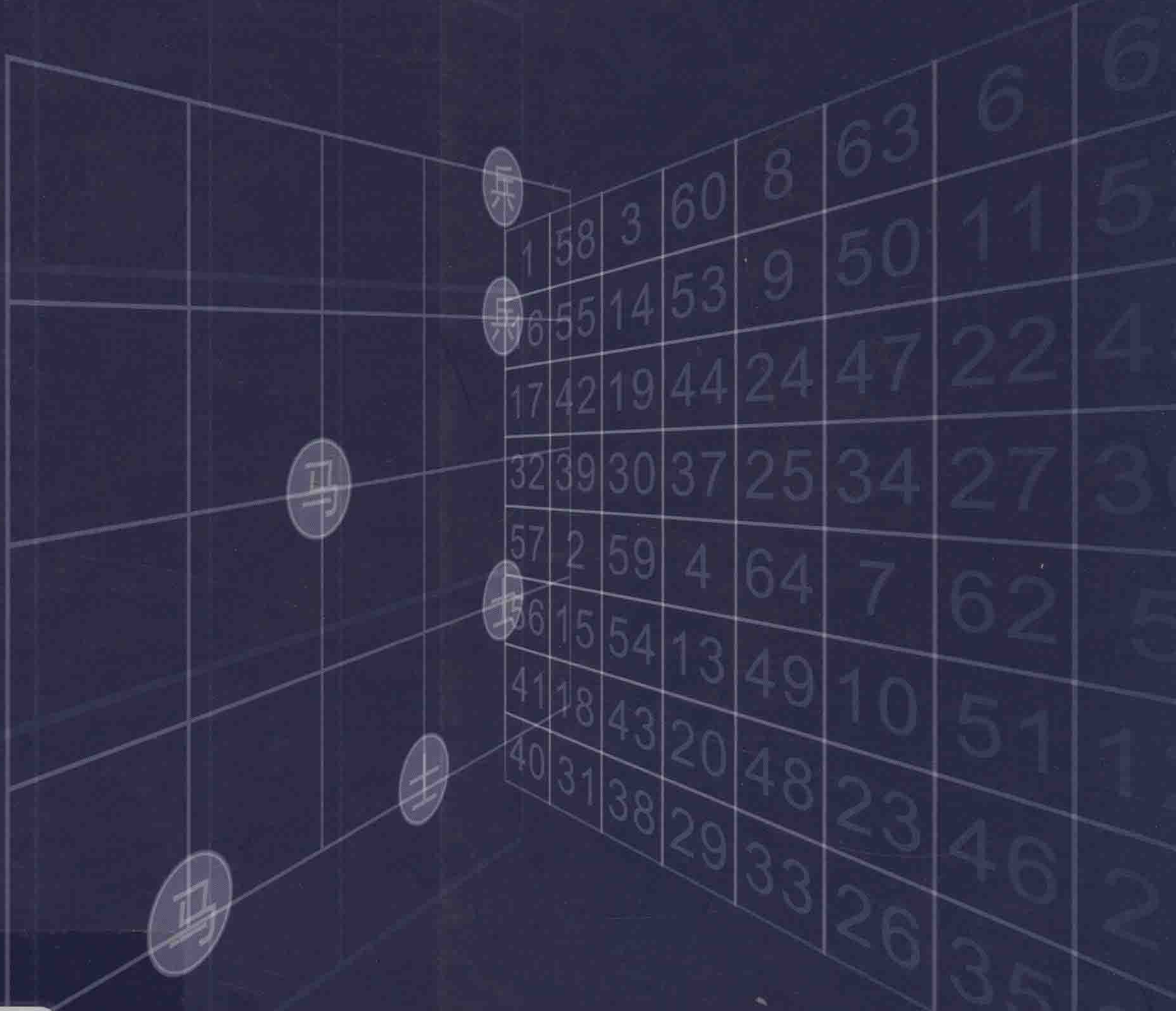
幻方的构造与数量

柳光轩 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

幻方的构造与数量

柳光轩 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

幻方的构造与数量／柳光轩著. —杭州：浙江大学出版社，2016. 3
ISBN 978-7-308-15629-5

Ⅰ.①幻… Ⅱ.①柳… Ⅲ.①数字—研究 Ⅳ.①01

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第041313号

内 容 简 介

幻方是以排列组合为基础的填数字游戏。作者采用中国象棋中的兵、士、马三只棋子的棋步法，构建各种类型的任意阶幻方，同时计算出幻方的数量。

由棋步法构建的幻方，已从二维平面幻方拓展到多维空间幻方，它们都具有哈密尔顿回路特征。

本书共8章，第1章至第6章叙述平面幻方，第7章叙述立体幻方，第8章叙述多维幻方。全书构造各种幻方1000多个，具有较强的逻辑性、趣味性和可读性。

本书适合大、中学校师生，特别是师范类院校师生阅读，也可供广大幻方爱好者参阅。

幻方的构造与数量

柳光轩　著

责任编辑　王　波
责任校对　陈　宇
封面设计　十木米
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路148号　邮政编码310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州金旭广告有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　11.25
字　　数　210千
版 印 次　2016年3月第1版　2016年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-15629-5
定　　价　39.00元

前　言

一

