普通高等院校“十二五”规划教材

运筹学教程

运筹学教程编写组 编

Operations Research

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十二五”规划教材

运筹学教程

运筹学教程编写组 编

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

运筹学的根本目的是寻找解决形形色色的实际问题的一个“最优解”．运筹学是软科学中“硬度”较大的一门学科，兼有逻辑的数学和数学的逻辑的性质；运筹学的学习和入门不需要艰深的数学知识做基础，仅需微积分、线性代数和概率论的一些基本知识．

本书共分 13 章，内容包括线性规划、对偶理论、整数规划、运输问题、多目标规划、目标规划、动态规划、非线性规划、图论、决策论、对策论、存贮论、排队论、统筹方法等。各章都附有练习题，并提供了较详细的参考答案．附录介绍了当今世界上最流行的计算最优化问题的 LINGO 软件．

本书可作为财经类专业本科生、研究生的必修或选修运筹学课程的教材，也可作为相关领域读者学习运筹学的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

运筹学教程/《运筹学教程》编写组编．—北京：国防工业出版社，2012．1

普通高等院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-118-07804-6

Ⅰ．①运…　Ⅱ．①运…　Ⅲ．①运筹学—高等学校—教材

Ⅳ．①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 267478 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

开本 787×1092　1/16　印张 17½　字数 412 千字

2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 32.00 元

国防书店：(010)88540777　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　发行业务：(010)88540717

前 言

“运筹”的思想古已有之，但现代运筹学概念和方法的系统提出却是在第二次世界大战期间，1956 年传入我国．就本质而言，运筹学是用定量化方法为管理决策提供科学依据的一门应用学科，它首先把实际问题归结为数学模型，然后利用现有的科学技术知识和数学方法进行定量分析和比较，以求得最优方案，供管理者和决策者参考．

运筹学分支众多，主要包括线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、多目标规划、动态规划、图论、对策论、决策论、存贮论、排队论、统筹方法等．

运筹学的根本目标是为管理者提供科学的决策依据，其追求解决实际问题的最优方案的特质注定了其理论和方法在经济和社会生活的方方面面都有着极为重要的应用．

作为财经类院校的专任教师，我们在长期的运筹学教学和研究过程中，积累了一些深切的体会和心得，撰写了详实的教学讲义，并越发感到有必要将其出版成书，以飨读者．

本书共分 13 章，各章都附有练习题，并提供了较详细的参考答案．附录介绍了当今世界上最流行的计算最优化问题的 LINGO 软件．

本书由王继强任主编，编写绪论、第 1 章～第 4 章、第 6 章、第 8 章和附录，并统筹和审核全书；赵云霞编写第 5 章和参考答案；姜计荣编写第 7 章和第 9 章；郝秀梅编写第 10 章和第 11 章；陈晓兰编写第 12 章和第 13 章．

本书各章之间有较强的相对独立性，读者在使用时可根据需要自行取舍．

本书的编写参考了众多国内外介绍运筹学的文献资料，在此表示衷心感谢．

鉴于编者学识浅薄，书中如有不妥之处，恳请广大读者不吝指正！

编 者

2011 年 12 月

目　录

绪论 …… 1
第 1 章　线性规划 …… 5
1.1　线性规划问题 …… 5
1.2　图解法 …… 6
1.3　线性规划问题的标准形 …… 9
1.4　线性规划问题的“解” …… 12
1.5　线性规划问题的几何特征 …… 14
1.6　例谈单纯形法 …… 15
1.7　初始可行基 …… 16
1.8　单纯形表 …… 18
1.9　最优性的检验 …… 22
1.10　单纯形法的算法步骤 …… 24
1.11　单纯形法的进一步讨论 …… 27
1.12　大 M 法 …… 33
1.13　两阶段法 …… 38
练习 1 …… 44
第 2 章　对偶理论 …… 50
2.1　对偶问题 …… 50
2.2　对偶问题的基本性质 …… 53
2.3　对偶单纯形法 …… 58
2.4　对偶问题的经济意义——影子价格 …… 63
2.5　敏感性分析 …… 66
练习 2 …… 73
第 3 章　整数规划 …… 78
3.1　整数规划问题 …… 78
3.2　具有整数解的线性规划问题 …… 79
3.3　割平面法 …… 81
3.4　分枝定界法 …… 85
练习 3 …… 92
第 4 章　运输问题 …… 93
4.1　运输问题 …… 93
4.2　初始基本可行解 …… 96

