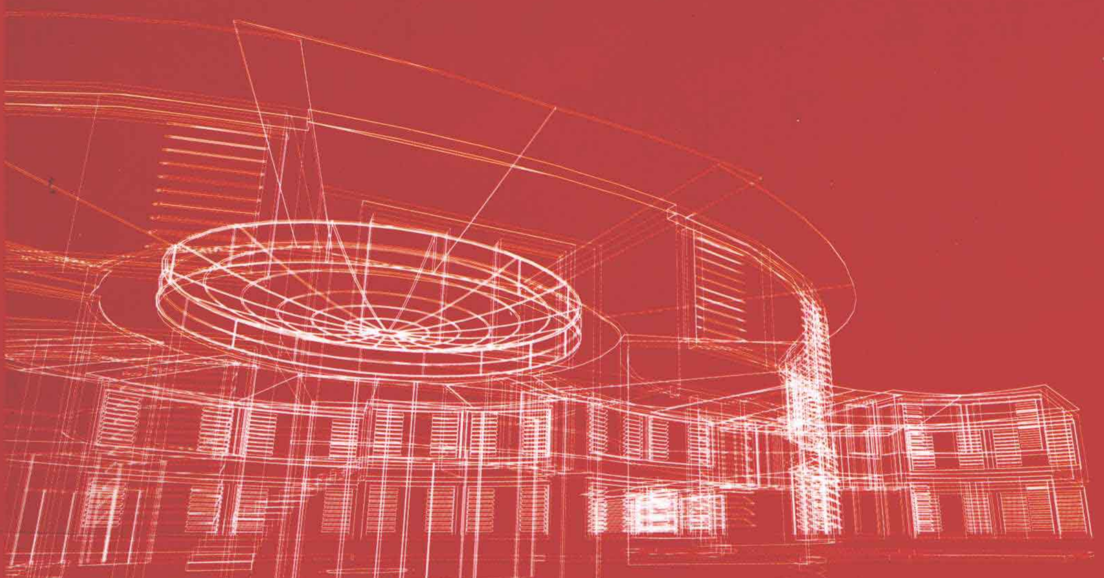
工程结构
动载荷识别方法

GONGCHENG JIEGOU
DONGZAIHE SHIBIE FANGFA

张方 秦远田 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

工程结构动载荷识别方法

张方　秦远田　著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

建筑设备/胡晓莲主编. —长沙:中南大学出版社,2010.7
ISBN 978-7-5487-0076-0

Ⅰ.建... Ⅱ.胡... Ⅲ.房屋建筑设备—高等学校—教材
Ⅳ.TU8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第148801号

建筑设备

主编 胡晓莲

□责任编辑 刘 辉
□责任印制 文桂武
□出版发行 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路 邮编:410083
发行科电话:0731-88876770 传真:0731-88710482
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 长沙市华中印刷厂

□开 本 787×1092 1/16 □印张 15 □字数 357千字
□版 次 2010年8月第1版 □2010年8月第1次印刷
□书 号 ISBN 978-7-5487-0076-0
□定 价 30.00元

序

我曾与本书作者张方教授共同在南京航空航天大学振动工程研究所任教，从事飞行器结构动力学与控制研究。我们在研究中，常常困惑于不了解实际结构所承受的动态载荷，不得已对其引入假设或采用类比，从而导致结构动力学分析结果的可信度大为下降。因此，我们迫切需要获得实际结构的动态载荷，由此产生了研究结构动态载荷识别技术的初衷。

结构动态载荷识别技术是根据已建立的结构动力学模型和实测的结构动态响应来反求作用在结构上的动态载荷，这是比结构动力学分析更为困难的第二类动力学逆问题，而第一类动力学逆问题则是指结构动力学参数辨识。该问题的困难在于动载荷在空间具有分布性、在时域具有非平稳性、在频域具有宽带性等，这使得待处理的问题往往是欠定的、病态的。

自20世纪90年代起，张方教授迎难而上，潜心研究结构动态载荷识别技术，尤其是复杂结构的分布动态载荷识别理论和方法。他建立了令人耳目一新的动态载荷位置识别理论，先后提出了多种行之有效的分布动态载荷识别方法，涵盖了时域、频域和随机动态载荷的识别，在《振动工程学报》、《应用力学学报》等重要学术期刊上发表了一系列学术论文。更为可喜的是，他提出的识别方法成功地应用于我国多种飞行器研制工程，解决了工程中的实际问题。因此，他多次获得部级科学技术奖。

