

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

11



对称的观念 在19世纪的演变: Klein 和 Lie

— I.M. 亚格洛姆 著

— 赵振江 译



高等教育出版社



DUICHEN DE GUANNIAN
ZAI 19 SHIJI DE YANBIAN

对称的观念 在19世纪的演变: Klein 和 Lie

— I.M. 亚格洛姆 著

— 赵振江 译

Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century

Authored by I.M. Yaglom

Translated by Sergei Sossinsky

Edited by Hardy Grant and Abe Shenitzer

With 35 Illustrations and 18 Photographs

图书在版编目(C I P)数据

对称的观念在19世纪的演变: Klein 和 Lie /
(俄罗斯) 亚格洛姆著; 赵振江译. -- 北京: 高等教育
出版社, 2016.5

(数学概览 / 严加安, 季理真主编)

书名原文: Felix Klein and Sophus Lie:

Evolution of the idea of Symmetry in the
Nineteenth Century

ISBN 978-7-04-045070-5

I. ①对… II. ①亚… ②赵… III. ①对称-普及
读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 057185 号

策划编辑 王丽萍 责任编辑 李华英 封面设计 姜磊 版式设计 马敬茹
责任校对 高歌 责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 涿州市星河印刷有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 19.5
字数 320千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2016年5月第1版
印 次 2016年5月第1次印刷
定 价 59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 45070-00

《数学概览》编委会

主编： 严加安 季理真

编委： 丁 玖 李文林

曲安京 王善平

徐 佩 姚一隼

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言。” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就是明证。

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话: “有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方

法和新成就？”中国有句古话：老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界，我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下，如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多，但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷，我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如，希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期；克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的，他的报告与当时的数学前沿密切相关，对美国数学的发展起了巨大的作用；李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解；拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献，而且还是分析概率论的奠基人，他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新，写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点，良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体，数学的各个领域从来就是不可分割的，我们要以整体的眼光看待数学的各个分支，这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外，我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版，希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是：该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论，具有历史价值，有趣且易懂，它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学，它不仅具有科学性，并且也具有艺术性。罗素说：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高无上的美。”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性，数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美，它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感？阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真
2012 年秋于北京

中文版前言：对称的传记

1 导言

对称是重要的而且是无处不在的。但对称的生平，或者对称概念的演变，不是一帆风顺的。在您手里的这本书是对称观念的一本传记。因为数学是人创造的，而且数学家们在他们的作品上留下了他们的印记，因此这本书也是许多人的传记，这些人使得对称成为我们的科学文化和背景的一部分。

在日常生活中，对称与美有关，可能没有人喜欢一张不对称的面孔。但是，美和对称之间的关系是微妙的而且是复杂的。例如，一个物体对称到何种程度才是它令人愉悦且吸引人的恰当的度？一个极端的情形是一个依照球为范本的人，而球是对称度最高的形状。

所有科学家都会认同对称在现代科学中，尤其是在物理学中起着必不可少且根本的作用，范围从经典力学中的守恒定律到核物理学中的基本粒子和弦理论。

在数学中，对称是数学文化的一部分。对称与我们息息相关，即使我们有时可能没有认识到。例如，在平面几何学中，当我们谈论三角形全等的时候，我们用了对称，或者确切地说用了平面的等距群。

尽管对称的这种应用古希腊时期就已为人知，但人们为了恰当地理解对称的性质还是用了很长的时间。

但是，确切地说对称是什么？怎样精确地描述它？

众所周知，对称后面的数学观念是伽罗瓦引入的群的概念。

但是，谁写出了关于群论的第一本书而且贡献了被普遍接受的群的概念？

是谁使得群和对称成为大部分数学的基础？

这本独一无二的书回答了这些问题以及其他问题。事实上，在科学和人文学科中已经有了许多种关于对称及其应用的书。无论它们是否期待，它们倾向于给出一些优美的应用。但在您手中的这本书是不同的。它着重于对称的数学理论形成期间的许多伟大数学家的生平和数学著作，始于伽罗瓦和阿贝尔，终于克莱因和李。这些描述合在一起给出了数学上对称思想的起源、发展和威力的相当详细且精确的说明，而且它们还告诉您为了求解问题所涉及、发现和应用了哪些数学。在这种意义上，这本书是对称早期生平的一部传记。它是关于对称的一个丰富的和动态的故事。对称或群的应用的广度使得不可能有任何人写出一部对称的完整的全新的传记。