数学是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门学科。万事万物都有与其相应的数量概念，万事万物的变化都有与其相应的数量关系。数学就是由计算、度量来确定数量和数量关系。“数量和数量关系”这个概念在一切领域中之重要，与人们生活关系之密切，是不言而喻的。科学技术的发展离不开数学的应用，一切领域都要用到数学。正是数学的实用性和普适性，体现出数学的无穷魅力，这是一方面。另一方面，数学的魅力也来自数学的逻辑推理、缜密计算的思想方法对培养人的品质的功能。能通过抽象化的逻辑推理，形成思维的表达形式，能用缜密周详的逻辑推理达到对完美境界的追求，这样的人是聪明的人。数学就是教人变得聪明的一门大学问。由数学这门大学问所形成的数学文化是精神文明中的精华。数学文化的兴衰反映了精神文明程度的高低。一个具有智慧的民族，离不开数学文化的熏陶。

我们可以这样认为：自然科学求的是真，人文学科求的是善，艺术求的是美，而数学求的是智慧。一个民族中的人能有智慧，能求真，能向善，能求美，这样的民族将是多么美好多么优秀的民族啊！而真善美是智慧的结晶，人类文明的创造是依赖于人类的智慧，从这个意义上说，以求智慧为目标的数学是一门最伟大的学问。

人类文明的历史证明，最古老的文化是数学。数字产生于文字之前。人类的启蒙的起点是从学数学开始，教化孩子的第一课不是“识字”，而是教他“识数”。

本书研究的就是关于数字组合的一种学问，它属于数学，因此，本书是一本追求智慧的书。

关于数字组合的书可能是人类历史上最古老的书。而在中国的传统文化中，这种关于数字组合的书还曾成为经典书。

把从1到9这九个自然数，排成横三行、竖三列的方阵，如下图所示：

8	3	4
1	5	9
6	7	2

这样不同形式的方阵共有9！=362880(个)。然而在这362880个方阵中，要保证横三个、竖三个以及两条对角线上三个数之和都等于15，这样的方阵只有8个。

从1开始，往上数，共有n^2(n为正整数)个自然数，将它们一个个放在$n\times n$的方格之中，构成一个方阵，能保证这个方阵中的每行每列以及两条对角线上数字之和都相等，这种特殊的数字方阵，我们称之为幻方，含义即“梦幻的数字方阵”。由9个(3^2)自然数构成的幻方是最简单的幻方，它叫3阶幻方。在此之上有4阶幻方、5阶幻方……乃至n阶幻方。

关于幻方的数学文化在我国已有四千多年的历史。对于幻方的研究自古至今一直在中外各国进行着。有许多人还在玩着“幻方”。更多的人在谈论着有关幻方的话题。

一个仅仅是由1至9这九个自然数，让其自由组合，竟然可以形成362880个数字方阵，但经过有条件的组合，却只得到8个幻方。这就是从乱中求到了序。序就是规则、规矩。如何从混乱中求得秩序，这是一切领域存在的数学题目。

