"十二五"职业教育规划教材

高等数学学习指导与能力训练

主 编 周 玮 刘玉菡

京师职教

文化课

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

"十二五"职业教育规划教材

高等数学学习指导与能力训练

主　编　周　玮　刘玉菡
副主编　赵成龙　张彭飞　于秀萍
主　审　曹一鸣

京师职教
文化课

北京师范大学出版集团
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与能力训练/周玮，刘玉菡主编．—北京：北京师范大学出版社，2015.8
（“十二五”职业教育规划教材）
ISBN 978-7-303-19388-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①周… ②刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 186114 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社职业教育分社网 http://zjfs.bnup.com
电子信箱 zhijiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：10.75
字　　数：230 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版
印　　次：2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：19.00 元

策划编辑：庞海龙　　责任编辑：庞海龙
美术编辑：高　霞　　装帧设计：李尘工作室
责任校对：陈　民　　责任印制：陈　涛

版权所有　侵权必究

反盗版、侵权举报电话：010－58800697
北京读者服务部电话：010－58808104
外埠邮购电话：010－58808083
本书如有印装质量问题，请与印制管理部联系调换。
印制管理部电话：010－58808284

序

高等数学作为建工、机电等工科专业的一门重要的工具性课程,因其博大精深、神秘美丽,总是令人向往而又有所畏惧.如何在高职阶段学好高等数学呢?下面给大家几点建议.

一、明确学习高等数学的目的

张奠宙先生曾说:“人生在世,读书是终身相伴的,读书的目的有二:一是当工具使用,二是提高个人修养,学习数学也是一样的.”高等数学是进入高职院校首先要学习的一门重要的基础课,是为学习专业服务的,是进行专业技术分析和计算的工具.数学的工具性主要体现在它是一种由数字、符号和图像组成的特殊语言.在现代职业中随处可见数学语言,当你进入工程界,如果不懂得“导数”“驻点”“极值”这些名词,就无法解决最优化问题;当你进入信息领域,如果不懂得微积分,就无法理解曲线上升、下降的意义,无法进行数值分析;在日常生活中,如果不懂得数学语言,就无法欣赏“指数爆炸”“价格弹性”“人生驻点”等语言.学习数学还可以训练思维品质,提高文化素养.当你看到一串数字时,是否会思考数字背后隐藏的量与量之间的函数关系;当你在听律师辩护时,是否会有意识地去判断他逻辑的合理性,这些都是在学习数学的过程中潜移默化地形成的数学品质.因此,高职生学习高等数学的目的主要有三方面:其一,掌握高等数学的基本知识、基本理论,为学好专业课打下基础;其二,了解数学发展史,数学思想和方法,理解数学的本质和价值;其三,学会用数学的思维方式和方法去创新,去实践!

二、把握四个环节,提高学习效率

第一,课前预习.了解老师即将讲什么内容,相应地复习与之相关内容,有的放矢,充分发挥自己的主观能动性,体会解决问题的乐趣,这样才能学习并快乐着.解决一个重大问题是一个伟大的发现,其实任何一个问题的解决都会有所发现.你解决的问题也许很平凡,但如果解决问题的过程挑战了你的好奇心,激发了你的创造力,你就会经历一个紧张的过程,最终能体会到发现的喜悦.

第二,认真上课.听课是一个全身心投入——听、记、思考相结合的过程.注意老师的讲解方法、思路,以及分析问题和解决问题的过程,同时关注你预习时遇到的问题,记好课堂笔记.

第三,课后复习,循序渐进.当天必须回忆一下老师讲课内容,然后结合笔记重复看教材内容,完善笔记,掌握所学内容之间的联系,最后完成作业.一些同学总是习惯于课后先动手做作业,在碰到困难时才会去读课本.而好的学习方法应该是在做题之前仔细研读课本,特别是在看定义、定理时,要理解每字每句的确切含义.而且,在看例题时,也不要急于看答案,而是尽量自己去解题、去理解.只有这样,你才会在最后看答案时获得更多的启发.同时还要注意经常复习、巩固学过的内容,进行循环学习,学会归纳、总结.

