

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Dynamic Optimization

The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management
(Second Edition)

动态优化

经济学和管理学中的变分法和最优控制

(第二版)

莫顿·I·凯曼 (Morton I. Kamien)

南茜·L·施瓦茨 (Nancy L. Schwartz)

著

 中国人民大学出版社

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Dynamic Optimization

The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management

(Second Edition)

动态优化

经济学和管理学中的变分法和最优控制

(第二版)

莫顿·I·凯曼 (Morton I. Kamien)

南茜·L·施瓦茨 (Nancy L. Schwartz)

著

王高望 译

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

动态优化：经济学和管理学中的变分法和最优控制：第二版/(美)莫顿·I·凯曼，(美)南茜·L·施瓦茨著；王高望译. —北京：中国人民大学出版社，2016.8
(经济科学译丛)
ISBN 978-7-300-23167-9

I. ①动… II. ①莫…②南…③王… III. ①动态最佳化-应用-经济-教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 168643 号

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

经济科学译丛

动态优化——经济学和管理学中的变分法和最优控制 (第二版)

莫顿·I·凯曼 著

南茜·L·施瓦茨

王高望 译

Dongtai Youhua

出版发行	中国人民大学出版社	邮政编码	100080
社 址	北京中关村大街 31 号		
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规 格	185 mm×260 mm 16 开本	版 次	2016 年 8 月第 1 版
印 张	20.75 插页 2	印 次	2016 年 8 月第 1 次印刷
印 数	467 000	定 价	48.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

《经济科学译丛》编辑委员会

学术顾问 高鸿业 王传纶 胡代光

范家骧 朱绍文 吴易风

主 编 陈岱孙

副主编 梁 晶 海 闻

编 委 (按姓氏笔画排序)

王一江 王利民 王逸舟

贝多广 平新乔 白重恩

刘 伟 朱 玲 许成钢

张宇燕 张维迎 李 扬

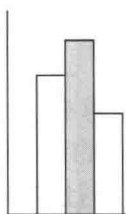
李晓西 李稻葵 杨小凯

汪丁丁 易 纲 林毅夫

金 碚 姚开建 徐 宽

钱颖一 高培勇 梁小民

盛 洪 樊 纲



《经济科学译丛》总序

中国是一个文明古国，有着几千年的辉煌历史。近百年来，中国由盛而衰，一度成为世界上最贫穷、落后的国家之一。1949年中国共产党领导的革命，把中国从饥饿、贫困、被欺侮、被奴役的境地中解放出来。1978年以来的改革开放，使中国真正走上了通向繁荣富强的道路。

中国改革开放的目标是建立一个有效的社会主义市场经济体制，加速发展经济，提高人民生活水平。但是，要完成这一历史使命绝非易事，我们不仅需要从自己的实践中总结教训，也要从别人的实践中获取经验，还要用理论来指导我们的改革。市场经济虽然对我们这个共和国来说是全新的，但市场经济的运行在发达国家已有几百年的历史，市场经济的理论亦在不断发展完善，并形成了一个现代经济学理论体系。虽然许多经济学名著出自西方学者之手，研究的是西方国家的经济问题，但他们归纳出来的许多经济学理论反映的是人类社会的普遍行为，这些理论是全人类的共同财富。要想迅速稳定地改革和发展我国的经济，我们必须学习和借鉴世界各国包括西方国家在内的先进经济学的理论与知识。

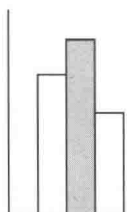
本着这一目的，我们组织翻译了这套经济学教科书系列。这套译丛的特点是：第一，全面系统。除了经济学、宏观经济学、微观经济学等基本原理之外，这套译丛还包括了产业组织理论、国际经济学、发展经济学、货币金融学、公共财政、劳动经济学、计量经济学等重要领域。第二，简明通俗。与经济学的经典名著不同，这套丛书都是国外大学通用的经济学教科书，大部分都已发行了几版或十几版。作者尽可能地用简明通俗的语言来阐述深奥的经济学原理，并附有案例与习题，对于初学者来说，更容易理解与掌握。

