



全国硕士研究生入学统一考试

历届考题

名家解析

经济数学三

全国考研数学辅导专家组 组编

黄先开 曹显兵 编写
施明存 殷先军

2006



朝華出版社



全国硕士研究生入学

历届考题

名家解析

经济数学三

全国考研数学辅导专家组 组编

2006

 朝華出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学三 / 黄先开等编. —北京:朝华出版社,2005.3

(全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析)

ISBN 7-5054-1167-5

I. 经... II. 黄... III. 经济数学—研究生—入学考试—解题

IV. F224.0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009614 号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析:经济数学三

编 著 黄先开等

策划编辑 田 辉 谭隆全

责任编辑 韩文燕

责任印制 赵 岭

封面设计 东 方

出版发行 朝华出版社

地 址 北京市车公庄西路 35 号

邮政编码 100044

电 话 (010)68433166(总编室)

(010)68413840/68433213(发行部)

传 真 (010)88415258(发行部)

印 刷 北京印刷一厂

经 销 全国新华书店

开 本 787×1092 毫米 1/16

字 数 380 千字

印 张 15.5

版 次 2005 年 3 月第 1 版 第 1 次印刷

版 别 平

书 号 ISBN 7-5054-1167-5/G·0566

定 价 22.00 元

出版说明

历届考题就是最好的模拟试题。因为,历史是一面镜子。懂得昨天,才会明白今天;掌握了历史和现实,才能驾驭未来。

本套丛书具有资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活的特点。首先,汇集了1990~2005年数学,1999~2005年政治理论,1995~2005年英语的历届研究生入学考试试题,包括政治理论、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四,共6册;其次,真正做到了逐题解析,分析详尽,解答规范,特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程,另外针对近几年的考题,做到先是分析——解题的基本思路、方法,然后是详解——详细、规范的答题过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。这种对命题思路、解题的重点、难点进行深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,至今已有19年,共命制试卷100余份,数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治理论方面知识、能力和水平的要求,展示出统考以来三门基础课考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想,是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届,所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上,近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如:2005年数学一第一大题第(3)题与1991年数学一第三大题第(2)题,2005年数学一第一大题第(4)题与2004年数学一第三大题第(17)题,2005年数学一第(16)题与1990年数学一第四大题,2005年数学一第(20)题与1996年数学一第九大题,2005年数学一第(22)题与1991年数学一第十一大题,2005年数学二第(5)题与2003年数学二第一大题第(1)题,2005年数学二第(8)题与1994年数学一第一大题第(4)题,2005年数学二第(22)题与2004年数学四第二大题第(9)题,2005年数学三、四第(4)题与2002年数学三第一大题第(4)题,2005年数学三第(18)题与2003年数学三第六大题,2005年数学四第(21)题与2001年数学一第十大题;2004年数学一第(17)题与1996年数学一第四大题,2004年数学一第(23)题与1997年数学一第十大题,2004年数学一第(20)题与2003年数学三第九大题;2004年数学一第(15)题与1993年数学一第六大题,2004年数学一第(11)题与1997年数学一第八大题,2004年数学一第(12)题与1993年数学一第二大题第

(5)题,2004年数学二第(9)题与2002年数学二第一大题第(4)题,2004年数学二第(22)题与2003年数学三第九大题,2004年数学三、四第(18)题与1992年数学四、2002年数学四第七大题,2004年数学三第(19)题与2002年数学第七大题,2004年数学三第(20)题与2000年数学三、四第九大题,2004年数学四第(21)题与1997年数学三第十大题,2004年数学一、三、四第(22)题与2003年数学四第十二大题等等都是相同或非常相似的,且解题思路几乎完全一样,可见仅在最近2年的数学考题中就有多达20余道题是与往届考题雷同的。考生若把这些历届考题全部消化巩固,将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此,广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历届考试资料作为参考,共享这些优秀的试题。编者多年来一直在做这方面的收集、整理工作,现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本套丛书按时间顺序成套题形式编排,目的是便于广大考生完成基础知识复习后进行模拟训练。尽管每题均有详尽规范的解答,但不希望读者轻易去查看答案和评注,而一定要自己先动手去进行演练。通过做成套的真题,一方面达到深化知识理解,提升思维水平的目的;另一方面可掌握做题节奏和调整考试心态。可能的话,相邀几个准备考研的朋友,一起在规定的三个小时之内真刀真枪地进行一番演习,刻意给自己制造一个紧张的气氛,去体会那种让人怦怦心跳的考试环境。通过对历年试题的真实模拟,把握好做题的节奏,分配好各部分的时间,从而不断提升自己的应试水平。

