普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套指导书

《电磁场与电磁波(第三版)》学习指导

DIANCICHANGYU DIANCIBO

◎郭辉萍　刘学观　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套指导书
教育部使用信息技术工具改造课程立项教材配套指导书

《电磁场与电磁波(第三版)》
学习指导

郭辉萍　刘学观　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《电磁场与电磁波(第三版)》(以下简称教材)的配套学习指导书，也是教育部使用信息技术工具改造课程立项教材的配套学习指导书，本书以“阐明机理、强调概念、面向应用”为编写原则，将使用信息技术工具改造课程的最新成果融入其中，体现了教育部使用信息技术改造课程立项的目的。

全书的章节次序与教材一致，每章大致分为基本概念和公式、重点与难点、典型例题分析、部分习题参考答案、练习题和使用信息技术工具制作的演示模块六个部分。在基本概念和公式部分，将每章的基本内容和公式进行归纳总结；在重点与难点部分，针对教师教学中的难点，学生学习中的重点、难点，将每章的知识点进行梳理并尽可能与工程应用结合起来；典型例题分析部分是为提高学生分析问题的能力而设置的；部分习题参考答案比较全面地给出了教材中部分习题的解题思路，为知识点的掌握提供了方便；练习题部分供进一步学习训练使用；使用信息技术工具制作的演示模块部分给出了为加深对各知识点的理解而制作的演示模块。

本书可供高等学校电子信息类专业本科生用作参考教材，也可作为电子工程、通信工程、集成电路设计以及其他相关专业技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁场与电磁波(第三版)》学习指导/郭辉萍，刘学观编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2011.11
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套指导书
ISBN 978-7-5606-2616-1

Ⅰ.①电… Ⅱ.①郭… ②刘… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教学参考资料
②电磁波—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 123387 号

策　　划　马乐惠
责任编辑　南　景　马乐惠
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2011 年 11 月第 1 版　2011 年 11 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 14
字　　数　332 千字
印　　数　1～3000 册
定　　价　24.00 元
ISBN 978-7-5606-2616-1/O·0111

XDUP　2908001－1

前　　言

由苏州大学郭辉萍、刘学观主编，西安电子科技大学出版社出版的《电磁场与电磁波》自 2003 年出版以来，得到全国许多高校教师和学生的关心与支持，并分别在高等学校电磁场教学与教材研究会 2004 年、2006 年、2010 年的三次年会交流，与会的许多教师和专家提出了十分宝贵的意见和建议，该书 2007 年入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材。2008 年教育部推出使用信息技术工具改造课程项目，本课程教学组提出了详细的改造计划，得到了有关专家和同行的认可，最终成为全国首批 18 门课程改造项目之一。该项目得到了包括北京邮电大学、南京航空航天大学等 15 所高校专业教师的大力支持与配合。为了将最新的教学研究成果体现出来，更好地帮助学生学习电磁场与电磁波，特编辑出版了《电磁场与电磁波(第三版)》以及本学习指导书。

本书以“阐明机理、强调概念、面向应用”为编写原则，将使用信息技术工具改造课程的最新成果融入其中，体现了教育部使用信息技术改造课程立项的目的。

全书的章节次序与教材一致，每章分为基本概念和公式、重点与难点、典型例题分析、部分习题参考答案、练习题和使用信息技术工具制作的演示模块六个部分。在基本概念和公式部分，将每章的基本内容和公式进行归纳总结，并利用小贴士的形式对一些重点、难点进行提示；在重点与难点部分，针对教师教学中的难点，学生学习中的重点、难点，将每章的知识点进行梳理并尽可能与工程应用结合起来，特别在电耦合、磁耦合、电磁仿真以及天线技术等方面做了更多的注解；典型例题分析部分是为提高学生分析问题的能力而设置的；部分习题参考答案比较全面地给出了教材中部分习题的解题思路，为知识点的掌握提供了方便；练习题部分供进一步学习训练使用；使用信息技术工具制作的演示模块部分利用 Mathematica/Matlab 等信息技术工具编制计算分析软件和演示工程，将难理解的知识点形象化、图形化，进一步丰富了教学内容。