既然对称的观念在古希腊时期已被认识到了，为何本书的作者选取19世纪作为对称的数学理论的发展时期呢？

对称的故事是复杂的。我们都知道几何学的经典，或者数学的经典，是欧几里得的著作《几何原本》，而且最具对称性的立体：5种正多面体，在该书的最后一章中被描述和分类。

可能不那么为人所知的是，在某种意义上欧几里得阻碍了对称的发展。欧几里得是一个伟大的阐释者，而且他对西方文明和数学的贡献是不可估量的，这丝毫没有问题。另一方面，泰勒斯和毕达哥拉斯是比欧几里得更伟大的数学家。本质上，在泰勒斯和毕达哥拉斯的著作中已经使用了对称，或物体的运动和空间中平面的等距，而且也出现在他们对自然，以及他们对世界的思考中。后来希腊人抛弃了在几何学上使用对称（或运动），而且认为它们是低级的或者是不严格的。例如，《几何原本》一书避免使用运动，尽管在一定程度上使用了对称的某些观念。

由于欧几里得著作的巨大影响，重新拾捡起并强调这个概念花去许多个世纪是不令人惊奇的。其中有两个人是欧洲科学的奠基人：开普勒和牛顿。对称的概念在开普勒的工作中起了至关重要的作用，例如他的书《宇宙结构的神秘》(*Mysterium Cosmographicum*)，该书用5个正（即柏拉图）多面体描述当时已知的行星的轨道，《论六角形的雪》(*De nive sexangula*) 研究雪花晶体的六边形对称性，而且《新天文学》(*Astronomia Nova*) 中他的著名的行星运动定律隐含地使用了对称和守恒定律。但在

牛顿的工作中几何对称性没有被系统地使用或强调。

自然地，为了澄清开普勒的行星运动定律的含义，牛顿发现且应用的微积分顺理成章地使牛顿成为启迪欧洲后来的科学家和数学家们灵感的导师。

这一历史再次证明任何根本的和重要的东西不会被永远埋没。对称性的严格的数学表述以及它的许多应用是在 19 世纪实现的。

由于对称是重要的和无处不在的，许多伟大的数学家在诸多主题上对群的理论以及它们的应用有所贡献是不令人惊奇的。

那么，为何原书的作者通过用菲利克斯·克莱因和索菲斯·李的名字作为本书书名而把这两个人挑选出来呢？伽罗瓦和阿贝尔开启了群论而且做出了实质性的贡献。为何不用他们的名字作为该书的书名呢？

公平地说，是李和克莱因的工作和观点使群成为几何学这一博大学科的基本部分。例如，正如克莱因在他的名著《正二十面体和五次方程的解讲义》(*Lectures on the Icosahedron and the Solution of the Fifth Degree*)中所说：

我受惠于李教授的时间回溯到 1869 年至 1870 年，当时我们正在柏林和巴黎以亲密的同志关系度过我们学生生活的最后时期。在那时我们联合构思了一个方案，它通过群的变化的手段研究变换所允许的几何形式或分析形式。这一目标对我们随后的工作有直接的影响，尽管这可能看起来相距甚远。当我最初把我的注意力指向离散运算的群时，而且这导致正多面体以及它们与方程理论的关系的研究，李教授攻研了连续变换群，以及微分方程的高深理论。

大多数人知道克莱因的著名的埃朗根纲领有效地且永久地将群与几何学联系在一起。除了统一已存在的许多不同的几何学之外，它还澄清了几何学的本质：所考虑空间的对称群的不变量。