第四,注重概念,掌握核心思想和方法.高职阶段的学习不能只为应付考试,重要的是学习每门课程的内涵,即思想方法.高等数学中,为了提出或建立一种思想和方法,总

要有基本概念、基本结论作为铺垫.如果对这些概念和基本结论掌握不好,就很难掌握其内在的核心思想和方法.高等数学与初等数学有很大差别,学习高等数学的过程也是新的认识观念的建立过程,如有限数学过渡到无限数学的过程就是认知的一个飞跃.有些同学认识不到学习基本概念、基本结论的重要性,只从文字表面上理解,忽略思想观念的转变,就会感觉学习困难.其实,高等数学学习难点的突破正是在于对基本概念、结论的准确理解、灵活运用,以及动态变化观念的建立上.突破了这一难点,很多问题就会迎刃而解.

三、培养创造性思维和数学应用能力

学习一门课程要思考其延伸的作用.学习高等数学不能只学数学知识,还应该努力培养自己的创造性思维和运用数学的能力,尤其是数学建模的意识.高等数学充分体现了逻辑思维、抽象思维、类比思维、归纳思维、发散思维、逆向思维等创造性思维,学生应通过高等数学这一载体很好地体验这些思维方式,提高自己的科学思维能力.教材中融入了大量数学建模的知识,并介绍了数学软件 MATLAB 的应用,为解决实际问题提供了强有力的工具.在学习时应有意识地培养自己的数学应用意识和数学建模能力,当你面临有待解决的问题时,要主动尝试用数学的立场、观点和方法寻求解决问题的策略;当你遇到专业实际问题时,要尝试用所学知识建立相应的数学模型.我们在今后的学习过程中将会遇到很多这样的应用实例,要注意总结、归纳,提升为通用方法,并有意识地去思考能否用这些方法去处理专业问题.

四、感受数学,提高数学素养

数学不仅仅是一种工具,它更是一个人必备的素养.它会影响一个人的言行、思维方式等各个方面.一个人,如果他不是以数学为终生职业,那么他的数学素养并不只表现在他能解多难的题,解题有多快,数学能考多少分,关键在于他是否真正领会了数学的思想,数学的精神,是否将这些思想融会到了他的日常工作和生活中去.日本的米山国藏说:"我搞了多年的数学教育,发现学生们在初中、高中接受的数学知识因毕业进入社会后,几乎没有什么机会应用这些作为知识的数学,所以通常是出校门不到一两年就很快忘掉了.然而,不管他们从事什么业务工作,惟有深深铭刻于头脑中的数学精神、数学的思维方法、研究方法和着眼点等,都随时随地发生作用,使他们受益终生."

因此,高职阶段的数学学习将有更深的内涵,它会如春风化雨般融入你的心智,成为你的基本素养.最后用张顺燕教授的六句话来概括高职数学的作用:

给你打开一个窗口,让你领略另一个世界的风光——数学的博大精深、数学的广阔用场;

给你一双数学家的眼睛,丰富你观察世界的方式;

给你一颗好奇的心,点燃你胸中的求知欲望;

给你一个睿智的头脑,帮助你进行理性思维;

给你一套研究模式,使它成为你探索世界奥秘的望远镜和显微镜;

给你提供新的机会,让你在自己的专业领域寻求乐土,利用你的勤奋和智慧去做出发明和创造!

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

编者的话

本书是根据教育部制定的《高职高专基础课程教学要求》和最新修订的《普通高等学校专升本高等数学复习考试大纲》的要求编写的.本书在编写中力求使学生更好地理解高等数学的基本知识,明确重点,突破难点,并通过案例训练使学生深入理解数学的概念和思想方法,不断提高数学的应用能力.