在每套题做完后,再回过头去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的思路和解答过程与书中的答案有什么异同,了解自己在基础知识、分析思路及求解推理过程中存在哪些不足,与前面已做过的题比较是否有了提高……等等,注意这样的归纳总结过程是必不可少的,其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来后,在掌握基本概念、基本理论和基本方法上,在灵活运用知识和思维能力的训练上,相信读者一定会有一个质的提高。

由于时间比较仓促,难免还有不足之处,恳请广大读者朋友批评指正,以使本系列丛书能不断完善。

全国考研数学辅导专家组

目 次

1990 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(1)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(4)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(15)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(18)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(30)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(33)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(44)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(47)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(56)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(59)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(69)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(72)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(82)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(85)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(97)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(100)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(112)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(115)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(127)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(130)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(144)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(147)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(160)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(163)

2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(175)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(178)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(190)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(194)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(208)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(212)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题	(226)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注	(230)

1990 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = b$, 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $A =$ _____.

(3) 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 所围成的平面图形的面积为 _____.

(4) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = -a_3, \\ x_4 + x_1 = a_4, \end{cases}$$

有解, 则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件 _____.

(5) 一射手对同一目标独立地进行四次射击, 若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$, 则该射手的命中率为 _____.

二、选择题(本题满分 15 分, 每小题 3 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

- (A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

【 】

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$, 且有 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为非零常数, 则

- (A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.
(B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = a$.
(C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = b$.
(D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = ab$.

【 】

(3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不为零向量.
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

- (C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性无关.

【 】

(4) 设 A, B 为两随机事件, 且 $B \subset A$, 则下列式子正确的是

- (A) $P(A+B) = P(A)$. (B) $P(AB) = P(A)$.
 (C) $P(B|A) = P(B)$. (D) $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

【 】

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

- (A) $X = Y$. (B) $P\{X = Y\} = 0$.
 (C) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$. (D) $P\{X = Y\} = 1$.

【 】

三、计算题(本题满分 20 分, 每小题 5 分)

(1) 求函数 $I(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1} dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值.

(2) 计算二重积分 $\iint_D x e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是曲线 $y = 4x^2$ 和 $y = 9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

(4) 求微分方程 $y' + y \cos x = (\ln x) e^{-\sin x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告, 根据统计资料, 销售收入 R (万元) 与电台广告费用 x_1 (万元) 及报纸广告费用 x_2 (万元) 之间的关系有如下经验公式:

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

- (1) 在广告费用不限的情况下, 求最优广告策略;
 (2) 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0, c)$ 内存在且单调减少; $f(0) = 0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式:

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b),$$

其中常数 a, b 满足条件 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$.

六、(本题满分 8 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) a, b 为何值时, 方程组有解?

(2) 方程组有解时, 求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时, 求出方程组的全部解.

七、(本题满分 5 分)

已知对于 n 阶方阵 A , 存在自然数 k , 使得 $A^k = O$, 试证明矩阵 $E - A$ 可逆, 并写出其逆矩阵的表达式 (E 为 n 阶单位阵).

八、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

九、(本题满分 4 分)

从 0, 1, 2, ..., 9 十个数字中任意选出三个不同的数字, 试求下列事件的概率:

$$A_1 = \{\text{三个数字中不含 } 0 \text{ 和 } 5\};$$

$$A_2 = \{\text{三个数字中不含 } 0 \text{ 或 } 5\}.$$

十、(本题满分 5 分)

一电子仪器由两个部件构成, 以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位: 千小时), 已知 X 和 Y 的联合分布函数为:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & \text{若 } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否独立?

(2) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 a .