经济学是一门社会科学，许多基本原理的应用受各种不同的社会、政治

或经济体制的影响，许多经济学理论是建立在一定的假设条件上的，假设条件不同，结论也就不一定成立。因此，正确理解掌握经济分析的方法而不是生搬硬套某些不同条件下产生的结论，才是我们学习当代经济学的正确方法。

本套译丛于 1995 年春由中国人民大学出版社发起筹备并成立了由许多经济学专家学者组织的编辑委员会。中国留美经济学会的许多学者参与了原著的推荐工作。中国人民大学出版社向所有原著的出版社购买了翻译版权。北京大学、中国人民大学、复旦大学以及中国社会科学院的许多专家教授参与了翻译工作。前任策划编辑梁晶女士为本套译丛的出版做出了重要贡献，在此表示衷心的感谢。在中国经济体制转轨的历史时期，我们把这套译丛献给读者，希望为中国经济的深入改革与发展做出贡献。

《经济科学译丛》编辑委员会



第四次印刷序言

我依旧为当代学生对本书的热情而感到兴奋。知道它能帮助他们获取本书所覆盖的知识，我感到很高兴。

作为“越小即越多”理论的应用，我力图排除在上一次印刷中能发现的打印错误。在这项任务中，我得到了爱达荷大学 S. Devadoss 教授的帮助。



第二版序言

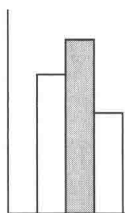
世界各地的学生对本书第一版的热情接受提示我服从建议，不要修改既有的体系。然而，对这个学科的学生来说，动态优化方法已经有许多有用的新的理论进展和应用。新的进展包括如何做比较动态分析，如何在计划期内最优地从一个状态方程转换到另一个状态方程，以及如何通过利用积分状态方程来考察最优化问题的系统的历史。这些新进展中的每一个要么包含在以前存在的章节中，要么包含在一个全新的章节中。本教材包括这些新进展的应用例子，或者提供相关的参考文献。

最重要的补充是关于微分博弈的章节。自从本书第一版出版以来，博弈理论的分析方法几乎在经济学和管理科学中无处不在。特别地，通过模型化为微分博弈，经济学和管理学的问题已经得到许多有趣的洞见。最优控制和连续时间的动态规划方法是分析这类博弈问题的标准方法。因此，加进这个主题看起来是必要的。

关于解释，我试图坚持在第一版中被证明是成功的相同的表述风格和水平。因此，重点依然是在非正式的富有直觉的水平上为学生提供专业的技术。由于在 Feichtinger 和 Hartl, Seierstad 和 Sydsaeter 写的教科书以及 Basar 和 Olsder, Mehlmann 写的微分博弈书中出现了最优控制方法更正式的解释，这个目标变得更容易保持。在整本书中，我努力改进解释并提供新的洞见。在我最喜欢的物理学家的鼓励和帮助下，我加入了变分法在物理学中的几个经典应用。

由于 Richard Hartl 对第一版提出了许多非常有思想性和有用的评论，我想对他表示感谢。Stuart Halliday 提供了极好的打字技术和非常有帮助的编辑意见。每当我对任务的热情减弱时，Carolyn Settles 都会鼓励我继续进行下去。也特别感谢我的妻子 Lenore 和儿子 Randall，他们在整个过程中耐心地陪伴着我。

准备这个新版的最困难和最痛苦的部分是失去了我的合作者南茜·L·施瓦茨，没能与她分享第一版的成功并让她帮助我写这个版本。要不是因为她，绝对不会有第一版。因此，这个版本也是为了纪念她。