本书每章内容包括:学习要求,典型例题分析,典型案例分析,阅读材料,复习题A组、B组,自测题,专升本考试试题及答案等内容.

学习要求是对每章应掌握内容的基本要求,以及重难点的剖析.

典型例题分析是对本章重点题型的解析.

典型案例分析是通过专业案例分析帮助学生理解数学的概念、思想方法以及应用,学会科学地思考,领悟数学的真谛,把知识学习与能力培养有机地结合起来.

阅读材料包括数学史、数学建模、数学论文等内容,是对数学知识的扩展,通过阅读不仅可以拓展学生的知识面,而且能够培养学生的学习兴趣.

复习题A组、B组是针对学生的不同学习水平设计的,A组题为基础训练题,主要练习基本知识和基本技能,巩固所学知识;B组题为提高题,出自历年专升本试题,对知识的灵活应用程度要求较高.分层设计体现了数学教学的灵活性,符合学生的个性发展.

单元自测题是对本章内容的基本检测,试题难易适中,主要以考查基本知识、基本应用为主,是学生进行自检自测的重要依据.

本书还配有各章习题参考答案和山东省历年专升本试题及答案,如果学生在复习的基础上根据专升本题型多加练习,完全可以通过对本书的学习,达到"专升本"对高等数学的要求.

本书可与北京师范大学出版社出版的《高等数学》配套使用,由于其编写的独立性,本书也可作为普通高等职业院校及成人高校大专班学生学习的重要参考书.

参加本书编写的有济南工程职业技术学院周玮、赵成龙、张彭飞、于秀萍(第1,2,3,4章)刘玉菡、王栋、刘士艳、陈允峰(第5,6章)。全书框架结构安排、统稿、定稿由周玮承担.

本书由北京师范大学曹一鸣教授担任主审,对本书的框架结构、内容进行了认真审

定并提出了指导建议，在此表示感谢！

尽管我们作出了很大努力，但由于水平有限，书中难免有不当之处，恳请广大同仁及读者批评指正.

编者

2013 年 4 月

目录

第一章　函数、极限与连续

函数是客观世界中变量与变量之间相互依赖关系的反映，是高等数学的主要研究对象. 极限是研究微积分的重要工具，并作为重要的思想方法和研究工具，贯穿于高等数学课程的始终. 连续性是运用极限的方法揭示出来的函数的重要性质. 本章将主要对函数、极限、连续的基本概念，极限的运算等内容进行训练和指导.

一、学习要求

1. 理解函数的概念和性质，会求函数的定义域，并熟练掌握六种基本初等函数的定义、性质及其图像.

2. 掌握复合函数、初等函数的概念，会正确分析复合函数的复合过程. 复合函数的分解应注意分解顺序“由外及内，逐层分解”，分解为基本初等函数或简单函数.

3. 深刻理解函数极限的概念，强调函数在某点是否有极限与函数在该点是否有定义无关. 熟练掌握函数极限的各种求法.

4. 理解无穷小与无穷大的概念及其相互关系，并会对无穷小进行比较.

5. 掌握函数连续的概念，以及函数在某一点连续时必须满足连续定义的三个条件，会求函数的间断点并确定其类型.

6. 掌握闭区间上连续函数的性质、最值定理、介值定理和零点定理，并会运用零点定理推证一些简单命题.

重点： 函数的极限、函数连续性的概念、极限的运算法则、两个重要极限、闭区间上连续函数的性质.

难点： 极限的计算、连续的判断、零点定理的应用.

二、典型例题分析

(一)函数的概念及性质

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\arccos x+\sqrt{x}$；　　(2) $y=\ln\cos x$；

(3) $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$；　　(4) $y=\arcsin(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

解　(1) 要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases} x^2-1\neq 0, \\ |x|\leqslant 1, \\ x\geqslant 0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x\neq \pm 1, \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

所以，$0\leqslant x<1$，故函数的定义域为$[0, 1)$.