十一、(本题满分 7 分)

某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩(百分制) 近似服从正态分布, 平均成绩为 72 分, 96 分以上的占考生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表]

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试题分析、详解及评注

一、填空题

(1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{2}$.

[分析] 先有理化再求极限.

[详解]
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}} = 2. \end{aligned}$$

[评注] 本题主要考查求极限的基本方法.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = b$, 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $A = \underline{a + b}$.

[分析] 由函数连续的条件知, 先求 $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$, 然后令 $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = A$ 即得.

[详解] $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0),$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} = A,$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} \stackrel{(\frac{0}{0} \text{ 型})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} [f'(x) + a \cos x] = f'(0) + a \cos 0 = b + a,$$

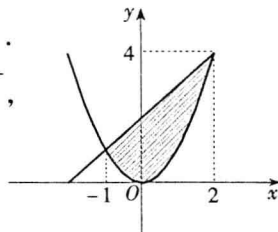
从而 $A = a + b$.

[评注] 本题主要考查分段函数在分界点处连续的概念及极限运算.

(3) 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\frac{9}{2}}$.

[分析] 先求两曲线的交点, 画草图, 确定积分变量和积分区间, 直接积分即得.

[详解] 所围平面图形的面积为



$$S = \int_{-1}^2 (x+2-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

[评注] 本题主要考查用定积分来计算平面图形的面积.

(4) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = -a_3, \\ x_4 + x_1 = a_4, \end{cases}$$

有解, 则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件 $\underline{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0}$.

[分析] 方程组有解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}})$, 对增广矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 作初等行变换即得.

[详解 1] 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯型

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1 + a_4 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

可知 $r(\mathbf{A}) = 3$, 原方程有解, 则 $r(\bar{\mathbf{A}}) = r(\mathbf{A}) = 3$. 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

[详解 2] 若线性方程组有解, 则其系数矩阵 $\mathbf{A}$ 与增广矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 有相同的秩.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right).$$

$$\text{因 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 知 } \mathbf{A} \text{ 的秩小于 } 4, \text{ 所以 } \bar{\mathbf{A}} \text{ 的秩也应小于 } 4, \text{ 从而知}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

[评注] 本题主要考查非齐次方程组有解的条件. 常规方法是将增广矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 施行初等变换(可以作列变换, 因为只须判定解的情况, 即只须知道 $\mathbf{A}$ 和 $\bar{\mathbf{A}}$ 的秩)变为阶梯型矩阵, 得 $r(\mathbf{A})$ 和 $r(\bar{\mathbf{A}})$, 即知有解的条件.

(5) 一射手对同一目标独立地进行四次射击,若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$,则该射手的命中率为 $\frac{2}{3}$.

[分析] 这是一个4重伯努利试验概型,可利用二项分布求解.

[详解] 设该射手的命中率为 p , X 表示射手对同一目标独立进行四次射击中命中目标的次数,则 $X \sim B(4, p)$,由题设

$$\frac{80}{81} = P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1 - p)^4,$$

$$\text{即 } (1 - p)^4 = 1 - \frac{80}{81} = \frac{1}{81},$$

$$\text{解得 } p_1 = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{4}{3} \text{ (舍去)}. \text{ 故应填 } \frac{2}{3}.$$

[评注] 本题主要考查伯努利概型、对立事件的概率计算.

二、填空题

(1) 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是

- (A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

【 】

[答] 应选(B).

[分析] 直接验证即可.

[详解 1] 令 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} (n = 1, 2, 3, \dots)$,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi + \frac{\pi}{4}) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \infty.$$

因此 $f(x)$ 是无界函数,故应选(B).

[详解 2] 可用排除法.

$$\text{由于 } f(-x) = -x \cdot \tan(-x) e^{\sin(-x)} = x \tan x e^{-\sin x} \neq f(x),$$

故 $f(x)$ 不是偶函数,显然 $f(x)$ 也不是周期函数.

$$\text{而 } x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^- \text{ 时, } f(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+ \text{ 时, } f(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^- \text{ 时, } f(x) \rightarrow +\infty,$$

故 $f(x)$ 也不是单调函数.所以只有(B)项正确.

[评注] 本题主要考查函数的基本性质:奇偶性、周期性、单调性、有界性.