4.3　最优性的检验 …… 97
4.4　算法步骤 …… 100
4.5　不平衡型运输问题 …… 103
4.6　指派问题 …… 104
练习 4 …… 111
第 5 章　多目标规划和目标规划 …… 112
5.1　多目标规划的概念 …… 112
5.2　多目标规划的解法 …… 115
5.3　目标规划 …… 117
5.4　双变量目标规划的图解法 …… 119
5.5　多阶段单纯形法 …… 121
练习 5 …… 124
第 6 章　动态规划 …… 127
6.1　基本概念 …… 127
6.2　动态规划的应用 …… 130
练习 6 …… 145
第 7 章　非线性规划 …… 146
7.1　非线性规划的概念 …… 146
7.2　非线性规划基本定理 …… 148
7.3　无约束非线性规划 …… 153
7.4　约束非线性规划 …… 155
练习 7 …… 157
第 8 章　图论 …… 158
8.1　图论的起源 …… 158
8.2　图的基本概念 …… 158
8.3　树 …… 162
8.4　中国邮递员问题 …… 165
8.5　旅行售货员问题 …… 168
8.6　最短路问题 …… 171
8.7　最大流问题 …… 175
练习 8 …… 179
第 9 章　决策论 …… 182
9.1　决策的概念 …… 182
9.2　不确定型决策 …… 184
9.3　风险型决策 …… 186
9.4　信息的价值 …… 191
9.5　效用理论 …… 195
练习 9 …… 197
第 10 章　对策论 …… 199
10.1　对策模型 …… 199

10.2 矩阵对策的纯策略 …… 202
10.3 矩阵对策的混合策略 …… 206
练习 10 …… 209
第 11 章 存贮论 …… 211
11.1 存贮模型 …… 211
11.2 第一类存贮模型 …… 212
11.3 第二类存贮模型 …… 214
练习 11 …… 216
第 12 章 排队论 …… 218
12.1 排队模型 …… 218
12.2 $M/M/1/\infty$ 模型 …… 219
12.3 其他排队模型 …… 226
练习 12 …… 230
第 13 章 统筹方法 …… 231
13.1 统筹图 …… 231
13.2 统筹图中有关参数的计算 …… 235
练习 13 …… 241
参考答案 …… 242
附录 LINGO 软件介绍 …… 253
参考文献 …… 272

绪 论

溯源

“运筹”二字语出西汉司马迁著《史记》第八卷刘邦论“汉初三杰”:“夫运筹策帷帐之中,决胜于千里之外,吾不如子房. 镇国家,抚百姓,给饷馈,不绝粮道,吾不如萧何. 连百万之军,战必胜,攻必取,吾不如韩信. 此三者,皆人杰也,吾能用之,此吾所以取天下也.”

“运筹学”的英、美译名分别为“Operational Research”和“Operations Research”,简称为“O. R.”.

1956年,钱学森、许国志、刘源张、周华章等将“O. R.”引入我国,并译名为“作业研究、运用研究、运用学”等. 1957年,周华章借成语“运筹帷幄”的内涵,译“O. R.”为“运筹学”. 这一称谓既显示其军事起源,也表明其在我国已早有萌芽. 在我国台湾地区,“O. R.”被译为“作业研究”,简称“作研”.

定义

钱学森的定义:“系统工程的前身,即运行分析(Operations Analysis)和运筹学(Operations Research)到20世纪40年代才出现. 在国外常常把复杂工程系统的工程工作和大企业组织的经营管理工作并为一门科学系统,叫做运筹学. 老的运筹学不包括系统工程的内容,而只包括了系统工程的特殊数学理论,即线性规划、非线性规划、博弈论、排队论、库存论、决策论、搜索论、可靠性理论等. 运筹学是属于技术科学范畴的.”