(2) 要使函数有意义，x 应满足 $\cos x>0$,所以，

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in \mathbf{Z}),$$

故函数的定义域为

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \ (k\in \mathbf{Z}).$$

(3) 要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases} 5-x\geqslant 0, \\ x-1>0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x\leqslant 5, \\ x>1. \end{cases}$$

所以，$1<x\leqslant 5$，故函数的定义域为$(1, 5]$.

(4) 要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases} |x-1|\leqslant 1, \\ 1-x^2>0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 2, \\ -1<x<1. \end{cases}$$

所以，$0\leqslant x<1$，故函数的定义域为$[0, 1)$.

说明　求函数的定义域时应注意以下几点：

(1) 若函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零；

(2) 若函数的表达式中含有偶次方根，则根式下的表达式必须非负；

(3) 若函数的表达式中含有对数，则真数必须大于零；

(4) 若函数的表达式中含有 $\arcsin \varphi(x)$ 或 $\arccos \varphi(x)$，则必须满足 $|\varphi(x)|\leqslant 1$；

(5) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围之并集；

(6) 若函数式是由几个函数经过四则运算构成，其定义域是各个函数的定义域的交集.

例 2　已知 $f(x)$ 的定义域为$[0, 1]$，求 $f(\ln x)$ 及 $f(\sin x)$ 的定义域.

解　因为 $f(x)$ 的定义域为$[0, 1]$，$0\leqslant \ln x\leqslant 1$，故 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，所以 $f(\ln x)$ 的定义域为$[1, \mathrm{e}]$.

同理,$0\leqslant \sin x\leqslant 1$，故

$$2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z}),$$

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为

$$\{x \mid 2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z})\}.$$

例 3　求下列函数的反函数：

(1)$y=\sqrt[3]{x+1}$；　　　(2)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$，所以反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $2^xy+y=2^x$，整理得 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$.

两边同时取以 2 为底的对数得

$$x=\log_2\frac{y}{1-y}\Rightarrow x=\frac{\ln y-\ln(1-y)}{\ln 2},$$

所以反函数为
$$y=\frac{\ln x-\ln(1-x)}{\ln 2}.$$

例 4 判断下列函数的有界性：

(1) $y=2x^2+1$； (2) $y=3\sin 2x-5\cos 3x$.

解 (1) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|y|=|2x^2+1|\geqslant M$(M 为任意正数)；故函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

(2) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|y|=|3\sin 2x-5\cos 3x|\leqslant|3\sin 2x|+|5\cos 3x|\leqslant 3+5=8,$$

故函数 $y=3\sin 2x-5\cos 3x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

例 5 求下列函数的表达式：

(1) 设 $f(1+x)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f(2x-1)=x^2$，求 $f[f(x)]$；

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$g(x)=1+x^2$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$；并确定它们的定义域；

(4) 若 $f(x)=10^x$，$g(x)=\ln x$，求 $f[g(100)]$，$g[f(3)]$；

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $g[f(\ln 2)]$.

解 (1) 解法一：设 $1+x=u$，则 $x=u-1$，得

$$f(u)=f(1+x)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3,$$

故
$$f(x)=x^2+x+3.$$

解法二：直接将 $f(1+x)$ 凑成 $(1+x)$ 的函数，即

$$f(1+x)=(1+x)^2+(1+x)+3,$$

故
$$f(x)=x^2+x+3.$$

说明 已知 $f[g(x)]$，求 $f(x)$ 的表达式，一般设 $u=g(x)$，解出 $x=\varphi(u)$，代入 $f[g(x)]$，求出 $f(u)$ 的表达式，再将 u 换成 x 得到 $f(x)$. 也可用凑成法.