以小贴士的形式帮助学生理解知识点以及使用信息技术工具制作的演示模块是本书的特色。

本书各章中，基本概念和公式、重点与难点、典型例题分析三部分由郭辉

萍老师执笔，使用信息技术工具制作的演示模块部分由刘学观老师执笔，王莹老师验证了部分习题，全书由郭辉萍老师统稿。周朝栋教授审阅了全书，责任编辑马乐惠、南景对本书提出了许多宝贵的意见，在此表示诚挚的谢意。

在本书的编写过程中得到了苏州大学教务处和电子信息学院有关领导和同志的关心和支持，李富华老师、董雯老师、周刘蕾老师提出了许多建设性意见，曹洪龙老师、蔡文锋老师提供了许多帮助，研究生杨亮、张旭、李晶晶等同学，北京理工大学的刘宛宗同学参与了演示模块的编程与转换工作，在此一并表示感谢。同时，作者对西安电子科技大学出版社多年来的大力支持表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在错漏，敬请广大读者批评指正，我们的电子邮箱是：txdzghp@suda.edu.cn。

郭辉萍　刘学观

2010年12月于苏州大学

目　　录

第1章　矢量分析与场论

1.1　基本概念和公式

1.1.1　矢量及其代数运算

1. 标量和矢量的定义

一个仅用大小就能够完整地描述的物理量称为标量，例如电压、温度、时间、质量、电荷等。实际上，所有实数都是标量。

一个由大小和方向两个特征才能完整描述的物理量称为矢量，如电场、磁场、力、速度、力矩等。

2. 矢量的表达方法

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}A \text{ 或 } \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \tag{1-1-1}$$

式中：A 表示矢量的大小；$\boldsymbol{a}$ 表示矢量的方向。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小为1称为单位矢量。

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 在三维正交坐标系中都可以给出其三个分量，也就是可以用它的三个分量来表达。在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z \tag{1-1-2}$$

式中：$\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 分别是沿 x、y 和 z 坐标轴的单位矢量；A_x、A_y 和 A_z 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x、y 和 z 方向上的大小（投影）。

空间的任一点 P 能够由从原点指向点 P 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示，矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为该点的位置矢量，它在不同的坐标系中有不同的表达式。

如果点 P 在直角坐标系中的坐标为 (x, y, z)，则位置矢量在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z \tag{1-1-3}$$

3. 矢量的加法和减法

任意两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加等于两个矢量对应的分量相加，任意两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差等于将其中的一个矢量变号后再相加。在直角坐标系中，它们的表达式为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x(A_x \pm B_x) + \boldsymbol{a}_y(A_y \pm B_y) + \boldsymbol{a}_z(A_z \pm B_z) \tag{1-1-4}$$

矢量的加减同向量的加减，符合平行四边形法则。

4. 矢量的乘积

矢量的乘积包括标量积和矢量积。

1）标量积

任意两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标量积等于两个矢量的大小与它们夹角的余弦之乘积，两个矢量的标量积是个标量。标量积也称为点积，其表达式为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB \cos\theta \tag{1-1-5}$$

标量积在直角坐标系中也可以写为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1-1-6}$$

2）矢量积

任意两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积是一个矢量，该矢量的大小等于两个矢量的大小与它们夹角的正弦之乘积，其方向垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的平面，且与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足右手螺旋法则。矢量积又称为叉积，其表达式为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_n AB \sin\theta \tag{1-1-7}$$

矢量积在直角坐标系中还可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \boldsymbol{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \boldsymbol{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned} \tag{1-1-8}$$

小贴士　如果任意两个不为零的矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的点积等于零，则该两个矢量必然相互垂直，反之也成立；如果任意两个不为零的矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积等于零，则该两个矢量必然相互平行，反之亦然。

1.1.2　圆柱坐标系和球坐标系

在正交坐标系中，除直角坐标系外，常用的还有圆柱坐标系和球坐标系。当物体具有圆柱对称结构时，采用圆柱坐标系表示比较方便；当物体具有球对称结构时，采用球坐标系表示比较方便。这两种坐标系在电磁分析中经常被用到。