中国运筹学会理事长章祥荪的定义:运筹学是使用科学的方法去研究人类对各种资源的运用、筹划活动的基本规律,以便发挥有限资源的最大效益,来达到总体全局优化的目标.

美国学者莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)的定义:运筹学是为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法.

美国运筹学会的定义:运筹学所研究的问题通常是在要求分配有限资源的条件下,科学地决定如何最好地设计和运营人机系统.

英国运筹学会的定义:运筹学是把科学方法应用在指导和管理有关的人员、机器、物资以及工商业、政府和国防方面资金的大系统中所发生的各种问题,帮助主管人员科学地决定方针和政策.

《中国管理百科全书》的定义:运筹学是应用分析、试验、量化的方法,对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排,为决策者提供有依据的最优方案,以实现最有效的管理.

以上定义的共同点是量化、决策、最优,即用量化的方法为决策提供定量依据.

一般定义:运筹学是用定量化方法为管理决策提供科学依据的一门应用学科. 它首先把实际问题归结为数学模型,然后利用现有的科学技术知识和数学方法进行定量分析和

比较，以求得最优方案，供管理者和决策者参考.简言之，运筹学是一门根据给定的目标和条件，从若干个可行方案中选择最优方案的最优化技术. 也可以说，运筹学是一种给出问题的坏的答案的艺术；否则，问题的结果会更坏.诙谐之余，揭示运筹学之本质亦可谓深刻.

研究对象

社会、经济、生产管理、军事等活动中的决策问题.

研究目的

决策问题的优化理论研究和依据研究结果提出决策方案.

研究方法(步骤)

提出问题、建立模型、模型求解、解的检验与控制、解的实施.

简史

现代运筹学的兴起可以追溯到20世纪初期，但其概念和方法的系统提出却是在第二次世界大战期间.第二次世界大战期间，盟军运输船队在大西洋上常常遭到德国潜艇的袭击.英国海军为研究如何使商船在遭到德国潜艇袭击时最大程度地减少损失等问题，成立了一些专门小组，是为最早研究运筹学的小组. 后美军亦成立了类似组织.

第二次世界大战后，运筹学的研究中心从英国转移到了美国，研究的范围也渐趋扩大.运筹学在继续为军事和战争服务的同时，也逐渐转向企业、商业和政府部门等.

1948 年，美国麻省理工学院率先开设了运筹学课程，许多大学群起效法.

1949 年，线性规划理论建立.

20 世纪 50 年代，计算机技术的提高对运筹学的研究起了巨大的推动作用.如 1951 年时，国际水平仅能解约束条件为 10 个的线性规划问题，而 1963 年时，就能解约束条件为 1000 个～10000 个的线性规划问题；再如解一个约束条件为 67 个的线性规划问题，1956 年时需要 1 小时，而 1963 年时仅需 28 秒!

1950 年，英国出版了第一份运筹学杂志《运筹学季刊》(O. R. Quarterly).目前，国际上著名的运筹学刊物主要有 Management Science，Operations Research，Journal of Operations Research Society 等.

1951 年，非线性规划理论创立. 同年，Morse 和 Kimball 出版了《运筹学方法》(Methods of Operations Research)一书，这是第一本以“运筹学”为名的专著.

1952 年，美国咯斯(Case)工业大学第一次设立了运筹学硕士、博士点.

1954 年，网络流理论建立.

1955 年，随机规划理论创立.

1958 年，整数规划理论创立.同时，排队论、存贮论和决策论也得到了迅速发展.

20 世纪 60 年代，运筹学的各分支逐渐形成且日臻完善.

20 世纪 70 年代，运筹学开始进入高校，数学系本科高年级及研究生、管理、工商、财政、经济、统计、计算机、工科类本科生也开始开设运筹学课程.

20 世纪 80 年代，运筹学被用于解决人口、粮食、能源、裁军、经济、教育、环境、交通等世界性问题.