中国的古人将由九个数字组成的数字方阵用来作为占卦的天文仪器，称“太乙九宫占盘”。印度人曾将64个数字组成的数字方阵制成玉器挂件，作为王公贵族佩戴在身上的“护身符”。

而现代人的兴趣却在于好奇，觉得这一系列的数字构成的方阵呈现出的规则之美妙，吸引着人们去追求、去探索。于是人们就要破解这样的方阵究竟是如何构建的，以此来考验和展示自己的智慧。人类在不断地追求文明，幻方作为数学文化，就是在这种追求中流传下来的。

现代幻方组合理论及技术水平虽然达到了相当的高度，但迄今为止，人们还是不敢轻言已经揭示了幻方的秘密。那么什么是幻方的谜团？

二

幻方是以排列组合为基础的填数字游戏，它是一个均衡、对称、和谐、完美的数字迷宫。关于这个迷宫，目前还存在着两个谜团，一是幻方的构造方法，二是幻方的种类和数量。

迄今为止，构造幻方的方法已有十来种，幻方的组合理论也已达到了相当高的水平，但最后都未能揭开幻方的这两个谜团。

先说第一个谜团。

幻方源自中国，南宋杨辉是研究幻方的第一人。到了近代，中国人在研究幻方中却失去了优势。十多种幻方的构造方法都是由西方人发明创造的，有的方法还被冠上了西方人的名字。

“连续摆数法”是由法国驻泰国大使洛贝利(de Laloubere)从泰国带回法国而传播开来的,西方人称其为“暹罗法”。“阶梯法”是法国数学家巴赫特(Bachet de Mejiriac)创造的。“菱形法”则是剑桥大学数学家康韦(J. H. Conway)和意大利人瓦卡(Vacca)各自独立发明的。“连续摆数法”、“阶梯法”和“菱形法”都用来构造奇阶对称幻方。

为了能构建偶阶幻方,相继有了所谓“对称法”、“对角线法”和“倍增法”等方法。其中发明“倍增法”的弗如(Thakkura Phera)倒是印度数学家。1918 年法国数学家斯特雷奇(Ralph Strachey)曾发明了构造单偶阶幻方的方法。法国数学家拉伊尔(Phillipe de La Hire)运用基方、根方合成的方法来构造任意阶幻方,后来就把这种方法称为“拉伊尔法”。另一个数学家弗兰尼克尔(Frenicle)则用“镶边法”构造过任意阶幻方。

18 世纪,国际上曾流行用马步来构成 8×8 国际象棋棋盘上的幻方。斯泼里尼、杜德尼、大数学家欧拉用了 64 个连续马步,仅仅构成了一个半幻方,反倒是一个印度无名氏用“象飞马跳兵开道”的走法总算构成了一幅 8 阶完美幻方。

然而,所有的方法最终未能构建出所有幻方,幻方的构建问题直到今天还是一个谜团。

再说关于幻方数量的第二个谜团。

在研究幻方的历史上,研究各种幻方的数量问题的人颇为少见。而幻方的数量问题是一个难题,对其研究者寥若晨星,这就使这个谜团更加神秘。

最简单的 3 阶幻方,它的数量是容易确定的。因为 3 阶幻方只能做出一个对称幻方,它的同构幻方只有 8 个。4 阶幻方的情况也并不复杂。早在 1693 年,法国的弗兰尼克尔(Bernard Frenicle de Bessy)就得出了 4 阶幻方共有 880 个基本形式,总共有 $8\times880=7040$ 个。对于 5 阶幻方,尚没有人给出确切的数量。1973 年德国的理查德·许洛泼尔(Richard Schröppel)开发了一个程序,在 PDP-10 计算机上运行 100 小时后得出结论,5 阶幻方的基本形式有 275305224 个,即 2 亿 7 千 5 百多万个。笔者对 5 阶幻方的数量进行计算,得出的数量是:

