HIT

数学·统计学系列

The Computational Methods and Applications of Inverse Problems

反问题的计算方法及应用

冯立新 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

反问题的计算方法及应用

The Computational Methods and Applications of Inverse Problems

冯立新 编著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

大家书系

内容简介

本书系统介绍了处理反问题的一些常见的求解方法，以及在数学物理反问题研究中的一些应用．主要内容包括不适定问题、反问题的基本概念，研究反问题所需的基本数学工具，求解反问题的正则化方法，正则化参数的选取方法，求解反问题的磨光化方法、动力系统方法，以及在逆声、逆电磁问题中的应用．

本书可作为反问题、不适定问题方面的研究人员和工程技术人员的参考书，也可作为普通高校研究生、本科生的选修课教材．

图书在版编目(CIP)数据

反问题的计算方法及应用/冯立新编著．—哈尔滨：
哈尔滨工业大学出版社，2011．11
ISBN 978-7-5603-2894-2

Ⅰ．①反…　Ⅱ．①冯…　Ⅲ．①逆问题-研究
Ⅳ．①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 255571 号

策划编辑　张永芹　刘培杰
责任编辑　张永芹　杨万鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8.25　字数 150 千字
版　　次　2011 年 11 月第 1 版　2011 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2894-2
定　　价　28.00 元

前言

数学物理反问题是一个比较新的研究领域，它有别于传统数学物理方程的定解问题．反问题研究由解的部分已知信息来求定解问题中的某些未知量，如微分方程中的系数，定解问题的区域或者是某些定解条件．用系统论的语言来讲，反问题是由输出结果的信息来反求系统的某些结构特征．反问题在医学成像、无损探伤、气象预报等领域都有着广泛的应用．由于此类问题有着广泛而重要的应用背景，其理论又具有鲜明的新颖性与挑战性，因而吸引了国内许多学者从事该项研究．迄今，它已发展成为具有交叉性的计算数学、应用数学和系统科学中的一个热门学科方向．我国著名计算数学先驱、已故的中国科学院院士冯康教授早在20世纪80年代初期就大力提倡开展反问题数值解法的研究．

1923年著名数学家Hadamard提出了“问题适定性”的概念，即一个问题如果其解存在、唯一并且连续依赖输入数据，就称该问题是适定的(well-posed)，否则称为不适定的(ill-posed)．数学物理反问题大都具有不适定的特点，该特点也是反问题研究的难点所在，若不用特殊的方法求解，将得不到合理的答案．很长一段时间，人们一直以为研究不适定问题没有实际意义，相应的反问题的研究也很少．随着科

学技术的发展,实际应用领域提出了很多必须解决的不适定问题,才引起了数学家和应用科学家的广泛重视和深入研究. 以20世纪60年代中期苏联数学家A. N. Tikhonov提出的处理不适定问题的正则化方法为标志,不适定问题和反问题的研究才进入了新的阶段. 正则化方法的基本思想是:用一族与原问题邻近的适定问题的解去逼近原问题的解. 为了研究各种类型的反问题,必须掌握微分方程解的定性理论、非线性分析理论、正则化方法理论、逼近论、最优化方法、微积分方程数值解以及程序设计等工具和技术. 可以说,数学物理反问题是横跨应用数学和计算数学两个学科的研究领域. 目前国内也有越来越多的学校和研究人员开始关注此领域的研究,如中科院、复旦大学、吉林大学、东南大学、哈尔滨工业大学、北京大学等都从不同角度从事着研究和教学工作. 由于该领域研究历史较短,加之知识覆盖面较广,国内相关的基础理论专著较少,有刘继军的《不适定问题的正则化方法和应用》,肖庭延的《反问题的数值解法》等. 这两本书主要是系统介绍了求解不适定问题和反问题的正则化方法. 求解这类问题还有一些常用的方法,如磨光化方法、动力系统方法等.

针对地方理工科院校研究生学习反问题计算方法的教学需要,编者尝试编著本书. 本书以本科毕业生的知识水平为基础,试图以简洁而广泛的形式介绍目前求解反问题常见的方法和理论结果. 通过这些介绍希望读者能快速地对反问题的有关求解方法有一个大体的了解,并为对该领域感兴趣的读者提供一些相关材料. 基于此原因,本书着重介绍求解方法和相应的理论结果,而略去了某些复杂的证明. 本书主要内容源于作者在黑龙江大学为研究生授课的讲义,部分内容取材于文献[20][61][73][85][87]等. 本书组织如下:第1章列举了一些典型的反问题,介绍了适定与不适定问题、反问题的基本概念. 第2章介绍了研究各种类型的反问题所必需掌握的一些基本数学工具,只给出了相应的数学结论,略去了证明. 第3章至第7章我们分别介绍了求解反问题常用的一些数学方法,包括正则化方法、磨光化方法、动力系统方法、蒙特卡罗方法以及正则化参数的选取准则等内容.

