华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学基础类(二)

配高教社《概率论与数理统计》第三版 浙江大学 盛骤等 编

概率论与数理统计

浙大三版

习 题 全 解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 范亮宇

本书主编 浙江大学 刁玉全

◎ 紧扣教材 ◎ 知识精讲 ◎ 习题全解

◎ 应试必备 ◎ 联系考研 ◎ 网络增值

附:2008年硕士研究生入学统一考试试题

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步

概率论与数理统计

习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　范亮宇
丛书主编　浙江大学　习玉全

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，浙江大学盛骤、谢式千、潘承毅编的《概率论与数理统计》(第三版)教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、学习要求、知识精要、历年考研真题评析、课后习题全解及2008年数学一考研真题等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校数学课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题全解/刁玉全主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7-81107-396-X

Ⅰ.概… Ⅱ.刁… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第086957号

书　　名 概率论与数理统计(浙大第三版)习题全解
主　　编 刁玉全
责任编辑 罗　浩
选题策划 孙怀东
特约编辑 李南木
出版发行 中国矿业大学出版社
印　　刷 北京市昌平百善印刷厂
经　　销 新华书店
开　　本 880×1230　1/32　**本册印张** 6.50　**本册字数** 126千字
印　　次 2008年2月第1版第3次印刷
总 定 价 116.00元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

概率论与数理统计是大学数学课程中一门重要的基础课,也是研究生入学考试的必考内容。

浙江大学主编的《概率论与数理统计习题全解》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《概率论与数理统计习题全解》(浙大第三版)。本书对教材中的习题做了详细的解答,对一些概念性较强的题目给出了基本理论和解题方法,并对重点、难点和疑点作了注释。

本书作为一类习题性的辅助教材,旨在使读者掌握更多的知识,扩展解题思路。考虑到读者的不同情况,我们在内容上做了以下安排:

1. 课程学习指南 从该课程的知识体系出发,对各个章节在全书中的位置,以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述,使学习更有重点。

2. 学习要求 根据考试大纲的要求,总结各章重要知识点。

3. 知识精要 总结各章所有重要的定理、公式,简明扼要,使读者一目了然。

4. 历年考研真题评析 精选有代表性的近年考研真题并给出详细解答。让读者在第一遍学习时就对研究生入学考试的难度要求有初步的认识。

5. 课后习题全解 本书给出了《概率论与数理统计习题全解》(浙大第三版)各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程,而且还对解题思路和方法作了简要的说明。

6. 2008 年考研真题 本书在最后附有 2008 年数学一考研真题,并给出了相应的答案,便于学生对自己的学习效果进行考核。

编写本书时,依据大学本科现行教材及教学大纲的要求,参考了清华大

学、北京大学、同济大学、浙江大学、中国人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网： http：//www. huatengedu. com. cn

电子邮件： huateng@ huatengedu. com

华腾教育教学与研究中心

目录

课程学习指南

概率论与数理统计是理工类以及相关专业必修的一门核心理论基础课，也是以后继续深化系统学习数学理论的基础课程，同时也是理工类及经济管理各专业硕士研究生入学考试的必考科目。

学习概率论与数理统计的目的是掌握概率论与数理统计的基本理论，掌握解题的方法与技巧，提高综合分析及解决问题的能力，进而提高自己处理实际问题的能力。在社会经济高速发展的今天，概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工农业生产、金融、经济各方面的应用越来越普遍。

概率论与数理统计具有很强的理论性和系统性，需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力，因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当的预习，并了解一下相关理论的发展历程，对所学的课程有一个整体性的把握。同时，本课程又是一门指导性的学科，对它的掌握直接关系到其他后续的专业课程。

本书包含十二章内容，可分为两大部分。第一部分为概率论相关内容，包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布等内容；第二部分为数理统计相关内容，包括参数估计、假设检验、方差分析及回归分析、随机过程及其统计描述、马尔可夫链、平稳随机过程等内容。

概率论与数理统计是一门逻辑性很强的课程，因此学习这门课程有一定难度。为了学好这门课程，建议在学习过程中应按以下方法学习：

1. 理解掌握基本概念与定理，掌握基本方法。
2. 注意理论前后发展的系统性与关联性，做到融汇贯通。
3. 注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合。
4. 要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯。

第一章

概率论的基本概念

学习要求

1. 了解样本空间的概念；理解随机事件的概念；掌握事件间的关系与事件的运算.

2. 理解概率、条件概率的概念；掌握概率的基本性质；掌握计算古典型概率和几何型概率的方法；掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

3. 理解事件独立性的概念；掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念；掌握计算事件概率的方法.

知识精要

1. 基本概念

样本空间　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间.

随机事件　试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件.

事件的和　A,B 中至少有一个发生时，称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$.

事件的积　A,B 同时发生时，称为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$.