普通幻方　　$8(3\times2\times5!)^2=4147200$

对称幻方　　$3\times2\times2^5\times2^2=768$

泛对角线幻方　　$16\times5^2\times5!=48000$

完美幻方　　$2^8\times5!\times2^2=122880$

对于 5 阶以上的幻方数量,至今没有人能做出确切的回答。计算机发展到今天已具有强大的功能,但在回答这个问题时也显得无能为力。

1998 年奥伦肖和勃利出版专著《最完美的泛对角线幻方:它们的构造方法及其数量》,通过“可逆方法”计算出了最完美幻方的数量。而笔者通过“新马步

法”，也计算出了最完美幻方的数量，指出了“可逆方法”的不足。两者的计算结果见表1。

表1 “可逆方法”与“新马步法”计算偶阶完美幻方数量的比较

完美幻方	奥伦肖与勃利(可逆方法)	柳光轩(新马步法)
4阶	48	2048
8阶	368640	3×2^{25}
12阶	2.22953×10^{10}	$5\times3^{10}\times2^{28}$
16阶	9.322433×10^{14}	$35\times3^{8}\times2^{51}$

为了弘扬传统的中国数学文化，提升幻方的国际水平，同时也在幻方的研究领域中向西方人提出挑战，笔者经过十多年的潜心研究和探索，在破解构建幻方谜团方面，创造了构建幻方的“棋步法”，它有以下三个创新。

1. 采用中国象棋中兵、士、马三只棋子的步法

在中国象棋中，兵、士、马三只棋子有平移、斜走、跳行三种代表性步法，选择兵、士、马三只棋子的步法，就形成了多种棋步构造方法，并赋予不同的棋步步长，进一步完善了构造方法。

2. 幻方边界的开放性

边界的开放性也可称为边界的连续性。国际上没有开发出成功的棋步法，原因之一是在于认为边界是封闭的，当棋步走到了边界处便折回到边界内侧。

边界的开放性是指边界的上下行、左右列是连续相接的，因此棋步可以跨越边界，如从上边界跳到下边界，从左边界跳到右边界，或者相反。

3. 构造过程中的周期性

国际上没有开发出成功的棋步法，原因之二在于忽视了棋步运行中的周期性，那种64个棋步一次走到底的构造方法，就导致找不到相应可遵循的规则，即使成功了也只能是特例，是一种巧合。

在本书创建的棋步法中，每编织 n 个元素作为一个周期，编织幻方是一个周期接着一个周期地按规则进行，这样不但一定能编织成幻方，而且能编织出所有的同类型的幻方。

用棋步法构造幻方有以下三大要素。

起始点：起始元素的所在位置；

编织步：编织幻方采用的棋步；

转换步：每个周期转换的棋步。

将幻方元素1、2、3、…、n^2 一步一步地走满 $n\times n$ 方阵，从而就构成了各种幻

方，其中：

士步法构造奇阶对称幻方、普通幻方；

马步法构造奇阶泛对角线幻方、完美幻方；

兵步法构造偶阶对称幻方、普通幻方；

新马步法构造偶阶泛对角线幻方、完美幻方。

棋步法基本上涵盖了西方人发明创造的十余种方法。士步法涵盖了连续摆数法、阶梯法、菱形法和拉伊尔法。马步法涵盖了对称法、对角线法、倍增法和"可逆方"法。于是用此方法构建的幻方就基本上包括了所有幻方，因此能基本上确定各种类型幻方的数量。笔者计算出了任意阶幻方的数量，见表 2。

表 2　幻方 n^2 的构造方法及其数量计算

幻方分类		构造方法	数量计算	
普通	奇阶	士步法	$8(t\cdot S\cdot n!)^2$	$n=2k+1$
	偶阶	兵步法	$2^{n+1}\cdot\frac{n}{2}!\cdot(C_h)^{\frac{n}{2}+1}\cdot(C_{n-2}^{\frac{n}{2}})^{\frac{n}{2}}$	$n=2(2k+1)$
对称	奇阶	士步法	$t\cdot S\cdot 2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2$	$n=2k+1$
	偶阶	兵步法	$(C_{n-2}^{\frac{n}{2}})^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{2}!\right)^2$	$n=4k$
泛对角线	奇阶	马步法	$16n^2\cdot n!$	$n=6k\pm1$
	偶阶	新马步法	$4(n-2)n^2\ \frac{n}{2}!$	$n=4k$
完美	奇阶	马步法 $E_c(\bar{n},\bar{n})$	$2^{n+3}\cdot n!\cdot\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2$	$n=6k\pm1$
	偶阶	新马步法 $n_H=\frac{n}{4}$	$2^{n+2}\cdot n^2\cdot\left(\frac{n}{4}!\right)^6\cdot\frac{n}{2}!$	$n=4k$