本书的研究工作得到了国家自然科学基金项目(No. 10801046)和黑龙江大学创新团队计划(Hdtd2010-14)的基金资助,在此一并致谢.

由于编者的学术水平有限,本书中的不足和疏漏在所难免,恳请有关学者和同行不吝指正,在此深表感谢!

冯立新

2010年9月于哈尔滨

目录

绪 论

第 1 章

1.1 反问题的例子

近三十多年来，数学物理反问题已成为数学中发展和成长最快的领域之一. 当谈到反问题时，人们会问：何谓反问题？很难给出反问题的一个明确的定义. 粗略地说，反问题是相对正问题而言的. 美国斯坦福大学的教授 J. B. Keller 在 1976 年提出[51]：一对问题是互逆的，如果一个问题的构成（已知数据）需要另一问题解的部分信息，把其中的一个称为正问题，另一个就称为反问题. C. W. Groetsch 在文献[32] 中指出，反问题是很难定义的，但是几乎每一个数学家都能马上判断出一个问题是正问题还是反问题. 因此反问题的定义有点"只可意会，不可言传" 的味道. 本节将介绍一些反问题的例子，这些例子主要来自文献[61] 和[87].

例 1.1 若对一个给定的多项式

$$p_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

在 $n+1$ 个已知点 $x_0, \cdots, x_n$ 处求值当做正问题，则其反问题是 Lagrange 插值问题，即给定 $n+1$ 组值 (x_i, y_i)，$i = 0, 1, \cdots, n$，求一个 n 次多项式 $p_n(x)$ 使其满足插值条件：$p_n(x_i) = y_i$，

$i=0,1,\cdots,n.$

例 1.2 给定 $n\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和对角阵 $\boldsymbol{D}$. 若把计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 看做正问题,则给定 n 个实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,求对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$ 以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为特征值就是反问题.

例 1.3 Abel 积分方程:自 1923 年 Abel 在研究物理中等时线轨迹问题时提出以后以他的名字命名积分方程以来,Abel 方程的各种推广以及相应的反演方法的探讨,在体视学、地震学、光谱学、等离子物理、散射理论和空间探测等诸多领域得到了广泛的应用. 下面考虑等时曲线问题.

设有一质量为 m 的质点在重力 mg 的作用下,从铅直平面中高度为 $h>0$ 处的点 p_1,沿着某一曲线 Γ 无摩擦地滑到高度为 $h=0$ 的点 p_0 处. 正问题是:当曲线 Γ 给定后,决定该质点从 p_1 滑到 p_0 的时间 T. 其反问题是:假定已经通过测量得出高度 h 与时间 T 的关系:$T=T(h)$,要求决定该曲线 Γ 的形状. 不妨设该曲线的表达式为 $x=\psi(y)$,则其上任一点 p 的坐标为$(\psi(y),y)$. 根据能量守恒定律

$$E+U=\frac{mv^2}{2}+mgy=\text{cont}=mgh$$

可知运动速度满足下面关系

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=\sqrt{2g(h-y)}$$

于是,由任一点 p 滑到 p_0 的总时间为

$$T=T(h)=\int_{p_0}^{p_1}\frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_0^h\sqrt{\frac{1+\psi'(y)^2}{2g(h-y)}}\mathrm{d}y,h>0$$

令 $\phi(y)=\sqrt{1+\psi'(y)^2}$,且设 $f(h)=T(h)\sqrt{2g}$ 为已知(由测量得到),则反问题是由下面的 Abel 方程

$$\int_0^h\frac{\phi(y)}{\sqrt{h-y}}\mathrm{d}y=f(h),h>0$$

求未知函数 ϕ.

例 1.4 逆声散射问题

如图 1.1 所示,设 $D\subset\mathbf{R}^N(N=2$ 或 $3)$ 是具有光滑边界 ∂D 的有界区域(散射体). 以平面波 $u^i=\exp(ikx\cdot d)$ 入射,其中 d 是入射方向,k 为波数.