现代工程结构正朝着大型化、复杂化和智能化方向发展，不断呈现新的结构动力学问题，解决这些问题的基础之一是掌握行之有效的动态载荷识别技术。至今，国内尚没有介绍结构动态载荷识别技术的著作。张方教授所著的《工程结构动载荷识别方法》系统阐述了结构

动态载荷识别技术，其内容全部源于他多年来在该领域从事研究和培养人才的成果，反映了结构动态载荷识别研究的最新进展。该书逻辑严谨，内容翔实，理论方法与工程实例相结合，是一部高水平学术专著。

当我阅读本书书稿时，透过文字、公式和曲线看到的是张方教授长达20年在该领域潜心研究的画面。我钦佩他知难而进从事这一研究的勇气，欣赏他理论联系实际的风格，祝贺他厚积薄发所取得的成就。

是为序。

中国科学院院士
中国力学学会理事长

2011年5月于北京

前　言

随着科学技术的发展，各学科的发展分支越来越细，内容越来越专业，研究的层次也越来越深入。本书研究的内容就是根据振动力学逆问题的发展而发展起来的一个新的研究分支。计算机性能的日益提高及其广泛应用，为解决振动逆问题提供了有力的工具，而结构有限元技术的研究日渐成熟，更是为研究振动逆问题开拓了新的思路。

本书是在南京航空航天大学多年研究振动逆问题中动载荷识别的研究成果的基础上整理和发展而来的。其研究主线遵循从简单到复杂的思路，研究对象从单自由度系统、多自由度系统到连续无限自由度系统再到复杂工程结构，研究模型从单点动载荷识别、多点动载荷识别到一维分布动载荷识别再到多维分布动载荷识别，研究方法从频域、时域到广义正交域。

全书共分为 8 章。第 1 章介绍了动载荷识别已有的研究成果和研究方法；第 2 章介绍了单自由度系统的动载荷识别问题，分别从频域、广义正交域和小波域介绍了动载荷识别模型；第 3 章介绍了多自由度系统的动载荷识别模型，包括动载荷量值的识别和位置的识别；第 4 章和第 5 章的内容是本书的核心，第 4 章介绍了连续无限自由度系统的动载荷识别问题，包括一维连续系统和二维连续系统的动载荷识别模型；第 5 章以解决复杂工程结构动载荷识别问题为出发点，利用有限元技术，将矩量法运用到动载荷识别中，并介绍了复杂结构动载荷标定的关键技术；第 6 章介绍了特殊分布动载荷——移动载荷的识别及其工程化方法；第 7 章介绍了随机动载荷的识别问题；第 8 章

介绍了两种特殊结构,即圆柱形薄壁结构和旋转结构的动载荷识别问题。

本书由张方教授主编并定稿,指导第 2 章～第 8 章等内容的研究并完成章节内容的编写,秦远田协助完成。张勇成、耿苗、付春涛完成第 4、5 章的部分内容的研究,姜金辉完成第 7 章部分内容的研究,徐梅完成第 6、8 章部分内容的研究。侯有政承担了插图绘制工作,蒋祺对本书进行了校正。

陈国平教授和王轲副教授对本书提出了诸多有益的建议,在此表示衷心的感谢。

本书出版得到了南京航空航天大学研究生院教材资助项目的资助。

限于作者水平,书中错误和不足之处在所难免,敬请读者不吝指正。

作 者

目　录

第1章 结构动力学中的逆问题

一般的振动问题由外激励(输入)、振动结构特性(系统)和结构响应(输出)三部分组成,根据研究目的不同,可将一般振动问题分为:①正问题,已知激励和振动结构参数,求系统响应;②已知激励和响应,求系统参数;③已知系统和响应,求激励。本章首先介绍结构模态分析理论,然后重点介绍结构动力学中的两类逆问题,即模态参数识别和动载荷识别问题。

1.1 结构模态分析理论

1.1.1 振动中的三类问题

1. 正问题

正问题即已知激励和振动结构,求系统响应。这类问题是振动中的第一类问题,也称为振动的正问题,即系统结构动力响应分析。这是研究得最早、最多的一类振动问题。当人们发现仅由静力分析不能满足产品设计要求时,便开始详细研究基于动力学理论的系统动力响应问题,根据已知的载荷条件,对振动结构进行简化而得到可求解的数学模型,再通过一定的数学方法求解得出振动结构上关于点的位移、应力、应变等结果,以此为依据对已设计好的振动结构进行考核。不满足动态设计要求时,需修改结构。这一基本分析过程至今仍广泛用于工程问题中,特别是基于线性模型假设的振动理论,已发展至十分成熟的阶段,而许多工程问题应用这一理论能得到相当满意的结果。