2013 年 5 月，江苏科学技术出版社出版了笔者的拙著《幻方与象棋》，该书所提出构建幻方的棋步法还仅是雏形。该书出版后的两年，笔者对幻方构建的研究又有了重大发现，这主要体现在两个方面：一是对士步法和马步法进行了有效的扩展；二是对幻方元素按周期进行了有序的排列。这样，既扩大了棋步法的应用范围，又修正了幻方数量的计算公式。在本书《幻方的构造和数量》中，笔者已对任意阶普通幻方、对称幻方、泛对角线幻方和完美幻方的构造方法及其数量做

了彻底整理。这种整理工作包含了从平面幻方、立体幻方到高维幻方，最终破解了幻方世界的两个谜团。

数学的创新是方法的创新，牛顿、莱布尼茨采用当弦趋向切线的斜率和连续级数求和的方法，创造了微积分学。笔者采用兵、士、马三只象棋的步法，总结出三大编织幻方的要素，创造了幻方的构建方法，确定了幻方的种类和数量，从这个意义上来说，笔者所著的这本《幻方的构造和数量》也可说是一门“幻方学”。

本书的出版得到了金烈侯先生的鼓励和帮助，他为本书做了大量的出版前期工作，将笔者的手写稿转换为电子稿。在此表示感谢。

由于笔者水平有限，本书可能存在谬误及不当之处，敬请读者批评指正，不胜感谢。

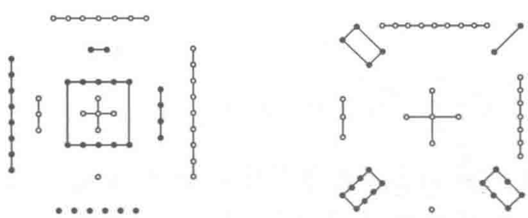
柳光轩
2015 年 7 月

目　录

第 1 章 概论

1.1 幻方是一种数学文化

幻方是最早的数学文化，它的起源可以追溯到 4200 年前。《周易》中记载了两个有趣的故事：(1)相传公元前 2200 年，伏羲氏主宰天下，他仰观天象，俯瞰大地，忽见有一匹龙马浮出黄河水面，龙马载有一幅“河图”献给伏羲氏治理天下。河图是由 1 至 10 的 10 个自然数分两层排列，如图 1-1(a)所示，它是第一张研究星象的时空图。(2)相传公元前 2000 年，大禹治水日夜奔忙，三过家门而不入，感动了上天，上天指派神龟从洛河水中跃出，神龟驮着一册治水神书(后人称“洛书”)献给大禹治水。洛书是由 1 至 9 的 9 个自然数排列于四周及中央，如图 1-1(b)所示，它是史上第一张研究大地的方位图，也是最早的一张幻方图。



(a)河图　　(b)洛书

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(c)洛书对应的幻方

图 1-1 《周易》之河图与洛书

在河图与洛书中，白点是奇数，称天数，代表阳；黑点是偶数，称地数，代表阴。如果将洛书用现代语言翻译出来，它就是一个 3 阶幻方，如图 1-1(c)所示。

八卦是《周易》文化大厦的基础，《系辞上传》曰：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。”据说莱布尼茨建立二进制就是受到了八卦的启发，如图 1-2所示。

