文登教育
Wendeng Education

2013

文登教育集团课堂用书

（理工类）

考研数学
题型集粹与水平测试

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

陈文灯 黄先开 主 编
李 娜 副主编

本书使用说明：

- 本书所提供的网络增值服务**全部免费**，密码无法登陆或无密码者均为盗版书籍。
- 答疑论坛说明及各复习阶段免费课件介绍详见封二、封三。
- **以题型为纲**，揭示出题规律，提炼解题技巧。
- 建议本书与“复习指南”同步使用，效果更佳！

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育
Wendeng Education

2013

文登教育集团课堂用书

（理工类）

考研数学
题型集粹与水平测试

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

陈文灯 黄先开 主 编
李 娜 副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学题型集粹与水平测试:理工类 / 陈文灯,黄先开主编. —2 版. —北京:北京理工大学出版社,2012.3

ISBN 978-7-5640-5657-5

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①陈… ②黄… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 030430 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 24.25
字　　数 / 570 千字
版　　次 / 2012 年 3 月第 2 版　2012 年 3 月第 1 次印刷　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 43.80 元　　责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前　言

本书是我主编的 2013 版《考研数学复习指南(理工类)》一书的续篇。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

本书在 2012 版的基础上作了很大程度的修订,有以下特点。

(1)重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强,覆盖面大。本书不是一般性的题解书,不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题是基于作者多年的教学心得,并经多个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以将各知识点串在一起,而且可以拓展思路,遇到从未见到的题时,可以从容应对。

本书还编写了全真模拟试题数学一(两套)、数学二(两套)。这是演练题而不是考前的压题。读者复习完本书后,严格控制在 3 小时内做完试卷,然后测算自己的得分,以此了解自己的水平。后面还给出 2012 年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学一、数学二试题及参考答案。

最后篇后篇部分的单项选择题的解题技巧,是我们多年教学经验的总结,相信在考研中能起到很大的作用。

成书仓促,定有不当及错误之处,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

陈文灯

2012.3

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇*　概率论与数理统计初步

篇后篇　模拟试题及2012年真题

篇后篇　单项选择题的解题技巧

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续

§1　函　　数

一、有关函数概念的题型

题型Ⅰ　判别函数的等价性

【解题提示】 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则为不同函数.

【例 1.1】 设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，且 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则与 $f(x)$ 等价的函数是(　　)

(A)$y=\int_0^x (x^2-2x)\mathrm{d}x$.　　(B)$y=\int_0^1 (x^2-2x)\mathrm{d}t$.

(C)$y=\int f'(x)\mathrm{d}x$.　　(D)$y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$.

【解】 设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=l$，则 $f(x)=x^2+2xl$，

两边取 $x\to 1$ 时的极限，得 $l=1+2l \Rightarrow l=-1 \Rightarrow f(x)=x^2-2x$.

(A)$y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

(B)$y=\int_0^1 (x^2-2x)\mathrm{d}t=x^2-2x$.

(C)$y=f(x)+C=x^2-2x+C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D)$y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$，定义域 $x<0$ 或 $x>2$，与 $f(x)$ 定义域不同，故(B)入选，实际做题时不必像以上那样处理，求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型Ⅱ　利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

【解题提示】 一种是所谓"凑法"——将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式，然后用"无关特性"即可得出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是先作变量替换再用"无关特性"，然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式. 多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】 求解以下各小题中 $f(x)$ 的表达式：

(1)　$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2,\quad |x|>1.$

(2)　$f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x,\quad 0<x<1.$

【解】 (1)$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}+\sin\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+2,$

故　$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sin(x^2-2)+2,\ |x|>2.$

(2) $f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=1-2\sin^2 x+\dfrac{1}{1-\sin^2 x}-1,$

故　$f(x)=-2x+\dfrac{1}{1-x},\quad 0<x<1.$

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程：$af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x$，其中 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

【解】 令 $t=-\dfrac{1}{x}$，则 $x=-\dfrac{1}{t}$，于是原方程变为　$bf(t)+af\left(-\dfrac{1}{t}\right)=-\sin\dfrac{1}{t}$，

由"无关特性"得　$bf(x)+af\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\sin\dfrac{1}{x}.$

解联立方程组　$\begin{cases} af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x \\ bf(x)+af\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\sin\dfrac{1}{x} \end{cases}$，

得　$f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(a\sin x+b\sin\dfrac{1}{x}\right).$

【例 1.4】 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2+\cos(xy)$，求 $f(x,y)$.