第一版序言

我们一直认为短期最优行动在长期不一定是最优的。因此，我们从长期的、动态的观点研究各种经济学和管理科学项目。除了使用动态优化作为研究工具的经验之外，近十年来，我们在西北大学教授这些方法。我们发现大量文章使用这些方法，每年又会增多，也发现一些高级的数学和工程学教材，但是缺少在相对初级的水平上系统介绍这些方法的教材。本书的产生源于我们的研究和课堂经验，以满足经济学和管理学学生的需要。

我们努力简要地解释这些方法并说明它们的应用；在其他地方可以找到更高水平的书。我们使用了很多从文献中采集或者引发的例子和解释。我们认为，这是一本高度可读的关于变分法和最优控制以及它们在经济学和管理学中应用的导论。

我们把注意力限制在连续时间的问题。这反映了个人偏好、我们对文献缺口的觉察和篇幅限制。当然，许多有趣的问题也可以用离散时间方法同样好或更好地处理。尽管知道它们的重要性和用处，但我们还是决定省略它们。

本教材大量地借鉴了文献，对于博学的读者来讲，这是显而易见的。我们没有标记每一个来源，特此对那些我们大量援引的且在参考文献中提到的教材和论文表示感谢。

本书曾作为学过微观经济学和非线性规划（Kuhn-Tucker 定理）的经济学和管理学一年级博士生的教材。它也适用于数理社会科学或者经济学和数学高年级本科生。最后，它也十分适用于自学。

第 I 部分讨论了变分法，而最优控制是第 II 部分的主题。这两种方法紧密相关，在整个第 II 部分的习题中，学生被多次要求注意它们之间的联系。第 II 部分是在假设读者已经熟悉第 I 部分主体的情况下编写的。

我们假设读者熟悉多变量微积分。附录 A 回顾了很多用到的微积分结果。这个附录可以作为微积分最优化的导论。尽管微分方程的一些预备知识是有帮助的，但它不是

必要的。附录 B 是微分方程中一些必要事实和技术的自备导论。

大多数章节都有习题，它们是学习计划不可分割的一部分。有些习题是章节中所建立的理论的常规扩展；这些习题打算用来巩固已经采用的想法，并提供适度的扩展。其他习题是常规的数值计算问题；再说一次，我们坚定地认为做常规习题是阅读和仿效教材中研究的实例的有益补充。有些习题不是常规扩展。最后，有些问题在应用文献中被提到，不仅作为练习，而且指明了方法的进一步应用。目录表明了教材中所讨论的主要应用和每一节的习题。

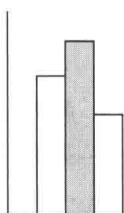
有些章节包含了进一步阅读的评论。我们引用了可以找到这些理论的教材和论文，也提到了一些应用理论的代表性论文。所有引用和附加的参考文献都在教材结尾。

利用一个分层系统，公式可以用圆括号内的数字来查阅。单个数 (n) 是当前章节的第 n 个方程；(s, n) 是书中同一部分第 s 节的第 n 个方程；(P_s, n) 是书中第 P 部分或者附录 P 第 s 节的第 n 个方程。例子、章节和习题都用同一个数字系统查阅，例 1 是这部分的第一个例子，例 5.1 是第 5 节的第一个例子，例 I 5.1 是第 I 部分第 5 节的第一个例子。

导数和偏导数分别用上撇号和下标来表示。撇号表示函数关于自变量的导数。因此， $f'(x) = df/dx$ ， $x'(t) = dx/dt$ 。两个撇号代表二阶导数： $f''(x) = d^2f/dx^2$ ， $x''(t) = d^2x/dt^2$ 。偏导数经常用下标来表示；有时给出自变量的名字，有时给出数字或者阶数： $f_x(x, y) = f_1(x, y) = \partial f / \partial x$ 。自变量 t 经常省略。通常 x 是 t 的函数，有时表示为 $x(t)$ 。

