldsymbol{u}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i \tag{0-1}$$

式中,u_1, u_2, u_3 是 $\boldsymbol{u}$ 在三个坐标轴 x_1, x_2, x_3 上的分量,$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 分别是坐标轴 x_1, x_2, x_3 的基矢量. 可见,矢量 $\boldsymbol{u}$ 可以用实体记法记为 $\boldsymbol{u}$,也可以用分解式记法记为 $\sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i$,还可以用分量记法记为 $u_i (i = 1,2,3)$,i 称为指标符号,1,2,3 规定了指标 i 的取值范围.

采用分量记法,在 n 维空间中,一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的 n 个分量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可表示为 $a_i (i = 1,2,3,\cdots,n)$. 利用指标符号和分量记法,三维空间中一点的坐标 (x, y, z) 可表示为 $x_i (i = 1,2,3)$. $x_i = 0$ 表示矢量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量 x_1, x_2, x_3 均为零. 类似地,函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可表示为

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(\boldsymbol{x}) = f(x_i) = f(x_j)$$

进一步,引进爱因斯坦**求和约定**:如果在表达式的某项中,某指标重复地出现两次,则表示要把该项在该指标的取值范围内遍历求和. 该重复出现的指标称为**哑指标**,或简称**哑标**.

在式(0-1) 中,如果将 $\sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i$ 写成 $u_i\boldsymbol{e}_i$,则按照爱因斯坦求和约定,两者含义完全相同,亦即

$$u_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i \tag{0-2}$$

爱因斯坦求和约定也可以理解为在式(0-1) 中省略求和符号“$\sum$”,而用重复出现的指标表示求和运算,求和的范围由该重复指标(即哑标) 的取值范围规定.于是,式(0-1) 可以写成 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3=u_i\boldsymbol{e}_i$,或更为简洁地写成

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i \tag{0-3}$$

上式中,由于哑标仅代表要遍历求和,因此可以**成对地任意换标**,如

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i=u_k\boldsymbol{e}_k=u_m\boldsymbol{e}_m$$

只要指标 k,m 的取值范围与指标 i 相同即可.

矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的点积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_ib_i$$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 可以简洁地写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i$$

同样有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i=a_jb_j=a_mb_m$$

采用指标符号与求和约定,线性变换可表示为

$$\begin{cases}x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_{1j}x_j\\x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=a_{2j}x_j\\x'_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=a_{3j}x_j\end{cases} \tag{0-4}$$

进一步,三个式子可以仅用一个式子统一写成

$$x'_i=a_{ij}x_j \tag{0-5}$$

上式中,右端项中除了指标 i,还有重复指标 j,显然 j 为哑标. 左端项中只有一个不重复指标 i,i 称为**自由指标**. 将自由指标轮流取取值范围内的任何值,关系式始终成立. 由于指标 i 的取值范围为 1,2,3,所以式(0-5) 实际上表示了与式(0-4) 相同的三个方程.

在表达式或方程中,自由指标可以出现在多个项中,但不能在同一项内重复出现两次. 自由指标仅表示轮流取值,因此也可以换标. 例如,在式(0-5) 中,可以将自由指标 i 换为 k,有

$$x'_k=a_{kj}x_j$$

只要 k 和 i 取值范围相同,上式同样表示式(0-4) 中的三个方程. 也可以将自由指标和哑标同时换掉,但是应注意:

(1) 防止重名

例如,将式子$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)$用指标符号表示,可以写成

$$(a_ib_i)(c_jd_j) = a_ib_ic_jd_j$$

而不能写成$(a_ib_i)(c_jd_j) = a_ib_ic_id_i$，因为

$$a_ib_ic_id_i = a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + a_3b_3c_3d_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_ic_id_i$$

可见，在同一项中，哑标与哑标也要避免重名.