但鲜为人知的是李对埃朗根纲领做出了本质的贡献，而且埃朗根纲领的成功使这两个亲密的朋友失和且公开地争斗。

这本在其他各方面出色的书似乎对李不公平，而且没有以确切的方式描述克莱因和李之间的冲突。我们更仔细地审视一下这场冲突，对我们这个时代的人可能会是一个有益的教训。

2 克莱因和李之间的一场不幸的冲突

在更详细地讨论克莱因和李之间的这场冲突之前，让我们引用该书的第 8 章：

在李的神经和身体不适的这个时期，发生了一个不幸的事件，它损害了他与克莱因除此之外的融洽和友好的关系：在与恩格尔合写的《变换群理论》(*Theorie der Transformationsgruppen*) 的第 3 卷，李以不寻常的生硬指出：许多人认为他是克莱因的学生，而事实上反过来的关系才是真的。这相当没有策略的评论，很不合时宜地出现在纯粹的科学著作中，对克莱因伤害很大，也许正是因为李离真相不太远。然而这一评论是多此一举——无疑朋友间的学术影响是相互的。不过，克莱因选择不去回应。

似乎本书的作者和许多其他数学家引用李的陈述：“我不是克莱因的学生，反之亦然，即使它也许更接近真相。”而没有恰当地解释其背景。我们将要根据当事人所写的及保存下来的材料检查发生了什么，以及这场冲突怎样影响其他相关的人。

除了把历史弄准确之外，这样做的一个目的是我们能从这个不幸的事件中学到一些教训。克莱因和李在他们年轻的时候就是亲密的朋友，而且每一个人对另一个人的数学有巨大的正面影响。公平地说，对于他们中的每一个人，没有来自另一个人的影响，可能不会成为伟大的数学家。更多的细节包含在 [3], [2], [1], [4] 中。

这场冲突的主要原因与在那时已经非常出名的埃朗根纲领中的想法的系统的阐述和归属有关。1892 年，克莱因最终在最著名的杂志《数学年刊》(*Mathematische Annalen*) 上发表了他在小册子《埃朗根纲领》(*The Erlangen program*)。在此之前不久，当克莱因关于重新发表它的想法询问李时，李说这是一个好的想法，因为他认为这是来自 1872 年那个时期克莱因的最重要的工作，而且感到与在 1872 年它初次以小册子流传时相比，在 1892 年它会得到更好的理解和评价。当克莱因讨论并试图修订它，而且包含正式发表的他的某些合作的工作以及李的工作的时候，李认为克莱因占有的功劳多于他应得的。他们有不同的意见，而且开始了这场冲突。

更多地引用来自李 [1, 第 19 页] 的序言可能有所帮助：

菲利克斯·克莱因，在这些年跟得上我的所有的想法，有时对不连续群发展了类似的观点。在他的埃朗根纲领中，依据他的和我的想法他作了报告，除此之外，他谈论的群，按照我的术语，既不是连续的，又不是不连续的。例如，他谈到所有克雷莫纳变换的群以及畸变的群。他忽视了这些类型的群与我称作连续的群（事实上我的连续群能借助微分方程定义）之间存在本质差异这一事实。而且，在克莱因的纲领中几乎没有提到微分不变量的重要概念。这个概念来自我，克莱因无从分享，基于它可以建立一个普遍的不变量理论，而且他从我这里了解到由微分方程定义的每一个群确定的微分不变量能通过完全系统的积分得到。

我觉得提出这些意见是因为克莱因的学生们和朋友们反复错误地表达他的工作和我的工作之间的关系。此外，与克莱因有趣的纲领的新版本（到目前为止，出现在4种不同的杂志上）相伴的一些评论会引入歧途。我不是克莱因的学生，反之亦然，尽管后者可能更接近真相。

当然，所说的这一切我并没有打算批评克莱因在代数方程理论和函数论上的原创工作。我高度推崇克莱因的才能而且永远也不会忘记他在我的研究努力上的惺惺相惜的兴趣。不过，我不认为在归纳和证明之间，在一个概念和其应用之间他做了充分的区分。

根据 [5, 第 317 页],

李断言克莱因在埃朗根纲领中出现的群的类型之间没有清楚地加以区分——例如克雷莫纳变换的群以及旋转群，按照李的术语，这些群既不是连续的，又不是不连续的——而且李后来借助微分方程定义群：