1. 圆柱坐标系

圆柱坐标系中有三个等值面，它们相互垂直，形成正交坐标系，见图 1－1。

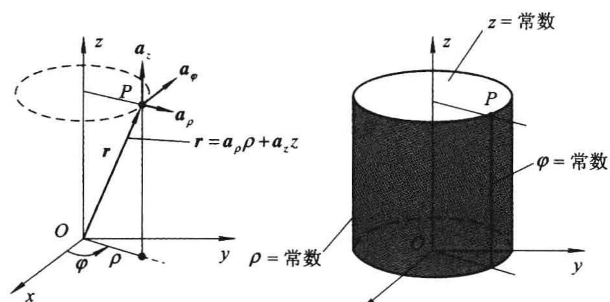

图 1－1　圆柱坐标系各量的定义及其与直角坐标系的关系

1）圆柱坐标与直角坐标的关系

空间任一点 P 的位置可以用圆柱坐标系中的三个变量（ρ，φ，z）来表示。圆柱坐标与

直角坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{1-1-9}$$

2）单位矢量

圆柱坐标系的三个单位矢量为 $\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{a}_z$，分别指向 ρ、φ 和 z 增加的方向且互相正交并遵循右手螺旋法则。

3）位置矢量 $\boldsymbol{r}$

圆柱坐标系的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 表达为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_\rho\rho + \boldsymbol{a}_z z \tag{1-1-10}$$

4）圆柱坐标系与直角坐标系单位矢量的转换

直角坐标系中的单位矢量与圆柱坐标系中的单位矢量的变换关系写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_\rho \\ \boldsymbol{a}_\varphi \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1-1-11}$$

5）拉梅系数与积分

圆柱坐标系中的拉梅系数为

$$h_1 = \frac{\mathrm{d}l_\rho}{\mathrm{d}\rho} = 1, \quad h_2 = \frac{\mathrm{d}l_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \rho, \quad h_3 = \frac{\mathrm{d}l_z}{\mathrm{d}z} = 1 \tag{1-1-12}$$

小贴士　拉梅系数可以方便地在三个不同坐标系中用同一公式来表达矢量的运算。

圆柱坐标系三个坐标面的积分分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\rho = \boldsymbol{a}_\rho\,\mathrm{d}l_\varphi\,\mathrm{d}l_z = \boldsymbol{a}_\rho\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \tag{1-1-13}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\varphi = \boldsymbol{a}_\varphi\,\mathrm{d}l_\rho\,\mathrm{d}l_z = \boldsymbol{a}_\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \tag{1-1-14}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_z = \boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}l_\rho\,\mathrm{d}l_\varphi = \boldsymbol{a}_z\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \tag{1-1-15}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_\rho\,\mathrm{d}l_\varphi\,\mathrm{d}l_z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \tag{1-1-16}$$

2. 球坐标系

球坐标系中也有三个等值面，它们相互垂直，形成正交坐标系，见图 1－2。

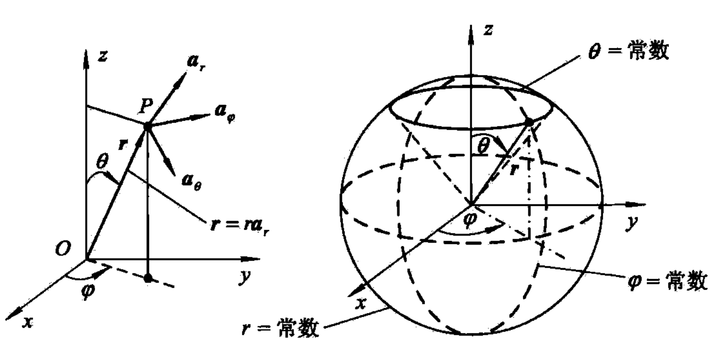

图 1－2　球坐标系各量的定义及其与直角坐标系的关系

1) 球坐标与直角坐标的关系

在球坐标系中，空间任一点 P 唯一地用三个坐标变量(r, θ, φ)来表示，它们与直角坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1-1-17}$$