【解】 令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow x=\dfrac{u}{1+v}, y=\dfrac{uv}{1+v}$，则

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2+\cos\frac{u^2 v}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}+\cos\frac{u^2 v}{(1+v)^2},$$

故　$f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}+\cos\dfrac{x^2 y}{(1+y)^2}\quad (y\neq-1).$

二、函数的性质

题型 Ⅲ　函数奇偶性的判别

【解题提示】 判别函数奇偶性的方法：① 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数). ② $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. ③ 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性：

(1) $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

(3) $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$，其中 $a>0, a\neq1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

【解】 (1) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[偶函数]{f(x)为} -\int_0^{x}f(u)\mathrm{d}u$，

因为　$F(x)+F(-x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$，

所以　$F(x)$ 为奇函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，　①

$F(-x)=f(-x)+\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，　②

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，　③

又因为　$\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \xlongequal{令 u=-v} \int_0^{x}\left[\int_0^{-v}f(t)\mathrm{d}t\right](-\mathrm{d}v)=-\int_0^{x}\left[\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，④

由 ①，②，③，④ 得

$F(x)+F(-x)=\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\int_0^{x}\left[\int_{-u}^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=0$，

故　　$F(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，

因为 $g(x)+g(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$，

所以　$g(x)$ 为奇函数.

又因为　$f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)\ \Rightarrow\ f(0)=0$，

又显然有 $0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$，

所以　$f(x)$ 为奇函数.

故　$F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 Ⅳ　求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x)=f(ax)$，由于

$$F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)\xlongequal[f(x)\text{ 的周期}]{\text{因为 }T\text{ 是}}f(ax)=F(x),$$

故　$\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$，$x=b$ 均对称($a\neq b$)，求证：$y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，

于是，$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]$
$=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$，

故 $f(x)$ 是周期函数，其周期 $T=2(b-a)$.

题型 V　函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

【解题提示】　若没有言明函数 $f(x)$ 可导，则用单调性定义判别；若言明函数 $f(x)$ 可导，则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，证明 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内单调增加.

【证】

$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(x)}{x-a}=-\int_a^x\frac{f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{f(x)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t.$$

因为 $(x-a)^2>0$ 且 $f(x)$ 单调上升，当 $x>t$ 时，$f(x)-f(t)\geqslant 0$，

所以 $F'(x)\geqslant 0$，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

题型 VI　函数有界性的判别

【解题提示】　证明或判别函数有界性的思路：

(1) 利用有界性定义；

(2) 闭区间上连续函数的有界性；

(3) 有极限数列必有界；

(4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$（$l$ 为有限数），试证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【证】　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，　所以对于取 $\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$，$\exists X>0$，当　$x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-l|<\frac{|l|}{2},$$

又　$|f(x)-l|>|f(x)|-|l|$，所以　$|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$，

即　$|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数有界性，可知 $\exists S$，使 $|f(x)|<S$，$x\in[a,X]$.

取 $M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$，则对 $\forall x\in[a,+\infty)$ 恒有　$|f(x)|\leqslant M$，

即函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【例 1.10】　试证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【证】　令 $g(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，

因为　$g(-x)=\int_0^{-x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令\ u=-t}\int_0^x -u\mathrm{e}^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u)=\int_0^x u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$，

所以　$g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数，所以只需证明 $f(x)$ 在

$[0,+\infty)$ 上有界即可.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x te^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \dfrac{1}{2}$,

所以　取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $\exists X>0$, 当 $x\in[X,+\infty)$ 时,有

$\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$,　即　$0<f(x)<1$.

又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续,于是, $\exists l>0$, 使对 $\forall x\in[0,X]$, 恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant l$, 取 $M=\max\{1,l\}$, 则 $\forall x\in[0,+\infty)$, 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 同理可证 $(-\infty,0]$ 的情形,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

三、复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合,通常有三种方法:代入法(适用于初等函数的复合),分析法(适用于初等函数与分段函数的复合,或两分段函数的复合),图示法(适用于两分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【解】 $f[f(x)] = \dfrac{1}{1-f^2(x)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}} = \dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n\text{ 次}}$, 若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

【解】 $f_2(x) = f[f(x)] = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$f_3(x) = f[f_2(x)] = \dfrac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

比较以上两式可知　$f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. (由数学归纳法可证)

于是　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)] = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \dfrac{x}{|x|}$.