“人们发现在克莱因的纲领中几乎没有微分不变量这一重要概念的任何迹象。这个概念，首先基于它可以建立一个普遍的不变量理论，是与克莱因无关的东西，而且他从我这里了解到每个群由微分方程定义，它确定的微分不变量能通过可积系统的积分得到。”

...李继续写道，克莱因，以及冯·赫尔姆霍茨，德·提利 (de Tilly), Lindermann (林德曼), 基灵，在他们的几何学基础的

研究中都犯了大错，而且很大程度上是由于他们缺乏群论的知识所致。

为了更好地理解李的这些激烈的言辞，一些解释也许是需要。根据 [4, 第 XXIII-XXIV 页]:

索菲斯·李逐渐发现菲利克斯·克莱因对他的数学工作的支持不再与他自己的兴趣一致，而且这两位朋友之间的关系变得冷淡。在 1892 年，当菲利克斯·克莱因想重新发表《埃朗根纲领》并解释其历史时，他把手稿寄给索菲斯·李，让他评论。索菲斯·李看到菲利克斯·克莱因所写的感到惊愕，而且得到这样的印象：他的朋友现在想把索菲斯·李认为是他的生平的工作的那一份据为己有。为了把事情弄得一清二楚，他请求菲利克斯·克莱因把他在《埃朗根纲领》写就之前寄给克莱因的信借给他。当他得知这些信已不存在，1892 年 11 月索菲斯·李致信菲利克斯·克莱因。

在 1892 年 11 月，李致克莱因的信这样写道 [1, 第 XXIV 页]:

我非常彻底地通读了你的手稿。首先，就你而言，我恐怕你不会成功地拿出我能作为正确的而接受的表述。在你当前的表述中，甚至有几个要点是不正确的，或者至少会误导，这是我已尖锐批评过的。我将尽可能努力把我的批评集中到特别的要点上。如果我们不能成功达成一致，我认为我们各自独立提出我们的观点是唯一正确的和合理的，之后数学界会形成他们自己的意见。

目前我只能说，我对你能烧掉我如此重要的信函是多么得遗憾。在我的眼中这是野蛮行为；我曾得到你的特别的保证，你会珍藏它们。

我已经告诉你，我的天真的时期已经过去了。即使我仍然保留着来自 1869—1872 年的美好记忆，尽管如此，我将努力把我认为自己的想法仅供自己使用。似乎你有时认为使用了我的想法就拥有了它们。

李的包罗广泛的传记 [5, 第 371 页] 对这场冲突的起源给出了其他细节:

他们 [李和克莱因] 之间的关系在近些年无疑冷淡了，尽管他们按照相同的方式互通信函，但不如过去那样频繁。不过，对于李现在中断关系这一事实的核心，首要的是专业的分歧。随

着李的《变换群理论》第一卷的出版，克莱因判断存在充分的兴趣让他再次发表他的埃朗根纲领。但在克莱因的来自 1872 年的文本重新出版之前，克莱因曾与李联系，以便发现应该怎样表述 20 年前他们之间的工作关系和想法的交流。对克莱因计划描述他们的想法和工作的方式，李强烈反对。但克莱因的埃朗根纲领付印了，而且是以德文，意大利文，英文和法文在四种不同的杂志上发表——没有考虑李的评论，这关系到在构思这一 20 岁的纲领上他的帮助。在数学界克莱因的埃朗根纲领越来越被说成是在上一代发生的几何学范式转移的核心。李关于变换群的伟大著作的第三卷的大部分专注假设或公理的深入讨论，这些假设或公理应被规定为一门几何学的基础，这门几何学——无论是否接受欧几里得的公设——被令人满意地阐明为经典几何学，以及高斯，罗巴切夫斯基，波尔约和黎曼的非欧几里得几何学。

根据李，外面散布的关于克莱因和李各自的工作之间的关系既是错误的且引起误导。李认为他曾经是配角但热衷“把握形势”，而且抓住了最初的和最佳的机会。他把他的 20 页的序言置于他的著作的专业内容之前。分裂他们的友谊而且通过数学背景产生冲击的强烈指责为时很短，也很苦涩。