事件的差　A 发生，B 不发生时，称为 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$.

对立事件　若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，称为 A 与 B 互为对立事件.

2. 常用公式

有限可加性　$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

$(A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容)

独立性　$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$

$(A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立)

加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$

乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

减法公式 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

全概率公式 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$

贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}\ (i=1,2\cdots,n)$

历年考研真题评析

1.(2005 年,数学一,)从数 1,2,3,4 中任意取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$__________.

分析一 由于事件$\{X=1\},\{X=2\},\{X=3\},\{X=4\}$是一个完备事件组,且 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{4},i=1,2,3,4$,条件概率 $P\{Y=2|X=1\}=0,P\{Y=2|X=i\}=\dfrac{1}{i},i=2,3,4$,根据全概率公式

$$P\{Y=2\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=i\}P\{Y=2|X=i\}=\frac{1}{4}(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{13}{48}.$$

分析二 根据乘法公式 $P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j|X=i\},i,j=1,2,3,4$,容易写出$(X,Y)$的联合概率分布为

X \ Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

$$P\{Y=2\}=\sum_{i=1}^{4}P_{i2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{13}{48}.$$

2.(2006 年,数学一)设 A,B 为随机事件,且 $P(B)>0,P(A|B)=1$,则必有(　　)

A. $P(A\cup B)>P(A)$　　B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(A\cup B)=P(B)$

分析 根据乘法公式与加法公式有

$$P(AB)=P(B)+P(A|B)=P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A).$$

应选 C.

3.(2000 年,数学一)设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=$__________.

分析 依题意 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$,故 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦独立,于是有

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^2=\frac{1}{9}.$$

$$P(\overline{A})=\frac{1}{3},P(A)=\frac{2}{3}.$$

注 如果本题题设条件"两个相互独立的事件 A 和 B"改为"两个个互不相容的事件 A 和 B",其他条件不变,则 $P(A)=$__________.

分析

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}&=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)]=1-2P(A),\end{aligned}$$

于是,$P(A)=\frac{4}{9}$.

4.(2000,数学三)在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电,以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于　　(　　)

A. $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　B. $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$

C. $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　D. $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

分析 事件$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$表示至少有一个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0;$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$表示至少有两个温控器的温度不低于 t_0,即 $E=\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$,应选 C.

5.(2003 年,数学三)将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件　　(　　)

A. A_1,A_2,A_3 相互独立.　　B. A_2,A_3,A_4 相互独立.

C. A_1,A_2,A_3 两两独立.　　D. A_2,A_2,A_4 两两独立.

分析 $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{2}$, $P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(A_4)=\frac{1}{4}$,

$P(A_1A_2)=P(A_4)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_2A_3)=P(\varnothing)=0$.

计算看出 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$，但是 $P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. 因此事件 A_1,A_2,A_3 两两独立但不相互独立，应选 C. 进一步分析，由于事件 $A_2\supset A_4$，故 A_2 与 A_4 不独立，因此不能选 B 与 D.

课后习题全解

1. 分析 (4)单位圆的方程 $x^2+y^2=1$，圆内某点 (x,y) 满足 $x^2+y^2<1$.

解 (1)$S=\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\cdots,100n\}$，其中 n 为小班人数；

(2)$S=\{10,11,\cdots\}$；

(3)$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}$，其中 0 表示次品，1 表示正品；

(4)$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

2. 分析 (6)A、B、C 不多于一个发生，即三者中仅其中一个发生，每个的概率各是 $\frac{1}{3}$. A 发生 B、C 不发生，有 $\overline{B}\overline{C}$；同理，只有 B 发生，有 $\overline{A}\overline{C}$；只有 C 发生，有 $\overline{A}\overline{B}$.

(7)A、B、C 不多于两个发生，即三者中至少有一个不发生.

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$；(2)$AB\overline{C}$；(3)$A\cup B\cup C$；(4)$ABC$；(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(6)$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$；(7)$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；(8)$AB\cup BC\cup AC$.

3. 分析 P 取最小值时，$A\cup B=S$，即 A、B 并集是全集.

解 (1)因为 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$，$P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，

所以
$$P(A)<P(B)\leqslant P(A\cup B),$$
所以当 $A\subset B$ 时，$P(A\cup B)=P(B)$，$P(AB)$ 达到最大值，
$$P(AB)=P(A)=0.6;$$
(2)当 $A\cup B=S$ 时，$P(AB)$ 取到最小值，此时，
$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-1=0.3.$$
4. 分析 A、B、C 至少一个发生，所以其概率为 $A\cup B\cup C$.