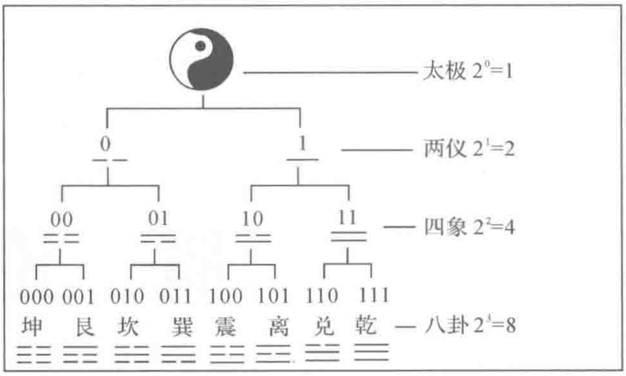


图 1-2　八卦生成与二进制

先天八卦图又称伏羲八卦图，是伏羲按照客观事物取象：乾一、兑二、离三、震四、巽五、坎六、艮七、坤八。后天八卦图又称文王八卦图，是周文王对先天八卦图作了调整，卦序以洛书为参照取象：坎一、坤二、震三、巽四、乾六、兑七、艮八、离九。后来又加入中央宫五，这样就发展成了九宫盘，它是最早形容天象变化与人体灵感的占卦仪器，这也是一个 3 阶幻方，如图 1-3 所示。

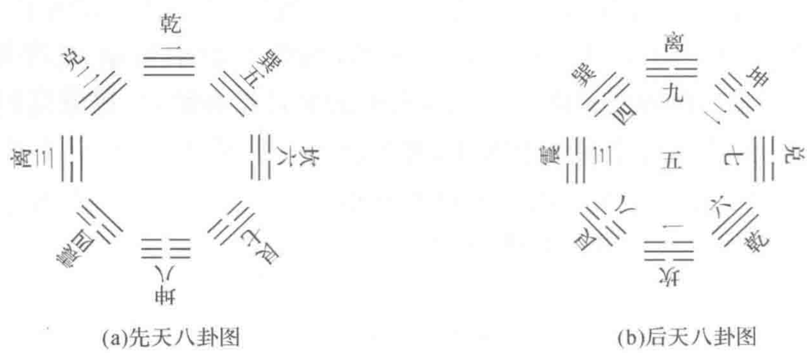
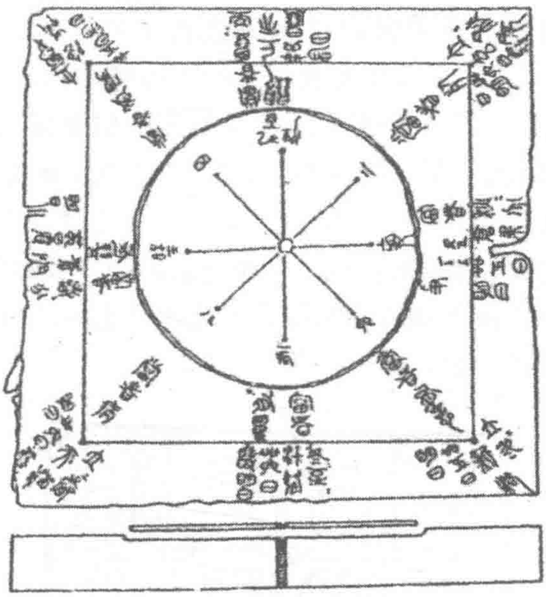
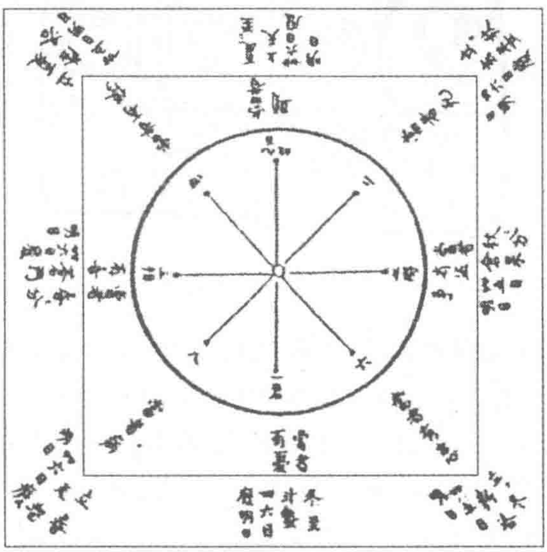