克莱因是德国数学中的国王，而且在那时可能也是欧洲数学中的国王。人们对李的这一激烈的序言的反应是什么？也许希尔伯特在 1893 年写的一封信对此可以解释 [4, 第 XXV 页]：“在他的第三卷，他的妄自尊大像火焰一样喷射。”

在这场与克莱因的冲突中，李在职业上可能没有太多的损失，因为他在莱比锡大学有教授职位。但对恩格尔情形就不同了。因为恩格尔的名字也出现在该书上，为此他不得不付出代价。恩格尔正在寻找一份工作，而当时柯尼斯堡大学有一个教授职位的空缺，柯尼斯堡是希尔伯特的家乡而且他在他家乡的这所母校担任教授，这样空缺的职位对恩格尔是自然的且有可能的选择。在致克莱因的同一封信中，希尔伯特继续写道 [4, 第 XXV 页]：“恩格尔完全不在我的考虑之列。尽管在该书的序言中他本人没有做任何评论，我认为他在一定程度上要为不可理解的和完全无用的个人敌意负有共同责任，这种敌意充斥在李关于变换群的著作的第三卷。”

有几年时间恩格尔无法得到一个学术职位,* 而且克莱因安排恩格尔编辑格拉斯曼的全集, 之后又编辑李的全集; 他为编辑李的全集工作了几十年。

3 克莱因和李之间的和解

克莱因和李从他们的事业的开始就是亲密的朋友。他们都是伟大的数学家和高尚的人。尽管他们有冲突, 他们有一个幸福的结局, 这个结局与本书作者描述的也有些不同。

使本书的作者述说克莱因和李的这一故事的结局的什么? 让我们再次引用该书的第 8 章:

在短时间内, 李显然也由于自己的毫无策略的行为而受到损害——曾处于抑郁状态——再次出现在克莱因的住所, 他当然受到与以往一样的热情欢迎。李和克莱因再也没有提这个插曲, 而且幸运的是他们的友谊全然没有受到它的伤害。

不过, 真正的故事更有趣且更感人。1894 年, 为了纪念伟大的几何学家罗巴切夫斯基, 在俄国的城市喀山设立了一项国际奖。该奖颁给几何学研究, 尤其是在非欧几里得几何学发展上的研究。1897 年, 罗巴切夫斯基奖委员会请求克莱因写一篇关于李的工作的报告, 这篇报告帮助了李在 1897 年获奖, 这是该奖项的首次颁发。在克莱因的报告中, 他强调李在《变换群理论》的第三卷中的贡献, 而且克莱因的报告一年后在《数学年刊》上发表。

1898 年, 李在读过克莱因关于自己的报告之后, 他致信克莱因且因为这篇报告感谢他。这是自他们在 1892 年闹翻之后的第一封信。李还告诉克莱因他已经辞去在莱比锡大学的教授职位且不久将返回挪威。不幸的是, 李在返回挪威后不久去世。

李和克莱因之间的最后的和解生动地描绘在这个事件多年之后克莱因的妻子写的一封信中 [6, 第 XIX 页]:

* 另一方面, 恩格尔苦尽甘来。在 1904 年, 当他的朋友爱德华·施图迪卸任在格赖夫斯瓦尔德大学的数学教授一职, 他接受了这一职位, 而且在 1913 年, 他成为吉森 (Giessen) 大学的数学教授。恩格尔也获得了罗巴切夫斯基金质奖章。罗巴切夫斯基奖章不同与他的导师李及他的同国人威廉·基灵获得的罗巴切夫斯基奖。这一奖章在一些情形颁发给评审被提名的受奖者的人。例如, 在 1897 年克莱因因为他关于李的工作的报告也获得一枚金质奖章。

夏天的一个晚上,当我们短途旅行回家的时候,那里,在我们的门前,坐着一个面色苍白的有病的男子。我们在快乐的惊奇中喊道:“李!”这两个朋友握手,彼此看着对方的眼睛,而且自他们上次见面之后所发生的一切都被忘记了。李与我们在一起待了一天,这位亲爱的朋友,然而已经变了。想到他和他的悲剧性的命运我不能不动情。不久他去世了,但这位伟大的数学家在挪威已像一位国王那样被欢迎了。