【例 1.13】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}.$$

(1)　当 $\varphi(x)<1$ 时,

或 $x<0,\varphi(x)=x+2<1$,即 $\begin{cases}x<0\\x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$,

或 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1<1$,即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$;

(2)　当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时,

或 $x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,即 $\begin{cases}x<0\\x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$,

或 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$;

综上所述,有 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\x+2, & -1\leqslant x<0,\\e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

【例 1.14】　设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|),\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0\\x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[\varphi(x)]$.

【解】　图示法的解题程序:1° 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图像;2° 将 $y=f(u)$ 的分界点在 xOu 坐标面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线);3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;4° 将 3° 所得结果代入 $y=f(u)$ 中便得复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{2}[\varphi(x)+|\varphi(x)|],\qquad (*)$$

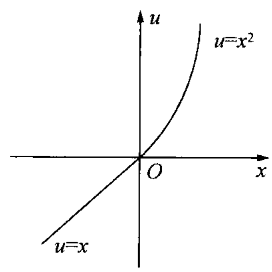

图 1.1

作出 $u=\varphi(x)$ 的图像,如图 1.1 所示,以及 $f(u)=\frac{1}{2}(u+|u|)$ 的分界点 $u=0$　(xOu 平面上的 x 轴).

当 $x<0$ 时,$u=x$.($u<0$)

当 $x\geqslant 0$ 时,$u=x^2$.($u\geqslant 0$)

将以上所得结果代入(*)式,得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x<0\\x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$.

§2　极　　限

一、数列的极限

题型 Ⅰ　已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

【解题提示】　或者利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:① 判断极限的存在性$\begin{cases}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{cases}$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;② 先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后通过解关于$l$的方程,求得$l$的值,从而得极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$).或者利用数列极限的定义求解(先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出$l$的数值,再证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的存在性.此步通常是利用$|x_n-l|$的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】　设$x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】　令　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$的两边取$n\to\infty$时的极限

$$\Rightarrow l=2+\frac{1}{l}\quad\Rightarrow\quad l^2-2l-1=0\quad\Rightarrow\quad l=1\pm\sqrt{2}.$$

因为由题设可知$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}>2$,所以　$l=1+\sqrt{2}$.

以下证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在:

$$\begin{aligned}|x_n-l|&=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{l}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{l}\right|\\&=\frac{|x_{n-1}-l|}{lx_{n-1}}\left(\text{因为 }x_{n-1}=2+\frac{1}{x_{n-2}}>2,l=2+\frac{1}{l}>2\right)\\&<\frac{|x_{n-1}-l|}{4}<\frac{|x_{n-2}-l|}{4}/4\\&=\frac{|x_{n-2}-l|}{4^2}<\frac{|x_{n-3}-l|}{4^3}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{4^{n-1}}\\&=\frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}=\frac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}},\end{aligned}$$

因为　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}=0$　所以　$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-l)=0$,

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}+1$.

【例 1.16】　设$x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】　令　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$的两边取$n\to\infty$时的极限

$\Rightarrow l=1+\dfrac{l}{1+l}\Rightarrow l^2-l-1=0\Rightarrow l=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,由题设可知$l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

以下证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在:

$$\begin{aligned}|x_n-l|&=\left|\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)-\left(1+\frac{l}{1+l}\right)\right|\\&=\frac{|x_{n-1}-l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|}<\frac{|x_{n-1}-l|}{2(1+l)}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{2^{n-1}(1+l)}\\&=\frac{\dfrac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)}=\frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}.\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-l)=0$，

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【另解】　由题设可知 $x_n>0$　$(n=1,2,\cdots)$，

$x_2-x_1=\left(1+\dfrac{x_1}{1+x_1}\right)-1=\dfrac{x_1}{1+x_1}>0$.　于是，$x_2>x_1$.

设 $x_n>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{x_n+1}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$$
$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0,$$

故　$\{x_n\}$ 单调增加.

因为 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$(因为 $x_{n-1}>0$) <2，所以$\{x_n\}$ 有界.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设其为 l，于是

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)$，即 $l=1+\dfrac{l}{1+l}$　$\Rightarrow$　$l=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由题设可知 l 非负.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【例 1.17】　设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0,x_0>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证】　因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$，所以$\{x_n\}$ 有界.