正问题是:求总场 $u=u^i+u^s$ 使得

$$\Delta u+k^2u=0,x\in\mathbf{R}^N\backslash\overline{D}$$

$$u=0,x\in\partial D$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial r}-iku^s=O(r^{-(N+1)/2}),r=|x|\to\infty\text{(称为径向条件)}$$

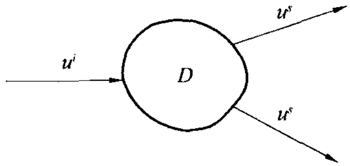

图 1.1

对于声波散射问题,$v(x,t)=u(x,t)e^{-i\omega t}$ 代表压力场,$k=\omega/c$,ω 代表频率,c 代表声速. 满足径向条件的散射场 u^s 有下面的渐近表示(球面波)

$$u^s(x)=\frac{e^{ik|x|}}{|x|^{(N-1)/2}}u_\infty(\hat{x})+o(|x|^{-(N+1)/2}),\ |x|\to\infty$$

其中 $\hat{x}=x/|x|$,$u_\infty(\hat{x})$ 被称为远场模式. 给定 $\{u_\infty(\hat{x})\}$,确定散射体 D 的形状就是反问题(详见文献[54]).

例 1.5 逆 Stefan 问题

物理学家 Stefan 以一维模型为例描述了夏季北极冰融化的过程,如图 1.2 所示. $t=0$ 时刻在区域 $x\geq l$ 内是冰,在左边热源的作用下冰开始融化. 设 $t>0$ 时刻,在 $x=0$ 及 $x=s(t)>0$ 围成的区域是水,$x\geq s(t)$ 区域是冰. $u(x,t)$ 代表 t 时刻,$0<x<s(t)$ 位置的温度场. $u(x,t)$ 满足一维热传导方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},(x,t)\in D:=\{(x,t)\in\mathbf{R}^2\mid 0<x<s(t),t>0\}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=f(t),u(s(t),t)=0,\ \forall t\in[0,T]$$

$$u(x,0)=u_0(x),0\leq x\leq l$$

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x},\ \forall t\in[0,T]$$

其中,u_0 代表初始温度,$f(t)$ 表示在左边界 $x=0$ 处的热流. 式 $\dfrac{ds(t)}{dt}=-\dfrac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}$ 表示水和冰交界面的移动速度与热流成正比. 正问题是:已知 f,u_0,求曲线 $s(t)$;反问题是:给定曲线 $s(t)$,重构 u 和 f(或 u_0).

例 1.6 CT 技术中的反问题

CT(computerized tomography,计算机层析成像)技术是计算机技术与 Radon 变换在医学成像方面的成功应用. Radon 于1917 年在数学上证明了二维、三维的物体可由它的无限多个投影的逆变换实现重构. Housefield 在 1972 年成功研制出头颅X射线断层摄影装置,使得Radon变换的理论得到应用,并因此获得了1979 年 诺贝尔医学奖. 其基本原理是:在不损坏物体本身结构的情况下,发射各种可通过物体的信号(如射线、波或粒子等),然后通

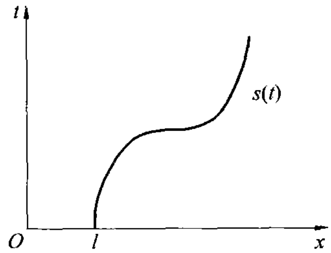

图 1.2

过对从体外接收到的信号，利用数学方法和计算机进行加工处理，获取物体内部结构的信息，形成该物体结构的透视图像. 下面考虑二维情形.

考虑通过物体的某一平面(截面)，用$\rho(x,y)$ 表示点(x,y) 处的密度，而用L表示该平面内的任一直线. 沿直线L向物体发射一束薄 X 光束，并且测量光穿过物体后的强度变化. 设直线L的参数表示为(s,δ)，其中$s\in\mathbf{R},\delta\in[0,\pi]$，如图 1.3 所示，于是射线$L$可表示为$se^{i\delta}+iue^{i\delta}\in\mathbf{C},u\in\mathbf{R}$，其中$\mathbf{C}$代表复平面. 实验表明X射线强度的衰减率$dI/I$与物体截面的面密度$\rho(x,y)$以及在物体中的传播距离$du$成正比，即，$dI=-\gamma\rho I du$，$\gamma$ 为常数. 沿直线L积分得