注意：上式虽然使用了求和约定，但是在等式或表达式中，只有在同一项中出现两次的指标，其求和约定才有效. 像u_iv_{ii}这样的表达式没有其他特别意义. 当需要对两个以上指标求和时，应加上求和符号. 所以，严格地讲，上式应写成

$$a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + a_3b_3c_3d_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_ic_id_i$$

又例如，式$x'_{ij} = a_{ijkl}x_kx_l$中的自由指标可以换标. 比如，可以将i换成m，写成

$$x'_{mj} = a_{mjkl}x_kx_l$$

也可以将i换为j，写成

$$x'_{jj} = a_{jjkl}x_kx_l$$

上式中，指标j在同一项中出现两次，成了哑标，显然与原式含义不同，所以这种换标是错误的. 错在所换的自由标与另一个自由标(j)重名了. 为了避免重名，可以将指标j同时换掉，例如换为i，写成

$$x'_{ji} = a_{jikl}x_kx_l$$

或者将i,j同时换为其他指标，写成

$$x'_{st} = a_{stkl}x_kx_l$$

(2) *自由指标要整体换，哑标可以局部成对换*

以$x'_{ij} = a_{ijkm}x_kx_m + b_{ijst}\varepsilon_{st}$为例，在对自由指标换标时，必须将每一项的该自由指标都换为新标. 以只替换自由指标i为例，将i换为l，原式成为

$$x'_{lj} = a_{ljkm}x_kx_m + b_{ljst}\varepsilon_{st}$$

如果仅对右端第二项中的哑标换标，原式成为

$$x'_{ij} = a_{ijkm}x_kx_m + b_{ijuv}\varepsilon_{uv}$$

指标替换是公式推导时常用的方法，也很容易出错. 但只要注意区分自由指标和哑标，注意“让同时取值的指标同名、独立取值的指标不重名”即可避免错误.

1. 微分运算中的指标符号

三维空间中线元长度$\mathrm{d}s$及其三个分量之间的关系为

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2$$

采用指标符号可以写成

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i$$

多变量函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全微分可写成

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

2. 多重求和的指标表示

多重求和可以用一项内出现多对哑标来表示,例如

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j (= a_{kl}x_kx_l)$$

上式右端项中 i,j 均为哑标.

0.2　符号 δ_{ij} 与 e_{rst}

0.2.1　符号 δ_{ij} 和 e_{rst} 的定义与性质

符号 δ_{ij} 和 e_{rst} 是张量分析中最常用的两个符号. 符号 δ_{ij} 称为克罗内克(Kronecker)符号,其定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{0-6}$$

显然 δ_{ij} 对于指标 i,j 具有对称性,即

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{0-7}$$

δ_{ij} 的分量集合对应单位矩阵. 例如,在三维空间中

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

符号 δ_{ij} 具有换标作用,有时也称为**换标符号**. 例如,线元平方 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i$ 可以利用 δ_{ij} 改写成

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = \delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{0-8}$$

类似地,有

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \quad \delta_{ij}a_{ik} = a_{jk} \\ &\delta_{ij}a_{kj} = a_{ki}, \quad \delta_{ij}a_{ki} = a_{kj} \\ &\delta_{ij}a_{ij} = a_{ii} = a_{jj} \end{aligned}\right\} \tag{0-9}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \quad \delta_{ij} = \delta_{jk} = \delta_{kl} \tag{0-10}$$

符号 e_{rst} 称为**排列符号或置换符号**,也称为列维-奇维塔符号或黎奇符号. 其定义为(见图 0-1)

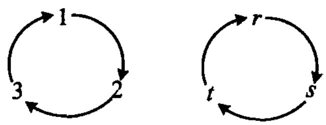


图 0-1　e_{rst} 指标的正序排列

Fig. 0-1　Permutation with positive order of the index e_{rst}

$$e_{rst}=\begin{cases}1 & r,s,t\ \text{正序排列}\\ -1 & r,s,t\ \text{逆序排列}\\ 0 & r,s,t\ \text{有两个指标相同}\end{cases}$$