(2) 令 $u=2x-1$，则 $x=\dfrac{u+1}{2}$，代入 $f(2x-1)=x^2$ 得

$$f(u)=\left(\frac{u+1}{2}\right)^2=\frac{(u+1)^2}{4},$$

因此
$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{4},$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$f[f(x)] = \frac{[f(x)+1]^2}{4} = \frac{\left(\frac{(x+1)^2}{4}+1\right)^2}{4} = \frac{[(x+1)^2+4]^2}{64},$$

(3) $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1} \quad (x \neq -1),$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{1+x+1} = \frac{1+x}{2+x} \quad (x \neq -1 \text{ 且 } x \neq -2),$$

$$g[g(x)] = 1+(1+x^2)^2 = x^4+2x^2+2 \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$f[g(x)] = \frac{1}{1+(1+x^2)} = \frac{1}{x^2+2} \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$g[f(x)] = 1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1} \quad (x \neq -1).$$

说明 注意复合次序，一般情况下 $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

(4) 因为 $g(100) = \ln 100$，所以 $f[g(100)] = f(\ln 100) = 10^{\ln 100}$.

因为 $f(3) = 10^3$，所以 $g[f(3)] = g(10^3) = \ln 10^3 = 3\ln 10$.

(5) 因为 $|\ln 2| < 1$，所以 $f(\ln 2) = 1$.

又因为 $g(1) = e^1 = e$，所以 $g[f(\ln 2)] = e$.

例 6 分解下列复合函数：

(1) $y = \cos\frac{1}{x+1}$；　　(2) $y = 2^{\sin^3 x}$；

(3) $y = \lg^2 \arccos x^5$；　　(4) $y = \sqrt{\ln\tan x^2}$.

解 (1) $y = \cos\frac{1}{x+1}$ 可分解为 $y = \cos u$，$u = v^{-1}$，$v = x+1$；

(2) $y = 2^{\sin^3 x}$ 可分解为 $y = 2^u$，$u = v^3$，$v = \sin x$；

(3) $y = \lg^2 \arccos x^5$ 可分解为 $y = u^2$，$u = \lg v$，$v = \arccos \omega$，$\omega = x^5$；

(4) $y = \sqrt{\ln\tan x^2}$ 可分解为 $y = \sqrt{u}$，$u = \ln v$，$v = \tan \omega$，$\omega = x^2$.

(二) 极限的求法

1. 数列极限的求法，以及等差数列和等比数列前 n 项的极限.
2. 利用极限的四则运算法则计算.
3. $\frac{0}{0}$ 型，可用“约零因子法”，或等价代换的方法.
4. $\frac{\infty}{\infty}$ 型，可提取无穷大因子或分子、分母同除以适当无穷大，特别地

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0, & m > n, \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n \ (a_0, b_0 \neq 0), \\ \infty, & m < n. \end{cases}$$

5. $\infty-\infty$ 型，可有理化或通分后转变为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{\infty}{\infty}$ 型.

6. 利用两个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\ \text{或}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

7. 无穷小法：无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小；在同一自变量变化过程中，无穷大的倒数是无穷小；无穷小量可以进行等价代换.

8. 分段函数在分界点处的极限，要分别求左、右极限判断极限是否存在.

9. 利用连续性求极限，若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；若 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]=f[g(x_0)]$，函数符号可以与极限符号互换.

例 7 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n^2+1)}{n^3+4n^2+3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}\right)$，其中 n 为自然数；

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解 (1)“$\frac{\infty}{\infty}$”型，一般采用分子和分母同除以 n 的最高次幂的方法求极限，分子分母同除以 n^3，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+1)}{n^3+4n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^3}}=\frac{2}{1}=2;$$

(2) 此数列极限为“$\infty-\infty$”型，将其有理化后求极限，得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0;$$

(3) 因为$\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}=\dfrac{\dfrac{n(1+2n-1)}{2}}{n+3}=\dfrac{n^2}{n+3}$，

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+3}=\infty\text{，极限不存在；}$$

(4) 因为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$，

所以 $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2.$$

例 8 已知 a，b 为常数，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax+b}{x-1}=4$，求 a，b 的值.