解 事件至少发生一个可表示为 $A\cup B\cup C$，又 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0$，由此可知 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

5. 解 两个不同字母排列，可出现两种不同结果. 如用不同的顺序排列 o 与 n，

可得两个单词．从 26 个字母中任取两个字母排列，不同的结果数为 P_{26}^2．记 A="正好是该字典中的一个单词"，则 A 包含的结果数为 55．从而

$$P(A)=\frac{55}{P_{26}^2}=\frac{55}{26\times 25}=\frac{11}{130}.$$

6．分析　(1)最小号码为 5 时，因为全体样本空间为 1～10，故按 5 为最小取，从 6～10 中选取另两个数．

(2)过程类似于(1)，只不过把 5 改为最大号码，从 1～4 中选择另两个数．

解　(1)，(2)有同一样本空间且所含元素个数为 C_{10}^3．

(1)记 A="最小号码为 5"，则 A 的样本点数为 C_5^2，故 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$；

(2)记 B="最大号码为 5"，则 B 的样本点数为 C_4^2，故 $P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$.

小结　解此类型的题需要正确分析事件的样本空间和样本点数．

7．解　取发给顾客 9 桶油漆的所有可能情况为样本空间，其中含样本数为 C_{17}^9．记 A 为正确的发放，则 A 含有的样本数为 $C_{10}^4C_4^3C_3^2$，从而

$$P(A)=\frac{C_{10}^4\times C_4^3\times C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}.$$

8．分析　(1)200 个产品中恰有 90 个次品，即余下 110 个是正品．

(2)至少有 2 个次品，其逆事件为"至多有一个次品"．

解　(1)产品的所有取法构成样本空间，其中所含的样本数为 C_{1500}^{200}，用 A 表示取出的产品中恰有 90 个次品，则 A 中的样本数为 $C_{400}^{90}\times C_{1100}^{110}$，因此

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}\times C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}};$$

(2)用 B 表示至少有 2 个次品，则 $\overline{B}$ 表示取出的产品中至多有一个次品，$\overline{B}$ 中的样本点数为 $C_{400}^1C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}$，从而 $P(\overline{B})=\frac{C_{400}^1C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}$，因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{400}^1C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}.$$

小结　(2)中由于样本空间很大，因此按常规方法去解将极为复杂，灵活运用逆事件求解至为重要．

9．解　由题意，样本空间所含的样本点数为 C_{10}^4，用 A 表示"4 只鞋中至少有 2 只配成一双，则 $\overline{A}$ 表示"4 只鞋中没有 2 只配成一双"，$\overline{A}$ 的样本点数为 $C_5^4\times 2^4$(先从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只)．

则 $P(\overline{A})=\frac{C_5^4\times 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$，从而

$$P(A)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

10. **解** 所有可能的排列构成样本空间，其中包含的样本点数为 P_{11}^7. 用 A 表示"正确的排列"，则 A 包含的样本点数为 $C_1^1\times C_2^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1=4$,

则 $$P(A)=\frac{4}{P_{11}^7}=0.0000024=2.4\times10^{-6}.$$

11. **解** 把 3 个球放入 4 只杯中共有 4^3 种 .

记 A="杯中球的最大个数为 1"，事件 A 即为从 4 只杯中选出 3 只，然后将 3 个球放到 3 只杯中去，每只杯中一个球，则 A 所含的样本点数为 $C_4^3\times P_3^3=24$，则

$$P(A)=\frac{24}{4^3}=\frac{3}{8}.$$

记 B="杯中球的最大个数为 2"，事件 B 即为从 4 只杯中选出 1 只，再从 3 个球中选中 2 个放到此杯中，剩余 1 球放到另外 3 个杯中的某一个中，则 B 所含的样本点数为 $C_4^1\times C_3^2\times C_3^1=36$，从而

$$P(B)=\frac{36}{4^3}=\frac{9}{16}$$

记 C="杯中球的最大个数为 3"，类似地，C 所含的样本点数 $C_4^1\times C_3^3=4$，从而

$$P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

12. **分析** 可以这样理解本题，50 个铆钉中只有 3 个强度太弱，而 3 个强度太弱在一个部件上，那么余下的 47 个中取出的 27 个是正常的铆钉，10 个部位中余下 9 个都是正常部位.

解 记 A 表示"发生一个部件强度太弱"，则 A 所含的样本点数为 $C_{10}^1C_{47}^{27}\frac{27!}{(3!)^9}$.

将 50 个铆钉装在 10 个部件上的所有方法的全体看作样本空间，则所含的样本点数为 $C_{50}^{30}\frac{30!}{(3!)^{10}}$，从而

$$P(A)=\frac{C_{10}^1\times1\times C_{47}^{27}\times\frac{27!}{(3!)^9}}{C_{50}^{30}\times\frac{30!}{(3!)^9}}=\frac{1}{1960}.$$

13. **解** 由于 $A=AB\cup A\overline{B}$，且 $(AB)\cap(A\overline{B})=\varnothing$,

从而 $$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}),$$

所以 $$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2,$$

又 $$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8,$$

故 $$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(B\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25.$$