求解系统动力响应最成功、最实用的方法莫过于有限元分析法(FEM)。通过对振动结构的离散化并考虑适当的边界条件和连接条件,可以很容易地求解各种复杂结构在复杂激励作用下的响应。如果模型合理,能得到比较满意的结果。这为振动理论的实用化创造了最有利的条件,特别是仅根据图纸便可以十分方便地得到振动结构修改后的动态效果。

2. 逆问题一

逆问题一即已知激励和响应,求系统参数。这是振动问题的第一类反问题,称为系统识别(辨识)。这一类问题的提出实际是源于第一类基本问题,尽管已

知激励和振动结构可求得响应，但许多情况下响应结果并不满足要求，需要修改结构。这时结构修改往往只能凭经验，带有很大的盲目性，不仅效果常常不满意，而且效率也很低，经常反复多次才能达到基本满意的结果。有限元法是进行结构修改的有力工具，然而有限元初始建模往往存在较大误差。鉴于此，人们开始探索根据激励和响应反推振动结构参数的规律和方法。对大多数问题，输入、系统和输出三者有着确定性的关系，只有少数非线件问题，这种确定性关系才不存在。因此，人们以一定假设(如线性、定常、稳定假设)为前提，以一定理论(如线性振动理论)为基础研究得到了系统重构(识别)的多种方法。当然，这些方法的实施还有赖于其他若干种理论和方法。

经常把一个系统(振动结构)模型分成三种：

(1) 物理参数模型:以质量、刚度、阻尼为特征参数的数学模型，这三种参数可完全确定一个振动系统。

(2) 模态参数模型:以模态频率、模态向量(振型)和衰减系数为特征参数的数学模型与以模态质量、模态刚度、模态阻尼、模态矢量(留数)组成的另一类模态参数模型，这两类模态参数都可完整地描述一个振动系统。

(3) 非参数模型:频响函数或传递函数、脉冲响应函数是两种反映振动系统特性的非参数模型。

根据上述分类方法，系统识别也分为三种：

(1) 物理参数识别:以物理参数模型为基础，以物理参数为目标的系统识别方法，称为物理参数识别，这是进行结构动力修改的基础。

(2) 模态参数识别:以模态参数模型为基础，以模态参数为目标的系统识别称为模态参数识别，模态参数较物理参数更能从整体上反映系统的动态固有持性，进行模态参数识别是进行系统识别的基本要求，也是进行物理参数识别的基础，实际上许多问题做到模态参数识别即可达到目的，模态参数识别是模态分析的主要任务。

(3) 非参数识别:即根据激励和响应确定系统的频响函数(或传递函数)和脉冲响应函数。一般来讲，非参数模型的辨识不是进行系统识别的最终目的，但可通过非参数模型进一步确定模态参数或物理参数。

以上三种系统识别的关系是从已知激励和响应求系统的角度论述的。事实上，两种模型等价，从一种模型可以确定另外两种模型，如从系统的物理参数模型可得到模态参数模型，进而导出非参数模型，这实际是振动理论的基本内容之一，也是进行系统识别的理论基础。

3. 逆问题二

逆问题二即已知系统和响应，求激励。这是另外一种振动反问题。如车、

船、飞机的运行，地震、风、波浪引起的建筑物振动等问题，在这些问题中，已知振动结构并较容易测得振动引起的动力响应，但激励却不易确定。为进一步研究在这些特定激励下原振动结构及新振动结构的动力响应，需要确定这些激励。当然，大多数情况下需用统计特性描述，这样的问题通常称为环境预测或环境模拟。另外一些问题，如旋转机械的振动、爆炸冲击引起的振动等，也难以知道激励情况，需通过结构和响应反推激励。故这类问题也称载荷识别。

1.1.2 模态分析概述

一般地，以振动理论为基础、以模态参数为目标的分析方法，称为模态分析。更确切地说，模态分析是研究系统物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系，并通过一定手段确定这些系统模型的理论及其应用的一门学科，振动结构模态分析则是指对一般结构所做的模态分析。

按照振动结构非线性程度大小，可将系统简化为线性系统和非线性系统。因此，所进行的系统识别也有线性系统识别和非线性系统识别之分。以往的模态分析均限于线性系统即线性模态分析。近几年来不断有人提出并研究非线性模态分析的问题，但远远未达到线性模态分析的成熟地步。由于线性模态分析在处理非线性系统时存在较大误差，相信基于非线性振动理论的非线性模态分析将会越来越得到重视。