$$\ln I(u)=-\gamma\int_{u_0}^{u}\rho(se^{i\delta}+iue^{i\delta})\,du$$

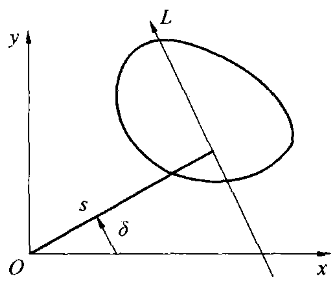

图 1.3

若假设密度$\rho(x,y)$ 具有紧支集，则有

$$\ln I(\infty)=-\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(se^{i\delta}+iue^{i\delta})\,du$$

记

$$(R\rho)(s,\delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(se^{i\delta}+iue^{i\delta})\,du$$

将线积分$(R\rho)(s,\delta)$ 称之为ρ 的 Radon 变换. 正问题是：对于给定的$\rho(x,y)$，计算其 Radon 变换 $R\rho$. 而反问题是：对给定的 Radon 变换 $R\rho$(即所有线积分的测量值) 来确定密度函数$\rho(x,y)$. 这可由 Radon 逆变换

$$\rho(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(R\rho)(s,\delta)}{x\cos\delta+y\sin\delta-s}\mathrm{d}s\mathrm{d}\delta$$

来实现.

1.2 问题的适定性

在用数学方法研究具体的自然现象时,首先应建立适当的数学模型,所谓“适当的模型”,在经典意义下应满足下述三个条件:

(1) 该模型的解是存在的,即它描述了一类现象;

(2) 该模型的解是唯一的,即它确实描述了确定现象;

(3) 该模型的解对输入数据是稳定的,即解对数据的误差应该是连续变化的.

这就是 Hadamard 在 1923 年提出的著名的问题的适定性的概念[33],否则问题称为是不适定的. 很显然,解的存在性依赖于解的定义和输入数据(定解条件);解的唯一性依赖于解空间的大小和输入数据;而解的连续依赖性取决于解空间的拓扑结构(解和输入数据的度量).

我们给出问题适定性的严格的数学定义如下:

定义 1.1.1[61] 设 $A: X\to Y$ 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的一个算子. 方程

$$A\phi=f$$

称为是适定的,如果 A 是一一对应的(即单射加满射) 并且逆算子 $A^{-1}: Y\to X$ 是连续的. 否则称为是不适定的.

不适定问题的典型例子是在无限维空间上解第一类的全连续算子方程. 一个算子如果是连续的紧算子,就称为全连续的算子. 由于线性紧算子总是连续的,故对线性算子,紧性和全连续是等价的.

1.3 反问题和不适定问题

对于反问题的一个比较适用的数学定义是“由定解问题的解的部分信息去求定解问题中的未知成分”. 这里求出的反问题的“解” 也是广义的,可能是近似解,也可能是某种意义下的弱解.

(1) 通常把研究得较多的,适定性成立的一个问题称为正问题,反问题大多是不适定的.

(2) 正问题是线性的,对应的反问题也可能是非线性的.

(3) 由于客观条件的限制,很多具体的应用问题都是不适定的. 不适定问题的本质难点是其解不连续依赖于输入数据.

不适定问题和反问题的联系主要表现在绝大部分反问题都是不适定的. 这种不适定性主要表现在两个方面. 一方面,由于客观条件的限制,反问题中的输入数据(即给定的解的部分已知信息)往往是欠定的或者是过定的,这就会导致解的不唯一性或者是解的不存在性. 另一方面,反问题的解对输入数据往往不具有连续依赖性. 由于输入数据中不可避免的测量误差,人们就必须提出由扰动数据求反问题在一定意义下的近似解的稳定的方法. 因此,从上述意义而言,不适定问题和反问题是紧密联系在一起的.

预备知识

第 2 章

在本章我们介绍有关函数空间、紧算子、最优化理论、概率论等基本概念和性质，它们可以在文献[55][61][85]或其他标准的泛函分析教材中找到. 这些结果是讨论不适定问题解法的基础.

2.1 赋范空间、Hilbert 空间若干结果

首先给出两个基本定义.