在某种意义上,克莱因和李之间的这场冲突是人之常情,但也非常复杂并且相当不幸。人们在与其他人的交流中做数学。一旦一个新的想法、方法或前景出现,清楚地且精确地看清应归功于谁常常是困难的。类似的冲突在他们之前和之后都发生过,而且只要这种文明存在而且人们仍对研究感兴趣,它们将继续发生。希望所有的冲突会有好的和荣耀的结局。

4 结论

这本书可以在几个层次阅读。如果您只对与对称相关的主要人物的传记感兴趣,这里的材料是相当全面的和高效的,而且提供了一个方便的熔炉。但这样做时会失去很多。本书用容易接近的方式讨论了许多令人激动的数学。在某种意义上,通过这些伟大的数学家们的生平和相互影响使得数学变得栩栩如生。这本书独特的特色是用小号字体印刷的部分及书后的注记包含不少更高深的数学。如果读者愿意,你可以以一种有趣的方式学到许多重要的数学和历史,而且会深信对称概念的重要性。

这个中译本由赵振江博士细心译出。对于本书中所用的或引用的拉丁文和俄文,他对照了原文并且增加许多脚注。所以,这个中译本比英译本更为准确,而且读者会赏识赵振江博士的努力。

参考文献

- [1] B. Fritzsche, Sophus Lie: a sketch of his life and work. *J. Lie Theory* 9 (1999), no. 1, 1–30.
- [2] 季理真, Felix Klein: 他的生平和数学, Klein 数学讲座, 高等教育出版社, 2013.
- [3] L. Ji, Sophus Lie, a real giant in mathematics, *Notices of International Congress of Chinese Mathematicians*, Volume 3 (2015), Number 1, pp.

66-80

- [4] E. Strom, Sophus Lie. *The Sophus Lie Memorial Conference* (Oslo, 1992), Scand. Univ. Press, Oslo, 1994.
- [5] A. Stubhaug, *The Mathematician Sophus Lie. It was the audacity of my thinking.* Translated from the 2000 Norwegian original by Richard H. Daly. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [6] W. H. Young, Christian Felix Klein, *Proceedings of the Royal Society of London.* Series A. Vol. 121, No. 788 (Dec. 1, 1928).

季理真

美国密歇根大学

前 言

在某种程度上,这本关于数学史的书可以被看成是一部传记。然而,本书并不是具体地讲述一个特别的个人的生平故事(或者就像本书的书名会让人们料想是两个人的故事),而是讲述一个相当普遍的概念,即对称的发展的故事。我坚信在所有起源于 19 世纪且在我们的世纪被继承的普遍的科学观念中,对于我们时代的知识氛围,没有一个观念的贡献比对称更大。这也被不同题材和种类的致力于物理学中的对称,化学中的对称,生物中的对称等,或一般的(间或哲学上的)对称概念的众多书籍所证实。在现代的教育中,对称概念所起的作用甚至被很多教科书的封面设计证明了,例如雅各布斯的《几何学》(*Geometry*) (弗里曼出版社,1974 年)。对称同样也在艺术中起了作用,比如说,人们对著名的荷兰“数学”设计者毛里茨·科内利乌斯·埃舍尔的作品所表现的兴趣,就是例证。因此,描述数学上对称的概念的起源和演变似乎是合适的。本书也是这样做的,它面向包括非专家但对数学史和一般科学问题有兴趣的广大读者。

描述对称概念的起源和发展很自然地与两位数学家的名字相联系:德国人菲利克斯·克莱因和挪威人索菲斯·李,他们在识别相关的概念的重要性上以及在创造有能力表达它们的数学工具方面起到了带头作用。对称理论的历史,就其数学的部分而言,并不太长。不过,涉及对称概念的数学的真正的起源,正如数学思想的第一次出现所显示的,要追溯到旧石器时代且归功于以克罗马农人(Cro-Magnons)知名的现代人的先驱者。这里我们发现带有几何图案的物品,在把这些图案制作得更规