根据研究模态分析的手段和方法不同，模态分析分为理论模态分析和实验模态分析。理论模态分析或称模态分析的理论过程，是指以线性振动理论为基础，研究激励、系统、响应三者的关系；实验模态分析又称模态分析的实验过程，是理论模态分析的逆过程。首先，实验测得激励和响应的时间历程，运用数字信号处理技术求得频响函数（传递函数）或脉冲响应函数，得到系统的非参数模型；其次，运用参数识别方法，求得系统模态参数；最后，如果有必要，进一步确定系统的物理参数。因此，实验模态分析是综合运用线性振动理论、动态测试技术、数字信号处理和参数识别等手段，进行系统识别的过程。

模态参数识别是实验模态分析的核心。模态参数识别已发展有多种成熟的方法，最常用的方法是基于最小二乘法的曲线拟合法。其含义是，根据理论模态分析选择适当的数学模型，使测得的实验模型与数学模型之差最小，按照不同的非参数模型，模态参数识别分为频域模态参数识别和时域模态参数识别。以频响函数（传递函数）为基础的参数识别称为频域参数识别；以时域信号（脉冲响应函数或自由振动响应）为基础的参数识别称为时域参数识别。频域法已发展得相当成熟、实用。时域法由于具有较大的技术难度，正是目前学者研究的热点之一，识别方法有待进一步完善。时域识别方法主要应用于脉冲激励响应和自然

激励响应的工程背景。

在识别除振型外的其他模态参数时，按照使用响应信号的数目分为局部识别和整体识别两种。按照激励和响应的数目分为单输入单输出(SISO)识别法、单输入多输出(SIMO)识别法和多输入多输出(MIMO)识别法。SISO属于局部识别，SIMO和MIMO属于整体识别。在SISO频域模态参数识别中，按照模态密集程度不同，可分为单模态识别和多模态识别。前者将待识别的各阶模态看作与其他模态独立的单自由度系统，适用于阻尼较小、模态较分散的情形；后者将待识别的几阶模态看作耦合的，并考虑拟合频段以外的模态影响。对于阻尼较大、模态较密集的情况，必须用多模态参数识别法。

在模态分析中，阻尼是一个较难处理的问题。根据结构性质不同，常用到粘性比例阻尼、一般粘性阻尼、结构比例阻尼与结构阻尼四种阻尼模型。在不同阻尼模型下，振动系统模态参数的性质不同。根据模态矢量是实矢量还是复矢量，振动系统分为实模态系统和复模态系统。无阻尼和比例阻尼系统属于实模态系统，而结构阻尼和一般粘性阻尼系统属于复模态系统。因此，对应系统的模态分析有实模态分析和复模态分析两种。

经过半个多世纪的发展，模态分析已经成为振动工程中一个重要的分支，早在20世纪四五十年代，在航空工业中就采用共振实验确定系统的固有频率。60年代，发展了多点单相正弦激振、正弦多频单点激励，通过调力调频分离模态，制造出商用模拟式频响函数分析仪。60年代后期到70年代，出现了各种瞬态和随机激励、频域模态分析识别技术。随着数字式动态测试技术和计算机技术的飞速发展，使得以单入单出及单入多出为基础识别方式的模态分析技术普及到各个工业领域，模态分析得到快速发展并日趋成熟，商用数字分析仪及软件大量出现。80年代后期，主要是多入多出随机激振技术和识别技术得到发展。

1.1.3 模态分析理论

振动系统的机械导纳，亦即频响函数，包含了振动系统动态特性的全部信息，由此反映了系统本身的固有特性，与外界干扰力形式无关。机械导纳的表示形式很多，下面用拉普拉斯变换形式来表示。

1. 系统的机械导纳

1) 单自由度粘性阻尼系统的机械导纳

单自由度系统的位移导纳频响函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + \mathrm{j}\omega c} \tag{1.1.1}$$

如果用拉普拉斯算子 s 来代替 $\mathrm{j}\omega$，则式(1.1.1)为

$$H(s)=\frac{1}{ms^2+cs+k}=\frac{1}{m}\frac{1}{s^2+2ns+\omega_n^2} \tag{1.1.2}$$

式中 $n=\frac{c}{2m}=\zeta\omega_n$，$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 为系统的固有频率，m、c、k 为系统的质量、刚度和阻尼。