20 世纪 90 年代至今，运筹学的研究更是呈现出一派欣欣向荣的景象，并且一日千里地向前发展着.

运筹学会

1948 年,英国成立了世界上第一个运筹学会,后美国(1952 年)、法国(1956 年)、日本(1957 年)、印度(1957 年)也分别成立了自己的运筹学会.

1980 年,中国运筹学会(ORSC,ORerations Research Society of China)成立,网址为 http://www.orsc.org.cn.

1959 年,英美发起成立国际运筹学联合会(International Federation of ORerations Research Societies,IFORS),现有 44 个成员国,网址为 http://www.iforms.org.

1982 年,中国加入国际运筹学联合会.

1984 年,亚太运筹学会联合会(Asia - Pacific Operations Research Society,APORS)成立.

运筹学在中国

1956 年,运筹学被引入我国,后于 1957 年正式定名. 同年,在钱学森、华罗庚、许国志等的指导与参与下,我国第一个运筹学研究小组在中国科学院力学研究所成立,并招收了我国第一批运筹学研究生.

1958 年,中科院在运筹学研究小组的基础上组建成立运筹学研究室,研究的著名问题之一是"打麦场的选址",即在当时以手工收割为主的情况下如何节省人力和时间,是现在的物流学(logistics)的雏形.

1960 年,毛泽东视察山东,参观数学科研成果时,翻阅了《公社数学》,并特别详细询问了"线性规划"的应用等问题.(说:"搞社会主义建设离不开科研,研制出来的这些成果都是为社会主义现代化需要服务的,要好好地推广.")

1962 年,管梅谷首次提出并研究"中国邮递员问题",在世界上引起了强烈反响.

1963 年,中国科学技术大学应用数学系第一次在中国大学里开设了运筹学专业,由中科院运筹学研究室的运筹学先驱们授课.

1965 年,身为中国数学会理事长的华罗庚响应毛泽东的号召,提出"生产工艺上搞优选,生产管理上搞统筹"的口号,并亲自到全国约 20 个省的农村、厂矿推广统筹方法和优选法,开展广泛的运筹学启蒙运动.

"文化大革命"期间,运筹学的研究完全陷入停滞状态.

1980 年 4 月,中国运筹学会第一届代表大会在山东济南召开,华罗庚当选为任第一任理事长,中国运筹学会成立.

1982 年,中国运筹学会加入国际运筹学联合会.

1984 年,中国运筹学会参与了亚太运筹学会联合会的筹建工作,是 8 个创始国之一.

目前,中国大陆和港澳台等地的运筹学研究工作都在国际上占有举足轻重的地位,但中国的运筹学研究多侧重"运筹数学",而对"运筹科学和运筹学应用"重视不够(美国前运筹学会主席 S. Bonder 语).

面临的挑战

(1) 教育问题:缺少真正的不附属于管理、工程和数学的运筹学课程.

(2) 软件问题:缺少面向用户的各种运筹学软件.

(3) 交流问题:运筹学的学术会议仍是一种封闭式的、学术程度很高的会议,只有从数学体系中培养出来的人才能在会上向同行们作学术报告,不懂如何面向管理人员做

报告.

(4) 理解的误区:部分人认为运筹学就是数学,这是由于运筹学还缺少非数学理论.

分支

运筹学分支众多,简介如下:

线性规划(linear programming):在一组线性不等式或等式约束条件下,求一个线性目标函数的最值,是最基本的运筹学分支.

非线性规划(nonlinear programming):与线性规划相对,目标函数或约束条件中含有非线性函数,内容体系更庞大,种类繁多,方法多样.

整数规划(integer programming):全部或部分变量要求为整数的线性或非线性规划问题.

目标规划(goal programming):线性规划的一种变异形式,容许存在不同层次的相互冲突的多个目标.各目标是分等级的,按优先级处理.

多目标规划(multiobjective programming):研究具有多个目标的规划问题.

动态规划(dynamic programming):研究多阶段决策问题.

参数规划(parametric programming):目标函数或约束条件中含有参数的规划问题.