若将 e_{rst} 的任意两个指标对调，则原来的正序排列变为逆序排列，原来的逆序排列变为正序排列. 所以，e_{rst} 对任何两个指标都是反对称的，即

$$e_{rst}=-e_{srt}=-e_{rts}=-e_{tsr} \tag{0-11}$$

如果调换两次指标，其值不变，即

$$e_{rst}=e_{str}=e_{trs} \tag{0-12}$$

e_{rst} 共有 27 个元素，其中只有 6 个非零元素(3 个 1 和 3 个 −1)，其余均为 0.

0.2.2　符号 δ_{ij} 和 e_{rst} 的应用

1. 正交标准化基

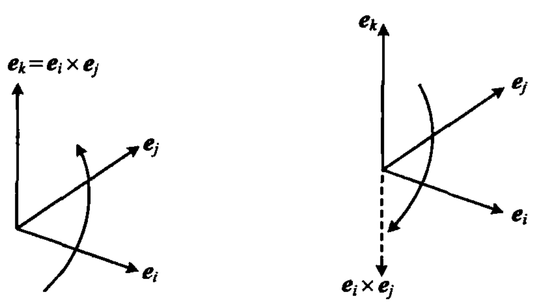
三个互相正交的单位基矢量构成一个**正交标准化基**，例如直角坐标系的三个基矢量即组成一个正交标准化基. 正交标准化基具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$，即任意两个基矢量的点积等于克罗内克符号.

(2) $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=e_{kij}\boldsymbol{e}_k$.

当三个基矢量 $\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k$ 构成右手坐标系(见图 0-2(a))时，对应指标 i,j,k 的正序排列，所以有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=e_{kij}\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{e}_k \tag{0-13}$$



(a) 右手系　　(b) 左手系

(a) Right-handed system　　(b) Left-handed system

图 0-2　正交标准化基的叉积

Fig. 0-2　Cross product of standard orthogonal basis

指标 i,j,k 的逆序排列对应左手系(见图 0-2(b))，有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=e_{kij}\boldsymbol{e}_k=-\boldsymbol{e}_k$$

2. 矢量的点积(标量积)

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_j\boldsymbol{e}_j)\cdot(b_k\boldsymbol{e}_k)=a_jb_k\delta_{jk}=a_jb_j=a_kb_k \tag{0-14}$$

或写为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

式中,$|\boldsymbol{a}|$表示矢量$\boldsymbol{a}$ 的绝对长度,θ为矢量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$在包含它们的平面内的夹角. 点积的几何意义是矢量$\boldsymbol{a}$在矢量$\boldsymbol{b}$上投影的长度再乘以矢量$\boldsymbol{b}$的长度. 如果$\boldsymbol{b}$为单位矢量,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$,即为矢量$\boldsymbol{a}$在矢量$\boldsymbol{b}$方向上投影的长度.

3. 矢量的叉积(矢量积)

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_j\boldsymbol{e}_j)\times(b_k\boldsymbol{e}_k)=a_jb_k\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=a_jb_ke_{ijk}\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(b_j\boldsymbol{e}_j)\times(a_k\boldsymbol{e}_k)=a_kb_j\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=a_kb_je_{ijk}\boldsymbol{e}_i$$

由于上式中 k,j 为哑标,可以将 k 换成j,j 换成k,得

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=a_jb_ke_{ikj}\boldsymbol{e}_i=-a_jb_ke_{ijk}\boldsymbol{e}_i=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{0-15}$$

可见,叉积不满足交换律. 叉积的几何意义是“面元矢量”,其大小等于由矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成的平行四边形的面积(即图 0-3 中阴影部分面积),方向为该面元的法线方向(按右手定则).