当式(1.1.2)中 $s^2+2ns+\omega_n^2=0$ 时，$H(s)$将出现极值，则分母的两个根为

$$\begin{cases} s_1=p_1=-n+\mathrm{j}\omega_d \\ s_2=p_2=-n-\mathrm{j}\omega_d=s_1^* \end{cases} \tag{1.1.3}$$

s_2 是 s_1 的共轭复根，$\omega_d=\sqrt{\omega_n^2-n^2}$。因此，式(1.1.2)可以写成如下形式：

$$H(s)=\frac{1}{m}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_1^*)} \tag{1.1.4}$$

s_1 和 s_1^* 是两个极点，$H(s)$也可用留数的形式来表示：

$$H(s)=\frac{A}{s-s_1}+\frac{A^*}{s-s_1^*}=\frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{r}{(s-s_1)}-\frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{r^*}{(s-s_1^*)} \tag{1.1.5}$$

式中 $A=\frac{1}{2\mathrm{j}m\omega_d}$，$A^*=\frac{-1}{2\mathrm{j}m\omega_d}$，$r=r^*=\frac{1}{m\omega_d}$。

通常情况下，A、A^*、r 和 r^* 均为复数，而 $H(s)$的拉普拉斯逆变换 $h(t)=\frac{1}{m\omega_d}\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_d t)$，$h(t)$ 是单自由度系统的单位脉冲响应函数，它的包络线 $\frac{1}{m\omega_d}\mathrm{e}^{-nt}$ 与纵坐标轴的交点值即为 $\frac{1}{m\omega_d}=r$。同样，该系统的速度导纳和加速度导纳，也可以用上述极值和留数的形式来表示。

2) 多自由度系统的机械阻抗矩阵和导纳矩阵

多自由度系统可以用矩阵的形式来表示其运动微分方程为

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{f(t)\} \tag{1.1.6}$$

对上式进行拉普拉斯变换，并设初始条件：$\{u_0\}=\{\dot{u}_0\}=0$，则可得

$$[Z(s)]\{X(s)\}=\{F(s)\} \tag{1.1.7}$$

式中$[Z(s)]$为位移阻抗矩阵，其表示式为

$$[Z(s)]=(s^2[M]+s[C]+[K]) \tag{1.1.8}$$

阻抗矩阵的逆阵，即为系统导纳矩阵$[H(s)]$

$$[H(s)]=[Z(s)]^{-1}=(s^2[M]+s[C]+[K])^{-1} \tag{1.1.9}$$

其傅里叶变换形式为

$$[Z(\omega)]=([K]-\omega^2[M]+\mathrm{j}\omega[C]) \tag{1.1.10}$$

$$[H(\omega)] = ([K]) - \omega^2[M] + \mathrm{j}\omega[C])^{-1} \tag{1.1.11}$$

通常情况下，以导纳矩阵形式来表示更为方便。

2. 多自由度振动系统的模态分析

在实际结构中，由于多自由度系统的质量矩阵$[M]$、阻尼矩阵$[C]$和刚度矩阵$[K]$都不是对角阵，因为各阶振型之间是相互耦合的，这给振动系统的分析和测试工作带来很大困难。为了解决这一问题，近代发展了模态分析技术。

在多自由度振动系统各主振型之间，它们有一定的联系，主要表现为正交性。可以利用这一特性，通过适当的数学处理，以使广义坐标下的机械阻抗矩阵和导纳矩阵，转换为模态坐标下的阻抗矩阵和导纳矩阵，从而使$[M]$、$[C]$、$[K]$解耦成为对角阵，这样就可用解单自由度系统的方法来解多自由度系统的问题，从而使问题大大地简化。