定义 2.1.1 设 X 是一个定义在 $K=\mathbf{R}$ 或 $K=\mathbf{C}$ 上的线性空间，如果映射 $(\cdot,\cdot): X\times X\to K$ 满足：

(1) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z),\ \forall x,y,z\in X$;

(2) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

(3) $(x,y)=\overline{(y,x)},\ \forall x,y\in X$;

(4) $(x,x)\in\mathbf{R},(x,x)\geqslant 0,\ \forall x\in X$;

(5) $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

则称映射 $(\cdot,\cdot)$ 为 K 上的内积. 线性空间 X 装备内积后称为内积空间.

定义 2.1.2 设 X 是一个复(实) 的线性空间，如果函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbf{R}$:

(1) $\|\phi\| \geqslant 0, \forall \phi \in X$;

(2) $\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$;

(3) $\|\alpha\phi\| = |\alpha| \|\phi\|, \forall \alpha \in \mathbf{C}$(或 $\mathbf{R}$)$,\phi \in X$;

(4) $\|\phi + \psi\| \leqslant \|\phi\| + \|\psi\|, \forall \phi,\psi \in X$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的模(范数). 线性空间 X 装备模后称为赋范线性空间.

定义 2.1.3 设 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ 使得 $n > N(\varepsilon)$ 时 $\|\phi_n - \phi\| \leqslant \varepsilon$ 成立,即

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\| = 0$$

则称序列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于 ϕ,记为 $\phi_n \to \phi$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \phi$.

定义 2.1.4 设 $U \subset X$. 映射 $A: U \to Y$ 称为在 $\phi \in U$ 是连续的,如果对任意以 ϕ 为极限的 U 中的序列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都成立

$$\lim_{n\to\infty} A\phi_n = A\phi$$

例 2.1 由定义,X 上的任意一种 $\|\cdot\|$ 都是 X 上的连续函数.

例 2.2 $X_1 = \{f \in C[a,b]; \|f\|_\infty = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|\}, X_2 = \{f \in C[a,b]; \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\}$ 都是赋范线性空间.

定义 2.1.5 线性空间 X 上的两个模 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 称为是等价的,如果存在常数 $c, C > 0$ 使得

$$c\|\phi\|_1 \leqslant \|\phi\|_2 \leqslant C\|\phi\|_1$$

对一切的 $\phi \in X$ 成立.

定理 2.1.6 有限维线性空间上的所有模都是等价的.

定义 2.1.7 给定任意 $\phi \in X, r > 0, B(\phi,r) := \{\psi: \|\psi - \phi\| < r\}$ 称为中心在 ϕ 半径为 r 的一个开球,$B[\phi,r] := \{\psi: \|\psi - \phi\| \leqslant r\}$ 称为一个闭球.

定义 2.1.8 对 X 中的子集 U,如果 $\forall \phi \in U, \exists r > 0$ 使得 $B(\phi,r) \subset U$,称 U 为 X 的一个开集;如果 U 中任一收敛序列的极限都在 U 中,称 U 为 X 中的一个闭集.

赋范线性空间的有限维子空间是闭的.

定义 2.1.9 U 中所有收敛序列的极限点的集合称为 U 的闭包,记为 $\overline{U}$. 集合 U 称为在另一个集合 V 中是稠密的,如果 $V \subset \overline{U}$. 也就是说,V 中的任一元素都是 U 中一个收敛序列的极限点.

由定义知,U 在 V 中稠密,则 V 中的任一元素都可用 U 的元素来逼近.

定义 2.1.10 $U \subset X$ 称为是有界的,如果 $\exists C > 0$ 使得 $\|\phi\| \leqslant C$ 对一切的 $\phi \in U$ 成立.

定义 2.1.11 序列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 称为是 Cauchy 列，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N(\varepsilon)$，使得

$$\|\phi_n - \phi_m\| \leqslant \varepsilon, \forall n, m > N(\varepsilon)$$

成立.

赋范线性空间 X 中的任一收敛的序列都是 Cauchy 列，但反之一般不真.

定义 2.1.12 $U \subset X$ 称为是完备的，如果 U 中的任一 Cauchy 列都收敛于 U 中的一个元素，完备的赋范线性空间称为是 Banach 空间.

例 2.3 前面例 2.2 给出的 X_1 是 Banach 空间，但 X_2 不是.

假定线性空间 X 上定义了内积 $(\cdot,\cdot)$. 由

$$\|\phi\| := (\phi,\phi)^{1/2}, \forall \phi \in X$$

定义了 X 上的一个范数. 完备的内积空间称为是 Hilbert 空间.