分析 此题为 $x \to x_0$ 时的有理函数极限式，当 $\lim\limits_{x\to x_0} Q_m(x)=0$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=A(A\neq 0)$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x)=0$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=4$，必有 $\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=0$，故有 $a+b=0$，即 $a=-b$. 代入式 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=a=4$，故有 $a=4$，$b=-4$.

例 9 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+1}{x^3+3x^2-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{x^2-x+3}$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}{2}=\sqrt{2}.$$

说明 此题是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，可通过分母有理化约去零因子，再求极限.

(2) 此题是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，分子、分母同除以 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+1}{x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{-3}{1}=-3.$$

(3) 此题是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，方法同(2)，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{x^2-x+3}=0$.

(4) 此题是 $\infty-\infty$ 型极限，通分得

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)=-1.$$

例 10 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{x-2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$.

解 (1) 由重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，有

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\sin(x-2)=1\times 0=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$
$$= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}.$$

说明 此类题为带有三角函数的“$\frac{0}{0}$”型，注意选用公式 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

例 11 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+4}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$；(3) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

解 (1) 由重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{x}{4}\times 4+4}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{x}{4}\times 4}\cdot\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right]^{4}$$
$$=\mathrm{e}^4\times 1=\mathrm{e}^4;$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-1}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^2=\mathrm{e}^2$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ln\mathrm{e}=1.$$

说明 此类题为“1^∞”型，注意运用公式 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{g(u)\to\infty}\left[1+\frac{1}{g(u)}\right]^{g(u)}=\mathrm{e}$.

例 12 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x$.

解 (1) 当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，因 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数，故 $x\sin\frac{1}{x}$

是无穷小，于是$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；

(2) 当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小，因$|\sin x|\leqslant 1$，即$\sin x$是有界函数，故$\dfrac{\sin x}{x}$是无穷小，于是$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$.

注意 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$ 不存在.

例 13 当$x\to 0$时，下列哪个函数与x等价？

(1) $\tan^2 x$；　　(2) $1-\cos x$；

(3) $\ln(1+x)$；　　(4) $2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$.

解 (1) 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x}=0,$$
故当$x\to 0$时，$\tan^2 x$是比x高阶的无穷小，即$\tan^2 x=o(x)$；

(2) 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}=0,$$
故当$x\to 0$时，$(1-\cos x)$是比x高阶的无穷小，即$1-\cos x=o(x)$；

(3) 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$
故当$x\to 0$时，$\ln(1+x)$是与x等价的无穷小，即$\ln(1+x)\sim x$，因此，当$x\to 0$时，函数$\ln(1+x)$与x等价.

(4) 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2,$$
故当$x\to 0$时，$2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$是与x同阶的无穷小.

说明 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\sin(\sin x)\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$(1+x)^n-1\sim nx$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，这些等价式的意义是在求极限的过程中可将较复杂的函数替换为x、x^2等幂函数从而简化计算.

例 14 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}$.

解 利用等价无穷小代换，简化计算.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(4x)^2}{x^2}=8$;

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{t}=1$.

例 15 求下列分段函数的极限.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ x, & x>0, \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$;

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

说明 若分段函数的分段点两侧表达式不相同，在计算极限时，必须考虑左、右极限.若左、右极限相等，则极限存在；否则极限不存在.本题中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，说明函数在某一点是否有极限与函数在这一点是否有定义无关.

例 16 设 $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x}$，问：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

分析 此问题为含有绝对值函数的极限，应将函数分段后去掉绝对值，再研究其极限.故属于分段函数的极限，应分左、右极限分别计算.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-x}{x}=-2$.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例 17 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $f(2)=3$，求：

$$\lim_{x\to 2}f(x)\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right).$$

分析 利用函数的连续性求极限.

解 因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，故$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}f(x)\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)&=\lim_{x\to 2}f(x)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}\\&=3\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

例 18 下列函数的自变量如何变化时，$f(x)$ 为无穷小？

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$; (2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com