我们感谢十年来的学生、许多同事和评论者，感谢他们启发和帮助我们澄清思考和表达，并且减少了错误。我们特别感谢 R. Amit, R. Braeutigam, R. deBondt, M. Intriligator, S. Kawasaki, E. Muller, S. Ochiai, Y. Ohta 和 H. Sonnenschein 等人的帮助。对于手稿的数不清的草稿，许多打字员帮助了我们，包括 Judy Hamburger, Laura Coker, 特别是 Ann Crost。我们感谢凯洛格研究生管理学院、管理经济学和决策科学高级研究中心以及 IBM 的资助。当我们编写本书的时候，Lenore 和 Randall Kamien 给予了必要的耐心。

莫顿·I·凯曼
南茜·L·施瓦茨



目 录

第 I 部分 变分法

1. 引言	3
2. 例子求解	9
3. 最简单的问题——欧拉方程	11
4. 例子和解释	17
5. 求解特殊情形的欧拉方程	24
6. 二阶条件	33
7. 等周问题	38
8. 自由终值	42
9. 自由边界——横截性条件	47
10. 等式约束终点	54
11. 残值	59
12. 不等式约束终点和敏感性分析	64
13. 角点	72
14. 关于 (t, x) 的不等式约束	76
15. 无穷边界的自治问题	81
16. 最速降线	83
17. 相图分析	87
18. 多个函数和二重积分	95

第 II 部分 最优控制

1. 引言	103
2. 最简单的问题——必要条件	106
3. 充分性	114
4. 解释	117
5. 多个变量	122
6. 固定端点问题	126
7. 各种终点条件	133
8. 贴现、当期值和比较动态	141
9. 无穷边界自治问题的均衡	149
10. 有界控制	158
11. 推广控制约束	167
12. 不连续和碰撞控制	173
13. 奇异解和最速降线	179
14. Pontryagin 最大值原理、存在性	186
15. 推广充分性定理	189
16. 其他处理方法	194
17. 状态变量不等式约束	197
18. 状态变量的跳跃、状态方程的转换	206
19. 延迟反应	213
20. 带积分状态方程的最优控制	217
21. 动态规划	222
22. 随机最优控制	227
23. 微分博弈	234

附录 A 微积分和非线性规划

1. 微积分技巧	249
2. 中值定理	252
3. 凹函数和凸函数	255
4. 最大值和最小值	259
5. 等式约束最优化	262
6. 不等式约束最优化	268
7. 线积分和 Green 定理	274

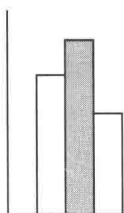
附录 B 微分方程

1. 引言	279
2. 一阶线性微分方程	282
3. 二阶线性微分方程	285
4. n 阶线性微分方程	291
5. 一对线性方程	296
6. 解的存在性和唯一性	301
术语表	303
译者后记	313



第 I 部分

变分法



1. 引言

我们在幼时就被教导过提前计划的必要性。通过使某些机会可用以及排除其他机会和改变另外一些机会的成本，当前的决策影响未来的事件。如果当前的决策不影响未来机会，计划问题就不重要了。那时，我们仅需要对当前做出最好的决策。

本书处理求解连续时间计划问题的分析方法，即被称为变分法和最优控制的动态优化方法。连续时间动态问题的解是连续函数（或者函数集合），其表明了变量跨越时间（或者空间）而遵循的最优路径。

变分法的起源通常追溯到 John Bernoulli 于 1696 年提出的最速降线问题以及由他和他的兄弟于 1697 年独立给出的解。（如果一个小的物体在重力的影响下运动，哪条路径可以使它在最短的时间内走完全程？）Euler 和 Lagrange 解决了其他的特殊问题，并创立了一套一般的数学理论。变分法最成功的应用在于理论物理，特别在与哈密尔顿原理或者最小行动原理有关的方面。在 20 世纪 20 年代晚期和 30 年代早期，Roos, Evans, Hotelling 和 Ramsey 把它最早应用于经济学，此后，它的进一步应用偶尔有出版。