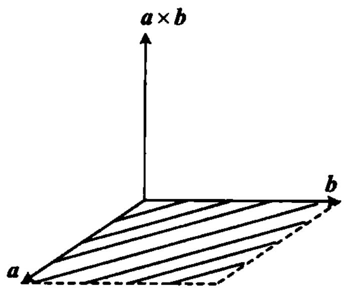


图 0-3 叉积的几何意义

Fig. 0-3 Geometric meaning of the cross product

4. 矢量的混合积

矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的混合积为

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(a_m\boldsymbol{e}_m)\cdot(e_{ijk}b_jc_k\boldsymbol{e}_i)=a_mb_jc_ke_{ijk}\delta_{mi}=a_ib_jc_ke_{ijk} \tag{0-16}$$

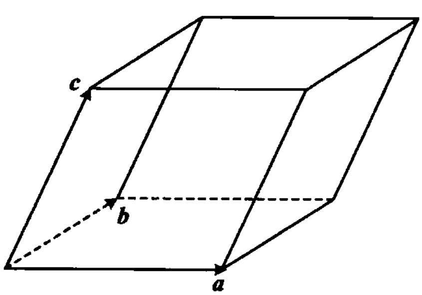


图 0-4 混合积的几何意义

Fig. 0-4 Geometric meaning of the mixed product

当交换混合积中相邻两个矢量的顺序时,混合积的值反号. 当矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成右手系时,其混合积的几何意义是这三个矢量构成的平行六面体的体积,如图 0-4 所示.

一般情况下,叉积中会出现符号 e_{ijk},而点积中会出现符号 δ_{ij}.

5. 三阶行列式的值

一个三阶行列式的展开形式为

$$
|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}
$$

如果使用排列符号，可以简洁地表示为

$$
|a_{ij}| = e_{rst}a_{r1}a_{s2}a_{t3} \tag{0-17}
$$

6. e-δ 恒等式

矢量分析中，矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之间存在如下恒等式关系：

$$
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{0-18}
$$

设 $\boldsymbol{a} = a_k\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{b} = b_s\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{c} = c_t\boldsymbol{e}_t$，则式(0-18) 的左端项为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (a_k\boldsymbol{e}_k)\times(e_{ist}b_sc_t)\boldsymbol{e}_i \\
&= (e_{kij}e_{ist}a_kb_sc_t)\boldsymbol{e}_j \\
&= [(e_{ijk}e_{ist})a_kb_sc_t]\boldsymbol{e}_j
\end{aligned}
$$

（将 e_{kij} 指标互换两次成 e_{ijk}，其值不变.）式(0-18) 的右端项为

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} &= (a_kc_k)b_j\boldsymbol{e}_j - (a_kb_k)c_j\boldsymbol{e}_j \\
&= (a_kc_kb_j - a_kb_kc_j)\boldsymbol{e}_j \\
&= (a_kb_sc_t\delta_{js}\delta_{kt} - a_kb_sc_t\delta_{ks}\delta_{jt})\boldsymbol{e}_j \\
&= [(\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{ks}\delta_{jt})a_kb_sc_t]\boldsymbol{e}_j
\end{aligned}
$$

根据式(0-18)，令左、右两端相等，得

$$
(e_{ijk}e_{ist})a_kb_sc_t = (\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{ks}\delta_{jt})a_kb_sc_t
$$

由于式(0-18) 为恒等式，即对任意的 a_k, b_s, c_t 均成立，所以有

$$
e_{ijk}e_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{ks}\delta_{jt} \tag{0-19}
$$

上式称为 e-δ 恒等式.

其更一般的形式为

$$
e_{ijk}e_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} \tag{0-20}
$$

当有一对指标相同时，如 $i = r$，上式退化为式(0-19)；当有两对指标相同时，式(0-20) 成为

$$
e_{ijk}e_{rjk} = 2\delta_{ir} \tag{0-21}
$$

当有三对指标相同时，有（读者可以自己证明）

$$
e_{ijk}e_{ijk} = 6 \tag{0-22}
$$