随机规划(random programming):目标函数或约束条件中含有随机变量的规划问题.

几何规划(geometric programming):目标函数和约束条件都是广义多项式的非线性规划问题.

模糊规划(fuzzy programming):含有模糊概念的规划问题.

以上合称数学规划(mathematical programming)或规划论.

图论(graph theory):图论是离散数学(discrete mathematics)的重要分支之一,研究图与网络最优化问题及其应用,是网络技术的基础.

对策论(game theory):亦称博奕论,研究具有对抗性质的问题.

决策论(decision theory):与对策论相反,研究非对抗性问题,其最终目的是从若干可行方案中决定选择某一最优方案.

存贮论(storage theory, inventory theory):即库存管理理论,研究库存问题,合理选择存贮方案,以使得各项费用的总和最小.

排队论(queueing theory):即随机服务系统理论,研究排队系统的运行效率、服务质量,确定系统参数(排队长度、等待时间等)的最优值,以决定系统结构是否合理及是否采取改进措施等.

其他:如模拟(simulation)、可靠性理论(reliability theory)、统筹方法(planning method)、质量控制(quality control)、搜索论(search theory)等.

应用领域

运筹学理论和方法已渗透到诸如服务、库存、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性等各个方面.我们深信,方兴未艾的运筹学研究必将为有中国特色的社会主义现代化建设做出更大的贡献.

第 1 章　线性规划

线性规划是运筹学中研究较早，理论和算法都比较成熟的分支之一.

线性规划问题的数学模型最早是 1939 年由前苏联经济学家、数学家康托罗维奇(Kantorovich)在研究铁路运输组织问题和工业生产管理问题时提出的，他在《生产组织与计划中的数学方法》中提出了“解乘数法”.

1975 年，康托罗维奇和另一美国经济学家库普曼斯(T. C. Koopmans)共同获得诺贝尔经济学奖. 后美国经济学家阿罗(K. J. Arrow)、萨缪尔森(P. Samuelson)、西蒙(A. Simon)等都因在这一领域的突出贡献而获得诺贝尔经济学奖. 1947 年，美国数学家旦茨基(G. B. Dantzig)提出单纯形法(simplex method). 1953 年，旦茨基提出改进单纯形法(revised simplex method). 1954 年，美国数学家兰姆凯(Lemke)提出对偶单纯形法(dual simplex method). 1979 年，前苏联数学家哈奇扬(Khachian)提出椭球算法(ellipsoid method). 1984 年，印度数学家卡马卡(Karmarkar)提出内点法(interior - point method).

除上述算法外，LINGO 软件也是一个求解包括线性规划问题在内的诸多最优化问题的有力工具(见附录).

1.1　线性规划问题

先来看一个实际问题.

例 1.1.1　(生产计划问题)某厂计划利用 A、B、C 三种原料生产 Ⅰ、Ⅱ 两种产品，有关数据见表 1.1.1.

表 1.1.1

生产单位产品所需原料的数量 (产品 / 原料)	Ⅰ	Ⅱ	原料的供应量
A	1	1	300
B	2	1	400
C	0	1	250
产品的单位利润	50	100	

问：应如何安排生产计划，才能既满足原料的供应量，又获利最大？

不难知道，若设生产产品 Ⅰ、Ⅱ 的数量分别为 x_1, x_2，则可建立如下数学模型：

$$
\begin{cases}
\max \quad z = 50x_1 + 100x_2 \\
\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leqslant 300 \\
\qquad 2x_1 + x_2 \leqslant 400 \\
\qquad x_2 \leqslant 250 \\
\qquad x_1, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

上述模型是微积分学中常见的条件最值问题，只不过条件和求最值的函数都是线性的，在运筹学中称为线性规划问题(linear programming problem)，其中变量 x_1、x_2 称为决策变量(decision variable)，函数 $z=50x_1+100x_2$ 称为目标函数(objective function)，条件 $x_1+x_2\leqslant300$，$2x_1+x_2\leqslant400$，$x_2\leqslant250$，$x_1,x_2\geqslant0$ 称为约束条件(constrant).