2) 单位矢量

球坐标系中任意点的三个单位矢量为 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\theta$和 $\boldsymbol{a}_\varphi$，它们分别沿着三个坐标增大的方向且互相正交并遵循右手螺旋法则。

3) 位置矢量

球坐标系的位置矢量可以表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_r r \tag{1-1-18}$$

4) 单位矢量的转换

直角坐标系中的单位矢量与球坐标系中的单位矢量的变换表达式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1-1-19}$$

5) 拉梅系数与积分

球坐标中的拉梅系数为

$$h_1 = \frac{\mathrm{d}l_r}{\mathrm{d}r} = 1, \quad h_2 = \frac{\mathrm{d}l_\theta}{\mathrm{d}\theta} = r, \quad h_3 = \frac{\mathrm{d}l_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = r\sin\theta \tag{1-1-20}$$

球坐标系三个坐标面的积分分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{a}_r \mathrm{d}l_\theta \mathrm{d}l_\varphi = \boldsymbol{a}_r r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{1-1-21}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\theta = \boldsymbol{a}_\theta\,\mathrm{d}l_r\,\mathrm{d}l_\varphi = \boldsymbol{a}_\theta r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \tag{1-1-22}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\varphi = \boldsymbol{a}_\varphi\,\mathrm{d}l_r\,\mathrm{d}l_\theta = \boldsymbol{a}_\varphi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{1-1-23}$$

球坐标的体积元为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_r\,\mathrm{d}l_\theta\,\mathrm{d}l_\varphi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{1-1-24}$$

1.1.3 矢量场

1. 定义

赋予物理意义的矢性函数称为矢量场，一般矢量场均占有空间。

2. 矢量场的矢量线

所谓矢量线是这样一些曲线，在曲线的每一点上，场的矢量都位于该点处的切线方向上，像电场的电力线、磁场的磁力线等。用矢量线可以直观地描绘矢量场在空间的分布状况。

在直角坐标系中，矢量场的矢量线满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z} \tag{1-1-25}$$

小贴士　矢量线也称为力线，它可以直观形象地表达矢量场在空间的分布状况。

3. 矢量场的通量和散度

1）矢量场的通量

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过某个曲面 S 的通量为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S A \cos\theta \, \mathrm{d}S \tag{1-1-26}$$

如果 S 是一个闭合曲面，则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \tag{1-1-27}$$

讨论：

(1) 通量是个标量，它是由 S 内的源决定的。如果 $\Phi>0$，说明 S 内有正源；如果 $\Phi<0$，说明 S 内有负源；如果 $\Phi=0$，说明 S 内无源，或者正源与负源相抵消。

(2) 矢量场在闭合曲面 S 上的通量描绘的是整个闭合曲面范围内发散源的分布状况。

2）矢量场的散度

设有矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过一个包含 P 点在内的任一闭合曲面 S 的通量为 $\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 P 点处的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S}{\Delta V} \tag{1-1-28}$$

在直角坐标系中，散度的表达式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-1-29}$$

若采用拉梅系数，矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系和球坐标系中的散度可以统一表示为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 A_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_{q_3})\right] \tag{1-1-30}$$

式中：q_1、q_2 和 q_3 在圆柱坐标系中分别代表 ρ、φ 和 z，在球坐标系中分别代表 r、θ 和 φ。

讨论：

(1) 散度是个标量，它表示场中一点处通量对体积的变化率，称为该点处源的强度，它描述的是场分量沿着各自方向上的变化规律。

(2) 矢量场的散度用于研究矢量场的标量源在空间的分布状况。

(3) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}>0$ 表示矢量场在该点处有散发通量之正源；$\nabla \cdot \boldsymbol{A}<0$ 表示矢量场在该点处有吸收通量之负源；$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$ 表示矢量场在该点处无源。

(4) 如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv 0$，我们称该矢量场为无散场、连续的场或螺旋管式的场。