随着数学家以及诸多经济学家和管理科学家对某些动态问题重燃兴趣，现代的研究开始于 20 世纪 60 年代早期。通过拓展其应用范围，最优控制理论推广了变分法。它由 Pontryagin 和他的合作者于 20 世纪 50 年代晚期在苏联创立并于 1962 年出版了英文版。同时，经济学家对最优经济增长模型（几十年前由 Ramsey 开创）感兴趣，而管理学家在研究最优存货政策。这些研究者是动态分析新工具的“现货市场”，应用很快就开始了。在 20 世纪 50 年代由 Richard Bellman 创立的动态规划也激发了兴趣。当然，这些数学工具被应用于许多其他领域，比如天文学和化学工程。现在，变分法和最优控制几乎是经济学和管理科学中的标准方法。本书致力于讲解这些方法和它们在这些领域中的应用。

在静态问题中，我们寻找一个最优的数或者数的有限集合。例如，企业可能寻找产出水平 x^* 以最大化由生产和出售 x 单位产品而产生的利润 $F(x)$ ：

$$\max_{x \geq 0} F(x). \quad (1)$$

这个问题的答案是一个数 x^* 。如果 $F(x)$ 有一个特殊的函数形式，数 x^* 就可以精确地确定。否则，就由函数 F 来刻画。如果 F 是连续可微的且生产是合算的， x^* 通常就会满足一阶必要条件 $F'(x^*)=0$ 。

在另一个例子中，可以同时选择几个变量：

$$\begin{aligned} & \max F(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{s. t. } x_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

其中， $F(x_1, \dots, x_n)$ 是利润函数， x_i 是第 i 种产品的数量， $i=1, \dots, n$ 。解是 n 个数的集合 x_1^*, \dots, x_n^* ，代表为了最大化利润而生产和销售的每一种产品的数量。

问题 (1) 的多期离散时间推广涉及在每个时期 t 选择要生产和出售的产品数量 x_t ：

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=1}^T F(t, x_t) \\ & \text{s. t. } x_t \geq 0, \quad t=1, \dots, T. \end{aligned} \quad (2)$$

最优解是 T 个数的集合 x_1^*, \dots, x_T^* 。因为任何一期的产出仅影响该期的利润，所以问题 (2) 就退化成一个静态问题序列，也就是说，在每期选择一个产出水平最大化当期利润。这样， T 个变量满足的 T 个一阶条件分解成 T 个互不相关的条件，每个条件涉及一个单独变量。扩展到 n 种商品将是显然的。

如果当期产出水平不仅影响现在的利润而且影响后期的利润，问题就变成真正动态的了。例如，由于改变生产率的成本（例如，雇佣和解雇的成本），当期利润可能既依赖于当期的产出又依赖于过去的产出：

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=1}^T F(t, x_t, x_{t-1}) \\ & \text{s. t. } x_t \geq 0, \quad t=1, \dots, T, \end{aligned} \quad (3)$$

在做计划的时刻 $t=0$ ，有一个产出水平 x_0 。注意， x_0 一定要规定好，因为它影响时期 1 的可用利润。最优解满足的 T 个一阶条件不是分离的；它们必须同时求解。

与问题 (2) 类似的连续时间问题是

$$\begin{aligned} & \max \int_0^T F(t, x(t)) dt \\ & \text{s. t. } x(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

解 $x^*(t)$ ， $0 \leq t \leq T$ ，是一个函数，它给出在整个计划期内每个时刻企业的最优生产率。像问题 (2) 一样，这不是一个真正的动态问题，因为任何时刻 t 的产出仅影响当期利润。最优解是选择 $x(t)$ 以最大化每个时刻 t 的利润 $F(t, x(t))$ 。

问题 (3) 的连续时间对应表达不是很直接。因为时间是连续的，所以“过去期”的含义不清楚。它与当期利润不仅依赖于当期产出而且依赖于产出关于时间的变化率的观点有关。产出的跨时变化率是 $x'(t)$ 。因此，问题可以写为

$$\max \int_0^T F(t, x(t), x'(t)) dt$$