1）多自由度系统的各阶主振型及其正交性

各阶主振型之间的正交性可以这样来描述，设式(1.1.6)中不计阻尼项，且$\{f(t)\}=0$，则为

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0 \tag{1.1.12}$$

设方程的解为

$$\{u\} = \{\varphi\}e^{\mathrm{j}\omega_n t} \tag{1.1.13}$$

式中$\{\varphi\}$为系统自由振动时的振幅向量，上式经过二次微分后代入式(1.1.12)，消去$e^{\mathrm{j}\omega_n t}$后得

$$([k] - \omega_k^2[m])\{\varphi\} = \{0\}$$

或

$$[k]\{\varphi\} = \omega_k^2[m]\{\varphi\} \tag{1.1.14}$$

解式(1.1.14)的问题，常称为特征值问题，要得到式(1.1.14)的非零解，则必须使其系数行列式等于零，即

$$\Delta(\omega_k^2) = \det([k] - \omega_k^2[m]) = 0 \tag{1.1.15}$$

式(1.1.15)称为特征方程或频率方程，将行列式$\Delta(\omega_k^2)$展开后，就可得到一个ω_k^2的n阶多项式，求解式(1.1.15)就可得到n个根。ω_{k1}^2、ω_{k2}^2、…、ω_{kn}^2称为特征值，开方后即可得到系统的n个固有频率$\omega_{kr}(r=1,2,\cdots,n)$，按大小依次排列为$\omega_{k1}\leqslant\omega_{k2}\leqslant\cdots\leqslant\omega_{kn}$。将任何一个特征值$\omega_{kr}^2$代回式(1.1.15)，都可求得一个相应的非零向量$\{\varphi^{(r)}\}$，称之为特征向量，每一个特征向量表示振动系统的一种振动形态，称为主振型或主模态。因此，对于n个自由度系统来说，就有n个固有频率和其相对应的n个主振型。对于某阶主振型来说，虽然振幅可以改变，但主振型的形态是确定的。

如果任选系统的二阶不同的主振型$\{\varphi^{(r)}\}$和$\{\varphi^{(s)}\}$，其相应的固有频率为ω_{kr}和ω_{ks}，由式(1.1.14)可得

$$[k]\{\varphi^{(r)}\}=\omega_{kr}^2[m]\{\varphi^{(r)}\} \tag{1.1.16}$$

$$[k]\{\varphi^{(s)}\}=\omega_{ks}^2[m]\{\varphi^{(s)}\} \tag{1.1.17}$$

在等式(1.1.16)的两端前乘$\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}$，等式(1.1.17)的两端前乘$\{\varphi^{(r)}\}^{\mathrm{T}}$得

$$\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{\varphi^{(r)}\}=\omega_{kr}^2\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{\varphi^{(r)}\} \tag{1.1.18}$$

$$\{\varphi^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{\varphi^{(s)}\}=\omega_{ks}^2\{\varphi^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{\varphi^{(s)}\} \tag{1.1.19}$$

$[m]$和$[k]$均是对称阵，故$[m]=[m]^{\mathrm{T}}$，$[k]=[k]^{\mathrm{T}}$。将式(1.1.19)两边转置，矩阵乘积的转置等于各矩阵转置且次序反逆，所以有

$$\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{\varphi^{(r)}\}=\omega_{ks}^2\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{\varphi^{(r)}\} \tag{1.1.20}$$

式(1.1.18)减去式(1.1.20)得

$$(\omega_{kr}^2-\omega_{ks}^2)\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{\varphi^{(r)}\}=0 \tag{1.1.21}$$

当$\omega_{kr}^2\neq\omega_{ks}^2$时，必有

$$\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{\varphi^{(r)}\}=0,r\neq s \tag{1.1.22}$$

这就是主振型关于质量的正交性。将式(1.1.22)代入式(1.1.20)可得

$$\{\varphi^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{\varphi^{(r)}\}=0,r\neq s \tag{1.1.23}$$

这就是主振型关于刚度的正交性。

2) 质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵的模态坐标变换

正是因为主振型对质量矩阵$[m]$和刚度矩阵$[k]$具有正交性，可用主振型组成的矩阵作为线性交换矩阵，对振动系统的原运动方程的坐标进行变换，同时使$[m]$和$[k]$对角化，从而使多自由度振动系统的分析简化。

将振动系统的n个主振型，每一个作为一列，依次排列在一个矩阵中，组成一个n阶方阵，称为模态矩阵或振型矩阵，即

$$[\varphi]=[\{\varphi^{(1)}\}\quad\{\varphi^{(2)}\}\cdots\{\varphi^{(n)}\}]=\begin{bmatrix}\varphi_1^{(1)} & \varphi_1^{(2)} & \cdots & \varphi_1^{(n)}\\ \varphi_2^{(1)} & \varphi_2^{(2)} & \cdots & \varphi_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_n^{(1)} & \varphi_n^{(2)} & \cdots & \varphi_n^{(n)}\end{bmatrix} \tag{1.1.24}$$

用上式作为变换矩阵，对系统的广义坐标$\{u\}$表达的运动方程

$$[m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{f(t)\} \tag{1.1.25}$$

作坐标变换

$$\{u\}=[\varphi]\{q\} \tag{1.1.26}$$