小贴士　散度反映了矢量场的一种源（标量源）的空间分布。

3）高斯散度定理

在矢量分析中，一个重要的定理是散度定理，其表达式为

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-1-31}$$

物理意义：矢量场散度的体积分等于矢量场在包围该体积的闭合面上的法向分量沿闭

合面的面积分。散度定理广泛地用于将一个封闭面积分变成等价的体积分，或者将一个体积分变成等价的封闭面积分。

4. 矢量场的环量及旋度

1）环量的定义

设有矢量场 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{l}$ 为场中的一条封闭的有向曲线，定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 环绕闭合路径 $\boldsymbol{l}$ 的线积分为该矢量的环量：

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l A \cos\theta \, \mathrm{d}l \tag{1-1-32}$$

环量同样也是个标量，它研究的是闭合曲线内旋涡源的分布状况。如果 $\Gamma \neq 0$，表示闭合曲线内必然有产生这种场的旋涡源；如果 $\Gamma = 0$，表示闭合曲线内无旋涡源存在。

2）旋度

设 P 为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的任一点，包含 P 点作闭合曲线 $\boldsymbol{l}$，则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\boldsymbol{l}$ 之正向的最大环量与该曲线 $\boldsymbol{l}$ 所包围的面积 ΔS 之比定义为旋度：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_n \lim_{\Delta S \to P} \frac{\left[\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]_{\max}}{\Delta S} \tag{1-1-33}$$

在直角坐标系中，旋度的表达式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1-1-34}$$

若采用拉梅系数，矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系和球坐标系中的旋度可以统一表示为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \boldsymbol{a}_{q_1} & h_2 \boldsymbol{a}_{q_2} & h_3 \boldsymbol{a}_{q_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_{q_1} & h_2 A_{q_2} & h_3 A_{q_3} \end{vmatrix} \tag{1-1-35}$$

式中：q_1、q_2 和 q_3 在圆柱坐标系中分别代表 ρ、φ 和 z，在球坐标系中分别代表 r、θ 和 φ。

讨论：

（1）旋度是个矢量，它表示场中一点处最大的环量面密度，它描述的是场分量沿着与它相垂直的方向上的变化规律。

（2）矢量场的旋度用于研究矢量场的矢量源在空间的分布状况。

（3）如果 $\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{0}$，我们称该矢量场为无旋场或保守场。

（4）由于任意一个矢量旋度的散度一定为零，因此任意一个散度为零的矢量一定可以用另外一个矢量的旋度来表示，即若 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，则 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$。

小贴士 矢量场的旋度反映了另外一种源（矢量源）的空间分布。从本质上来说，产生矢量场有两种源：一种是标量源（发散源）；一种是矢量源（漩涡源）。因此对于一个矢量场必须从散度和旋度两个方面来研究，才能确定该矢量场的性质。

3）斯托克斯定理(Stokes' theorem)

矢量分析中另一个重要的定理是斯托克斯定理，其表达式为

$$\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-1-36}$$

式中：$\boldsymbol{S}$ 是闭合路径 $\boldsymbol{l}$ 所围成的面积，它的方向与 $\boldsymbol{l}$ 的方向成右手螺旋关系。

物理意义：矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度沿曲面 $\boldsymbol{S}$ 法向分量的面积分等于该矢量沿围绕此面积曲线边界的线积分。

1.1.4 标量场

1. 标量场的等值面及方向导数

1）标量场的定义

一个仅用其大小就可以完整表征的场称为标量场。

2）标量场的等值面或等值线

一个标量场 u 可以用一个标量函数来表示。在直角坐标系中，$u(x, y, z)=C$(常数)称为标量场 u 的等值面。随着 C 的取值不同，可得到一系列不同的等值面。对于由二维函数 $v=v(x, y)$所给定的平面标量场，令 $v(x, y)=C$，随着 C 的取值不同，可得到一系列等值线。

小贴士 标量场的等值面或等值线可以直观地帮助我们了解标量场在空间的分布状况。

3）方向导数

在直角坐标系中，沿射线 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-1-37}$$

式中：$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦。

2. 梯度

1）梯度的定义

从标量场 u 中的给定点 P_0 出发，沿不同方向的方向导数一般来说是不同的，最大的方向导数称为函数 u 在点 P_0 处的梯度 grad u，如图 1－3 所示。梯度方向也称为最陡下降方向。