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$,且有 $f'(0) = b$,其中 a, b 为非零常数,则

- (A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.
 (B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导,且 $f'(1) = a$.
 (C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导,且 $f'(1) = b$.
 (D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导,且 $f'(1) = ab$.

【 】

[答] 应选(D).

[分析] 利用导数定义求解即可.

[详解] 由导数的定义知

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = af'(0) = ab. \end{aligned}$$

所以应选(D).

[评注] 本题考查函数在一点的可导性.

(3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不为零向量.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性无关.

【 】

[答] 应选(C).

[分析] 由向量组线性无关的定义即得.

[详解1] (C) 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件. (A), (B), (D) 均是必要条件, 而非充分条件. 如向量组 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ 线性相关, 但 (A), (B), (D) 均成立, 所以应选(C).

[详解2] 易举反例说明 (A)、(B)、(D) 均不成立, 只有 (C) 为正确答案. 事实上, 可用反证法, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则至少有一个向量可用其余向量线性表示, 这与 (C) 矛盾.

[评注] 本题考查向量组线性无关的概念和充分必要条件.

(4) 设 A, B 为两随机事件, 且 $B \subset A$, 则下列式子正确的是

(A) $P(A+B) = P(A)$.

(B) $P(AB) = P(A)$.

(C) $P(B|A) = P(B)$.

(D) $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

【 】

[答] 应选(A).

[分析] 由事件之间的关系即得.

[详解] 由 $A \supset B$, 得 $A+B=A$, 因而 $P(A+B) = P(A)$.

[评注] 对随机事件 A, B , 若 $B \subset A$, 则有

(1) $A+B=A$; (2) $AB=B$; (3) $B-A=\emptyset$; (4) $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

(A) $X = Y$.

(B) $P\{X = Y\} = 0$.

(C) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$.

(D) $P\{X = Y\} = 1$.

【 】

[答] 应选(C).

[分析] 关键是正确分解事件 $\{X = Y\}$.

[详解] 由 X 与 Y 相互独立知

$$\begin{aligned} P\{X = Y\} &= P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\} \\ &= P\{X = -1\} \cdot P\{Y = -1\} + P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[评注] (1) 本题主要考查二维离散型随机变量的概率计算.

(2) 注意 X 与 Y 同分布时, 不一定有 $X = Y$ 或 $P(X = Y) = 1$.

三、计算题

(1) 求函数 $I(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1} dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值.

[分析] 先求出 $I(x)$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值点, 再代入 $I(x)$ 中计算定积分即可.

[详解] $I'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\ln x}{(1-x)^2} > 0, x \in [e, e^2]$,

知 $I(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上严格单增, 故 $I(x)$ 在 $x = e^2$ 时取得最大值, 最大值为

$$\begin{aligned} I(e^2) &= \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt = - \int_e^{e^2} \ln t d\left(\frac{1}{t-1}\right) = - \frac{\ln t}{t-1} \Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= - \frac{2}{e^2-1} + \frac{1}{e-1} + \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = - \frac{2}{e^2-1} + \frac{1}{e-1} + \ln \frac{t-1}{t} \Big|_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{e+1} + \ln \frac{e+1}{e} = \ln(1+e) - \frac{e}{1+e}. \end{aligned}$$

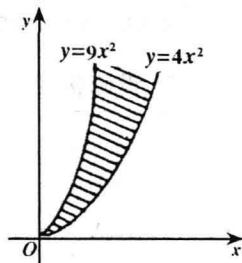
[评注] 本题主要考查变上限积分的求导、函数最值及定积分的计算.

(2) 计算二重积分 $\iint_D x e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是曲线 $y = 4x^2$ 和 $y = 9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

[分析] 本题是一简单广义二重积分问题, 先画出草图, 再确定积分次序和积分限.

[详解] 由右图可知

$$\begin{aligned} \iint_D x e^{-y^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{\frac{1}{9}y}^{\frac{1}{4}y} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{9}y\right) e^{-y^2} dy \\ &= \frac{5}{72} \int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy = - \frac{5}{144} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} d(-y^2) \\ &= - \frac{5}{144} e^{-y^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{5}{144}. \end{aligned}$$



[评注] 本题主要考查广义二重积分的计算.