定义 1.1.1 线性规划问题是在一组线性的等式或不等式约束条件下，求一组决策变量的值，使一个线性的目标函数达到最大(小)值.

注 线性规划和后续章节将要讲到的非线性规划、整数规划等统称为数学规划(mathematical programming).

据例 1.1.1，可写出线性规划问题的一般形式(general form)：

$$
\begin{cases}
\max(\min) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_1 \\
\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_2 \\
\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_m \\
\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{cases}
$$

简记为

$$
\begin{cases}
\max(\min) \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\geqslant, =) b_i, i = 1,2,\cdots,m \\
\qquad x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

为便利后续表述，引入以下术语：

令集合 $K = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\geqslant, =) b_i, i=1,2,\cdots,m; x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n\right\}$，称为线性规划问题的可行域(feasible region)，可行域中的任一向量称为可行解(feasible solution)；使目标函数达到最值时的可行解称为线性规划问题的最优解(optimal solution)，最优解对应的目标函数值称为最优值(optimal value).

除非特别说明，本书约定可行解和最优解等向量都是列向量.

1.2 图解法

线性规划问题的求解有许多方法，但对于仅有两个变量的线性规划问题，可采用图解

法(graphical method)来求解.

图解法的基本思想:在坐标平面 x_1Ox_2 内,作出线性规划问题的可行域 K 及目标函数直线簇 $x_2 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{z}{b}$(由直线 $x_2 = -\frac{a}{b}x_1$ 平行移动得到),从图上直接找出最优解和最优值.

例 1.2.1 利用图解法求解线性规划问题

$$\begin{cases} \max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ & 4x_1 \leqslant 16 \\ & 4x_2 \leqslant 12 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 在坐标平面 x_1Ox_2 内,作出可行域 K 和目标函数直线簇 $z = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$,如图 1.2.1 所示.

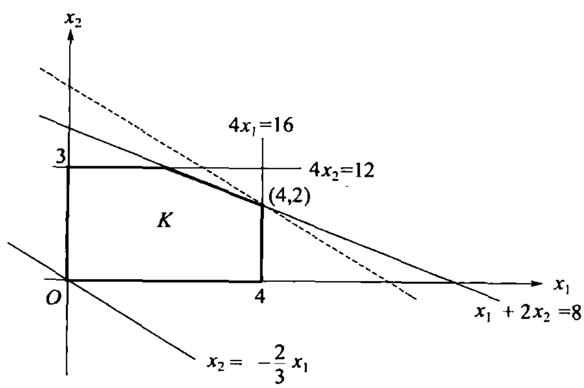

图 1.2.1

易见,当目标函数直线簇平移到点(4,2)时,截距$\frac{z}{3}$最大,当然 z 也最大.

因此,原线性规划问题的最优解为$(4,2)^{\mathrm{T}}$,最优值为 14.

例 1.2.2 利用图解法求解线性规划问题

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ & x_2 \leqslant 2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 在坐标平面 x_1Ox_2 内,作出可行域 K 和目标函数直线簇 $z = x_1 + 2x_2 \Rightarrow x_2$

$= -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$,如图 1.2.2 所示.

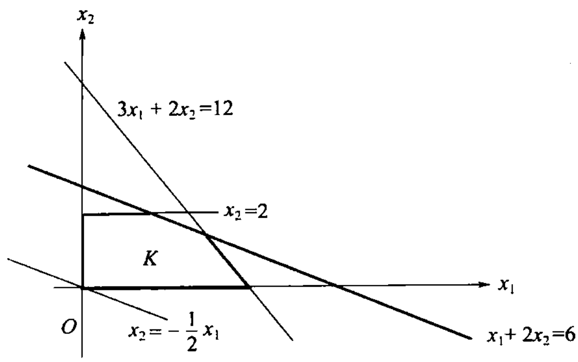

图 1.2.2

易见,当目标函数直线簇平移到与直线 $x_1+2x_2=6$ 重合的位置时,截距$\frac{z}{2}$最大,当然 z 也最大.