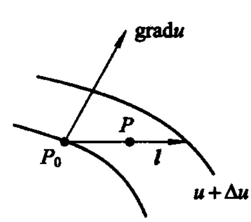

图 1－3　u 沿不同方向的变化率

2）梯度的表达式

梯度的表达式为

$$\mathrm{grad}u = \nabla u = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-1-38}$$

3）梯度的积分

一个无旋场 $\boldsymbol{F}$ 一定可以用另外一个标量场 u 的梯度来表示，即 $\boldsymbol{F}=\nabla u$。当已知无旋场 $\boldsymbol{F}$ 的分布，并选定始点 P_1 为参考点，则任意动点 P_2 的标量场 u 可表示为

$$u(P_2)=\int_{P_1}^{P_2}\nabla u\cdot d\boldsymbol{l}+u(P_1)=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}+C \qquad (1-1-39)$$

无旋场沿不同路径的积分如图 1－4 所示。

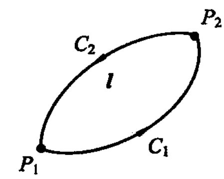

图 1－4　无旋场沿不同路径的积分

讨论：

（1）梯度是个矢量，它的方向是该等值面变化最大的方向，即法线方向。

（2）标量场中沿射线 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数等于梯度在 $\boldsymbol{l}$ 方向上的投影。

（3）标量函数取梯度得到矢量场，该标量函数称为势函数，对应的矢量场称为有势场，也叫无旋场或保守场。对无旋场进行线积分得到势函数。

（4）保守场沿闭合路径的积分等于零，或者说积分与路径无关。

（5）对一个标量场取梯度得到矢量场。由于梯度的旋度恒等于零，因此任意一个旋度为零的矢量场一定可以用一个标量场的梯度来表示，也就是说，如果一个矢量场是无旋场，则该无旋场一定可以一个标量函数的梯度来表示。比如，若 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，则 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$；若 $\boldsymbol{E}$ 代表电场，则 u 代表电位函数，其中的负号表示电场的方向为电位下降的方向。

1.1.5　亥姆霍兹定理

1. 亥姆霍兹定理的描述

一般来说，当一个矢量场的两类源（ρ_V，$\boldsymbol{J}$）在空间的分布确定时，该矢量场就唯一地确定了，这一规律称为亥姆霍兹定理。

2. 亥姆霍兹定理的意义

亥姆霍兹定理告诉我们，研究任意一个矢量场（如电场、磁场等），需要从散度和旋度两个方面去研究，其中：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}\end{cases} \qquad (1-1-40)$$

式（1－1－40）称为矢量场基本方程的微分形式。

或者从矢量场的通量和环量两个方面去研究矢量场，即

$$\begin{cases}\oint_S\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\rho_V dV\\ \oint_l\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}\end{cases} \qquad (1-1-41)$$

式（1－1－41）称为矢量场基本方程的积分形式。

小贴士　亥姆霍兹定理总结了源与场的积分、微分关系，并且可以知道：无旋场一定是保守场，一定是有势场；无散场一定是连续场，一定是有旋场。

1.2 重点与难点

1.2.1 本章重点和难点

(1) 熟练掌握矢量及其代数运算，正确理解场的概念，深刻理解矢量场的性质和特点，掌握矢量场的散度、旋度的意义及求解；深刻理解高斯定理和斯托克斯定理的意义及其应用。以上这些均是本章的重点，其中对矢量场旋度的理解是本章的难点。

(2) 掌握标量场的定义及其梯度也是本章的重点。

(3) 深刻理解亥姆霍兹定理及明确场与源的关系问题是本章的又一个重点。

1.2.2 标量场和矢量场

一个物理量在某空间的无穷集合称为场，若该物理量为标量就称为标量场，若该物理量为矢量就称为矢量场。一个标量场的性质可以完全由它的梯度来表征，而一个矢量场的性质完全可以由它的散度和旋度来表征。一个标量场的梯度是一个矢量场，且该矢量场一定是无旋场(也称为保守场、有势场)。对保守场进行积分就得到该矢量场的势函数(标量场)。标量场梯度的方向是该标量场等值面的法线方向，也是变化率最大的方向。