图 1-3　先天八卦图和后天八卦图

1977 年，安徽阜阳城郊发现了两座古墓，文物工作者证实这是西汉汝阴侯的墓葬，墓主人是第二代汝阴侯夏侯灶及其妻子，距今已有 2170 多年。出土文物中有三件极为珍贵的古代天文仪器，其中一件叫“太乙九宫占盘”，是用来占卦的，分上下两盘，可以随意转动，如图 1-4 所示。图 1-4(a)为古汉字，图 1-4(b)为现代汉字。盘中圆圈中有 8 个方位的数字，如果补上中心因安装转轴而无法刻上的“5”，正好是一个 3 阶幻方的九宫数字。



(a)



(b)

图 1-4 太乙九宫占盘

从 4000 多年前的传说“洛书”到 2000 多年前的文物“太乙九宫占盘”，可证明幻方为中国人首创。南宋杨辉是研究幻方的第一人，他在 1275 年所著的《续古摘奇算法》两卷中，除了给出洛书中 3 阶幻方的构造方法外，还详细地研究了 3 阶至 10 阶幻方，杨辉分别称其为“四四图”、“五五图”、“六六图”、“衍数图”（指 7×7＝49 衍）、“易卦图”、“九九图”和“百子图”。其中 3 阶至 8 阶幻方都能给出阴阳两

个图。

15 世纪，幻方从中国传入欧洲，当时欧洲正值文艺复兴时期，科学、文学和艺术获得普遍发展和空前繁荣。具有神秘色彩的幻方传到欧洲，立即引起重视和关注，谈论幻方一时成为风尚。著名数学家科奈留斯·阿格里派(Cornelius Agrippa)费尽脑汁，构成了 3 阶、4 阶、5 阶、6 阶、7 阶、8 阶、9 阶幻方，分别命名为土星、木星、火星、太阳、金星、水星和月亮。

而比阿格里派更早的德国画家和文艺理论家丢勒(Albrecht Dürer)，在 1514 年创作的一幅铜板雕刻画《忧伤》中，画面右后方墙上挂有一个 4 阶幻方，如图 1-5 所示(该画现藏伦敦大英博物馆)。

图 1-5 《忧伤》中的幻方

幻方传入欧洲后，欧洲殖民者又将其传入美洲大陆，同样使人们如醉如痴。其中本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin)是最痴迷的一位，他在构造高阶幻方方面做出了特殊的贡献。他神秘地宣称其做出的 8 阶、16 阶幻方有 5 个神奇的特点，但没有说明这 5 个特点究竟是什么，这成为后人探索的目标。

接着，幻方在东、西方文化交流中又传入到南亚次大陆。印度人竟让幻方蒙上神秘的色彩，把幻方视为护身的法宝。圣公会牧师费洛斯特在印度传教多年，伦敦大英博物馆收藏着他的遗物，其中有一块精巧无比的玉器挂件，原是印度王公贵族佩戴在身上的“护身符”，上面有一幅奇妙的图形，用现代数学语言翻译出来，它是一个 8 阶完美幻方。

幻方以文化的形式从中国传播到世界各地。为了构建幻方，人们创造了十多种方法，如采用连续摆数法、阶梯法、菱形法、拉伊尔法来构造奇阶幻方，采用对称法、对角线法、倍增法、“可逆方”法来构造偶阶幻方。笔者采用棋步法构造任意阶幻方。用棋步法构建幻方基本涵盖了所有的方法，因而能揭开幻方世界

的谜底。

据有关资料记载，迄今为止，仅关于幻方的著作和图书就可以办起一个规模可观的图书馆，幻方是数学文化中的一座知识宝库。

1977 年，美国先后发射了“旅行者 1 号”、“旅行者 2 号”宇宙飞船。这两艘飞往茫茫太空的飞船，负有探索宇宙奥秘、寻找“外星人”的使命。长久以来，人们相信，除地球外，别的星球也一定存在着生命，甚至可能有比地球人更高级的生命(外星人)。美国宇航局公开向全球征集意见，提出在飞船中搭载何物便于与外星人沟通，最终决定放两个搭载物：一是代表地球人的两个男女人体形态的金属片；二是代表人类文明的两个金属片，其中一个是数学文化几何学中的“勾股弦定理”，另一个就是数学文化幻方学中的“仿古 4 阶幻方”。