定义 2.1.13 集合 $U \subset X$ 称为是紧的(compact)，如果 U 中的任一序列含有一个收敛的子列收敛到 U 中的元素.

定理 2.1.14 紧集是有界的，闭的，完备的.

定义 2.1.15 赋范空间中的子集称为是相对紧的，如果它的闭包是紧的.

由此定义易知，U 是相对紧的，当且仅当 U 中的任一序列都有一个收敛的子列(但极限点未必在 U 中).

定理 2.1.16 有限维赋范空间中的有界集是相对紧的.

对 $\mathbf{R}^m$ 中的紧集 G，记 $C(G)$ 为定义于 G 上的连续函数，其上的模定义为

$$\|\phi\|_\infty := \max_{x \in G} |\phi(x)|$$

定理 2.1.17(Arzela-Ascoli) $U \subset C(G)$ 是相对紧集 $\Leftrightarrow U$ 是有界的和等度连续的.

2.2 有界算子和紧算子

定义 2.2.1 算子 $A: X \to Y$ 把线性空间 X 映到线性空间 Y 称是线性的，如果

$$A(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha A\phi + \beta A\psi, \phi, \psi \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{C}(\text{或 } \mathbf{R})$$

定理 2.2.2 线性算子是连续的等价于线性算子在一个元素处是连续的.

定义 2.2.3 从赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子 A 称为是有界的，如果 $\exists C > 0$ 使得对一切的 $\phi \in X$ 满足

$$\|A\phi\| \leqslant C\|\phi\|$$

C 称为是算子 A 的一个界.

线性算子 A 是有界的等价于 A 把 X 中的有界集映为 Y 中的有界集

$$\|A\| := \sup_{\|\phi\| \leqslant 1} \|A\phi\| < \infty$$

称为算子 A 的范数(模).

由赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的全体有界线性算子的集合构成一个线性空间,记为 $\mathscr{L}(X,Y)$.

定理 2.2.4 $\mathscr{L}(X,Y)$ 在前述算子范数下构成一个赋范线性空间,如果 Y 是 Banach 空间,$\mathscr{L}(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

定理 2.2.5 线性算子 A 是连续的 $\Leftrightarrow A$ 是有界的.

定理 2.2.6 记 X,Y,Z 为赋范线性空间,$A: X \to Y, B: Y \to Z$ 是有界线性算子. 由

$$(BA) := B(A)X, \forall \phi \in X$$

定义的算子 $BA: X \to Z$ 是有界线性算子且满足 $\|BA\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

定义 2.2.7 从赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子 A 称为是紧的,如果它把 X 中的任一有界集映为 Y 中的相对紧集.

定理 2.2.8 从赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子 A 称为是紧的 $\Leftrightarrow$ 对 X 中的任一有界序列 $\{\phi_n\}$, $\{A\phi_n\}$ 含有 Y 中的收敛子列.

定理 2.2.9 紧的线性算子 A 是有界的,紧的线性算子的线性组合是紧的算子.

定理 2.2.10 记 X,Y,Z 为赋范线性空间,$A: X \to Y, B: Y \to Z$ 是有界线性算子. 如果 A 或者 B 是紧的,则积算子 $BA: X \to Z$ 是紧的.

定理 2.2.11 X 为赋范空间,Y 为 Banach 空间. 如果紧线性算子序列 $A_n: X \to Y$ 在 $n \to \infty$ 时依范数收敛于线性算子 $A: X \to Y$,即 $\|A_n - A\| \to 0$,则 A 是紧算子.

定理 2.2.12 如果有界线性算子 $A: X \to Y$ 有有限维的值域 $A(X)$,则 A 是紧算子.

定理 2.2.13 恒等算子 $I: X \to X$ 是紧的 $\Leftrightarrow X$ 是有限维的.

由定理 2.2.10 和定理 2.2.13,紧算子 A 不可能存在有界的逆,除非其值域 $A(X)$ 是有限维的. 对第二类的算子方程

$$\phi - A\phi = f$$

如果 A 是压缩的,即 $\|A\| < 1$,其可解性可由 Neumann 级数的方法得到.

定理 2.2.14 设 $A: X \to X$ 是一个压缩的有界线性算子,它把 Banach 空间 X 映到自身. $I: X \to X$ 是单位算子,则 $I - A$ 在 X 上存在有界逆,且逆算子由 Neumann 级数给出