1.2.3 矢量场的旋度

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，包围 P 点作闭合曲线 $\boldsymbol{l}$，则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\boldsymbol{l}$ 之环量与该曲线 $\boldsymbol{l}$ 所包围的面积 ΔS 之比定义为环量面密度。如果 $\boldsymbol{l}$ 围成的面元矢量与矢量场的旋涡面方向重合，则环量面密度最大；如果 $\boldsymbol{l}$ 围成的面元矢量与矢量场的旋涡面方向垂直，则环量面密度等于零；如果 $\boldsymbol{l}$ 围成的面元矢量与矢量场的旋涡面方向有一夹角，则环量面密度总是小于最大值。我们将最大的环量面密度称为旋度。旋度为一矢量，它在任意面元方向的投影即为该方向上的环量面密度。

1.2.4 矢量场的两个方程

我们将源看成是场的起因，即源是因，场是果，场的性质取决于源的性质。换句话说，只要知道了因，便可知道果。因此，我们可以从研究矢量场的源的性质来了解矢量场的性质。

矢量场的散度表示该矢量场中一点处通量对体积的变化率，它代表了该矢量场的标量源在空间的分布状况。如果矢量场的散度等于零，我们称该矢量场为无散场。而矢量场的旋度表示该矢量场单位面积上的环量，它代表了该矢量场的矢量源在空间的分布状况。如果矢量场的旋度等于零，我们称该矢量场为无旋场。可见，无旋场的散度不能处处为零，同样，无散场的旋度也不能处处为零，否则该矢量场就不存在。但反过来说，一个矢量场的散度和旋度可能都不等于零，也就是既有标量源又有矢量源。因此，研究一个矢量场，必须既要研究它的标量源又要研究它的矢量源。如果一个矢量场的标量源和矢量源在空间的分布确定了，则该矢量场就唯一地确定了，这就是亥姆霍兹定理。换句话说，任一个矢量场都应该有两个方程来描述，这两个方程可以是微分形式的也可以是积分形式的。微分形式的两个方程就是该矢量场的散度和旋度，积分形式的两个方程就是该矢量场的通量和环量。

应用高斯定理时要注意：必须当曲面为闭合曲面时才能使用高斯定理将其面积分转换成体积分。同样，斯托克斯定理中的曲线必须是闭合曲线定理才能成立。

1.3 典型例题分析

【例 1】 过坐标原点沿 z 轴方向流动的线电流 I 产生的矢量场在圆柱坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

式中：μ_0为常数。

试画出该矢量场的矢量线，并标出其方向。

解 要画出矢量线首先应该求出矢量线方程，也就是要利用教材中的式(1-3-5)。而要利用这个公式，就应该将矢量场的圆柱坐标系表达式转变为直角坐标系中的表达式。具体如下：

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\\&=[\boldsymbol{a}_x(-\sin\varphi)+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi]\rho\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2}\\&=[\boldsymbol{a}_x(-y)+\boldsymbol{a}_y x]\frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

根据教材中式(1-3-5)，则有

$$\frac{-y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{\mathrm{d}y}$$

上式整理可得矢量线方程为

$$x^2+y^2=C^2$$

式中：C 为常数。

可见，该矢量场的矢量线是一组圆心位于坐标原点的同心圆，由题目中给出的矢量场的表达式可知矢量场的方向为$\boldsymbol{a}_\varphi$方向，如图 1-5 所示。

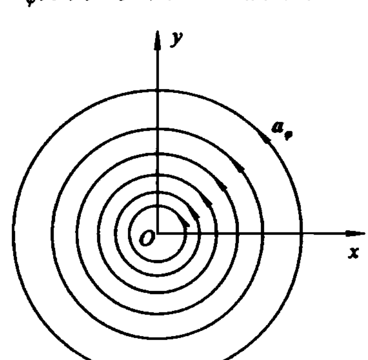

图 1-5 沿 z 轴流动的线电流所产生场的矢量线