1.2 幻方分类

幻方是数字方阵，幻方中的数字称为幻方元素。方阵中水平排列称行，竖直排列称列。$n\times n$ 方阵中的 n 称为幻方的阶，如 $n=5$，就称为 5 阶幻方。

幻方种类多样，变幻无穷，但它有章法，幻方中元素排列遵循着一定的规则。根据幻方的元素结构和幻方元素的排列形式，将幻方分成三类：正规幻方、非正规幻方和变形幻方。

1. 正规幻方

正规幻方中的元素是从 1 开始的连续自然数，即 $1、2、3、\cdots、n^2$，这种正规幻方又根据幻方的形式特征，细分为普通幻方、对称幻方、泛对角线幻方和完美幻方。

普通幻方：将自然数 $1、2、3、\cdots、n^2$ 填入 $n\times n$ 的方阵中，能保证每行、每列及两条对角线上元素之和都一一相等。这种是最常见的幻方，也就是普通幻方，通常简称幻方。每行、每列及对角线上元素之和一一相等的和值简称为幻和。

对称幻方：在幻方中，能保证中心对称的任何一对元素之和都等于 $1+n^2$，这种形式的幻方称为对称幻方。

泛对角线幻方：在幻方中，有 n 条左对角线、n 条右对角线，每条对角线上的元素之和也都一一相等。

完美幻方：既是对称幻方，又是泛对角线幻方的幻方，称为完美幻方。

图 1-6 所列的 4 个 5 阶幻方分别为正规幻方中的普通幻方、对称幻方、泛对角线幻方和完美幻方的例子。

18	25	2	9	11
24	1	8	15	17
5	7	14	16	23
6	13	20	22	4
12	19	21	3	10

普通幻方

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

对称幻方

13	16	24	2	10
4	7	15	18	21
20	23	1	9	12
6	14	17	25	3
22	5	8	11	19

泛对角线幻方

25	3	6	14	17
11	19	22	5	8
2	10	13	16	24
18	21	4	7	15
9	12	20	23	1

完美幻方

图 1-6 正规幻方

本书研究的全部是正规幻方。

2. 非正规幻方

除正规幻方之外的幻方，都称为非正规幻方，它可以这样来描述：

在 $n \times n$ 方阵中，填入一系列数字，计 n^2 个，使每行、每列及对角线上的元素满足一定的要求。

非正规幻方有多种类型，组成的元素可以是连续的或非连续的自然数、素数及合数。

如图 1-7 所示是三个 3 阶非正规幻方。其中：(a)是连续数幻方，幻方元素是 0 至 8 的连续整数，每行、每列及对角线上元素之和都是 12。(b)是素数幻方，每行、每列及对角线上元素之和都是 111。(c)是合数幻方，每行、每列及对角线上元素之和都是 354。

3	8	1
2	4	6
7	0	5

(a)连续数幻方

67	1	43
13	37	61
31	73	7

(b)素数幻方

121	114	119
116	118	120
117	122	115

(c)合数幻方

图 1-7 非正规幻方

如图 1-8 所示是由非连续数组成的两个普朗克幻方。其中(a)是 6 阶对称幻方，(b)是 6 阶泛对角线幻方，两个幻方的幻和都是 120。

普朗克幻方是从 1～36 的连续数中抽去了 10、20、30 三个元素，补入 37、38、39 三个元素构成的幻方，它是德国著名物理学家普朗克(C. Planch)在 1919 年开发的。

6 阶正规幻方，只能构成普通幻方，幻和是 111。它既不能形成对称幻方，也不能形成泛对角线幻方。因此，图 1-8 的普朗克幻方不是正规幻方。

如图 1-9 所示是我国丁宗智先生构造的一个非连续数 6 阶幻方。丁先生是我