又　因为$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{(\sqrt{a})^2}\right)=1$，所以$\{x_n\}$ 单减，

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，　令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，　则由

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left((x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，可得 $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{a}{l}\right)\Rightarrow l=\sqrt{a}$，

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

注　单调数列的极限既可用极限定义法，又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 Ⅱ　求解 $n\to\infty$ 时，n 项和的极限

【解题提示】　方法有：① 特殊级数求和法. ② 利用幂级数求和法. ③ 利用定积分定义求极限. ④ 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子$\dfrac{1}{n}$，剩余的可用一个通式表示，则用定积分定义求解数列的极限；若数列的各项虽可提出一个因子$\dfrac{1}{n}$，而剩余的不能用一个通式表示，但其各项是按递增或递减排列的，则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】　求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^{1/n}}{n+1}+\dfrac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【解】　(1) 因为每一项中提出$\dfrac{1}{n}$后，剩余各项不能用一个通项表示出来. 因此不能用定积分定义求解.

$$1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1\quad(n\to\infty),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)=1.$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\leqslant\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{\ln 2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\dfrac{1}{\ln 2}$.

【例 1.19】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

【解】　$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

因为　$\dfrac{i^2}{n^2}\leqslant\dfrac{i^2+1}{n^2}\leqslant\dfrac{(i+1)^2}{n^2}$,

所以　$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

又因为　$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4},\quad 故\quad 原极限=\frac{\pi}{4}.$$

题型 Ⅲ　求 $n\to\infty$ 时，n 项乘积的极限

【解题提示】 解法有：(1) 分子，分母同乘以一个因子，使之出现连锁反应；(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式，在整个相乘过程中中间项相消，从而化简为易求极限；(3) 利用夹逼定理；(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

【例 1.20】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

【解】 (1) 因为 $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$,

又 $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)},\quad\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$,

所以原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}$.

(2) 因为

$$\left.\begin{array}{l}1\cdot3<2^2\\3\cdot5<4^2\\\cdots\cdots\\(2n-1)(2n+1)<(2n)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 1\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2\\\Rightarrow 1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot4\cdot6\cdots2n\\\cdots\cdots\\\Rightarrow 0<\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{array}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,

故由夹逼定理，原极限 $=0$.

(3) 取对数得 $\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$,

两边取 $n\to\infty$ 时的极限，得

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}$$

$$=\ln2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\ln2+\frac{\pi-4}{2},$$

故原极限 $=e^{\ln2+(\pi-4)/2}=e^{\ln2}\cdot e^{(\pi-4)/2}=2e^{(\pi-4)/2}$.

题型Ⅳ　通项为积分形式的数列的极限

【解题提示】　注意：一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的方法：(1) 利用不等式放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值，再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值定理求极限.

【例 1.21】　求下列极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x.\qquad(2)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x.\qquad(3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t.$$

【解】　(1) 因为在$[0,1]$上，$x^n\geqslant 0$，且$\dfrac{1}{1+x}$连续，

所以 $0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}$，

其中 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}=0.$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，　其中 $\varepsilon>0$ 为任意正数，

而　$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\xi\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\xi$，

其中 $0<\xi<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$，由于 $0<\sin\xi<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi=0.$

又　$0<\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$，

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

(3) 因为　$\cos 2t=1-\frac{1}{2!}(2t)^2+o(t^2)$，所以 $1-2t^2\leqslant\cos 2t\leqslant 1$，于是

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1-2t^2}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{4t^2}\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow\quad -\frac{3}{4}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2n}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant-\frac{1}{4}+\frac{n}{4}$，两边同乘以$\frac{1}{n}$，得

$$-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n^2}\leqslant\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4}.$$

因为　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{4}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}.$

题型Ⅴ　利用子序列的极限与函数的极限等值定理，求数列极限

【解题提示】　将序列中的自然数 n 换成连续变量 x，求出形式相同的函数的极限，即得数列的极限.

【例 1.22】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\right]^{x^2}$,

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\xlongequal{令 u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}\sin u-1}{u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u-u}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\cos u-1}{3u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{-\sin u}{6u}=-\frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$.

二、函数的极限

题型 I　$\frac{0}{0}$ 型未定式的定值法

【解题提示】 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法：

(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；

(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限；

(3) 利用洛毕达法则求极限(这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法)；

(4) 利用变量替换$\left(通常是令 x=\frac{1}{t} 或 x=\frac{1}{t^2}\right)$.

【例 1.23】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

【解】 (1) 将根式有理化，于是有

$$原极限=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x}{(e^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$