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

[分析] 根据求幂级数收敛域的常规方法即得.

[详解] 令 $a_n = \frac{1}{n^2}$, 则

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

因此当 $-1 < x-3 < 1$, 即 $2 < x < 4$ 时级数收敛.

当 $x=2$ 时, 得交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, 它满足莱布尼茨条件, 故收敛;

当 $x=4$ 时, 得 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $p=2 > 1$, 故收敛;

从而知原级数的收敛域为 $[2, 4]$.

[评注] 本题主要考查幂级数收敛域的求法. 注意求出收敛半径后, 还须讨论端点处的敛散性.

(4) 求微分方程 $y' + y \cos x = (\ln x) e^{-\sin x}$ 的通解.

[分析] 本题为一阶线性微分方程, 可直接由公式求通解.

[详解] 由一阶线性非齐次方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \cos x dx} \left[\int (\ln x) e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx + C \right] = e^{-\sin x} \left(\int \ln x dx + C \right) \\ &= e^{-\sin x} (x \ln x - x + C). \end{aligned}$$

[评注] 本题是求解基本的一阶线性微分方程, 关键是判断方程的类型, 写出通解公式.

四、某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告, 根据统计资料, 销售收入 R (万元) 与电台广告费用 x_1 (万元) 及报纸广告费用 x_2 (万元) 之间的关系有如下经验公式:

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下, 求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略.

[分析] 利润函数为 $L = R - (x_1 + x_2)$, 问题(1), (2) 就是求利润函数的极值和条件极值问题.

[详解] (1) $L = R - (x_1 + x_2)$

$$= 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2 - (x_1 + x_2)$$

$$= 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1 - 8x_2 + 13 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -8x_1 - 20x_2 + 31 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_1 = 0.75, x_2 = 1.25$.

利润函数 $L = L(x_1, x_2)$ 在 $(0.75, 1.25)$ 处的三个二阶偏导数分别为

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -4, B = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = -8, C = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -20.$$

由于 $B^2 - AC = 64 - 80 = -16 < 0, A = -4 < 0$,

所以函数 $L(x_1, x_2)$ 在 $(0.75, 1.25)$ 处达到极大值, 亦即最大值.

(2) 若广告费用为 1.5 万元, 则需求利润函数 $L(x_1, x_2)$ 在 $x_1 + x_2 = 1.5$ 时的条件极值.

作拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \lambda) &= L(x_1, x_2) + \lambda(x_1 + x_2 - 1.5) \\ &= 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1.5), \end{aligned}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = -4x_1 - 8x_2 + 13 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = -8x_1 - 20x_2 + 31 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1.5 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_1 = 0, x_2 = 1.5$.

因驻点惟一, 且实际问题必有最大值, 故函数 $L(x_1, x_2)$ 在 $(0, 1.5)$ 处取得最大值, 即将广告费 1.5 万元全部用于报纸广告, 可使利润最大.

[评注] 本题主要考查常用经济函数、多元函数的极值和条件极值问题.

五、设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0, c)$ 内存在且单调减少; $f(0) = 0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式:

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b),$$

其中常数 a, b 满足条件 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$.

[分析] 在 $[0, a]$ 与 $[b, a+b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理.

[详解] 当 $a = 0$ 时, $f(0) = 0$, 有 $f(a+b) = f(b) = f(a) + f(b)$.

当 $a > 0$ 时, 在 $[0, a]$ 和 $[b, a+b]$ 上分别应用拉格朗日定理有

$$f'(\xi_1) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{f(a)}{a}, \quad \xi_1 \in (0, a),$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(a+b) - f(b)}{(a+b) - b} = \frac{f(a+b) - f(b)}{a}, \quad \xi_2 \in (b, a+b).$$

显然 $0 < \xi_1 < a \leq b < \xi_2 < a+b \leq c$. 因 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 上单调减少, 故 $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$. 从而有

$$\frac{f(a+b) - f(b)}{a} \leq \frac{f(a)}{a}.$$

因为 $a > 0$, 所以有

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b),$$

总之, 当 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$ 时,

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

总成立.