因此,原线性规划问题有无穷多最优解: $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mid x_1+2x_2=6, 2\leqslant x_1\leqslant 3\right\}$,最优值为6.

例 1.2.3 利用图解法求解线性规划问题

$$\begin{cases}\max \quad z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ \qquad -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ \qquad x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

解 在坐标平面 x_1Ox_2 内,作出可行域 K 和目标函数直线簇 $z=x_1+x_2 \Rightarrow x_2=-x_1+z$,如图 1.2.3 所示.

易见,当目标函数直线簇逐渐向上平移时,截距 z 可无限制地增大.

因此,原线性规划问题的目标函数无上界,当然无最优解.

注 若将本例的目标函数改为"$\min z=-x_1-x_2$",则该线性规划问题的目标函数无下界. 无上界和无下界统称为无界(unbounded).

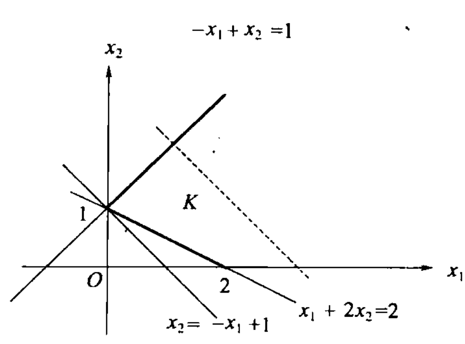

图 1.2.3

例 1.2.4 利用图解法求解线性规划问题

$$\begin{cases}\min & z = -3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

解 在坐标平面 x_1Ox_2 内,作出可行域 K,如图 1.2.4 所示.

易见,$K=\Phi$. 因此,原线性规划问题不存在可行解(简称为不可行),当然无最优解.

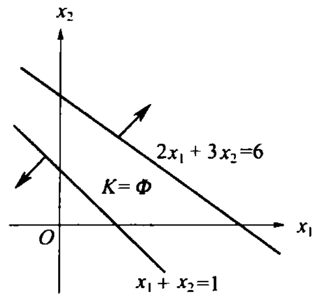

图 1.2.4

综合上述 4 个例子,可以得出如下结论:

(1) 线性规划问题的最优解的各种情况:

$$\begin{cases}\text{不可行(当然无最优解)} \\ \text{可行}\begin{cases}\text{有唯一最优解} \\ \text{有无穷多最优解} \\ \text{无(上、下)界(当然无最优解)}\end{cases}\end{cases}$$

(2) 线性规划问题的可行域为有界或无界的凸集(见 1.5 节).

(3) 线性规划问题的任意两个可行解的连线段上的点亦均为可行解,任意两个最优解的连线段上的点亦均为最优解.

(4) 若线性规划问题有最优解,则必可从可行域的顶点中找到一个.

1.3 线性规划问题的标准形

在线性规划问题的一般形式的基础上,给出其标准形(standard form):

$$\begin{cases}\min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s. t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0\end{cases} \tag{1.3.1}$$

简记为

$$\begin{cases}\min & z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ & x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{1.3.2}$$

在后续表述中,标准形(1.3.1)和(1.3.2)常常记为 LP. 显然,LP 具有如下特点:

(1) 目标函数取最小化.

(2) 决策变量均取非负值.

(3) 除变量约束外的其余约束条件均为等式.

命题 1.3.1 任何形式的线性规划问题均可化为标准形.

证明 分三种情况分析.

情况 1 目标函数取最大化

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \text{可转化为} \min f = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j.$$

转化前后,最优解相同,但最优值异号.

情况 2 出现不等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \xrightarrow{\text{引入松弛变量 } x_{n+1}} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i; \\ x_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \xrightarrow{\text{引入剩余变量 } x_{n+1}} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i. \\ x_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

松弛变量(slack variable)和剩余变量(surplus variable)常笼统地称为松弛变量.

情况 3 存在自由变量(free variable)

x_j 无限制 $\xrightarrow{\text{引入人工变量 } u_j, v_j} \begin{cases} x_j = u_j - v_j \\ u_j, v_j \geqslant 0 \end{cases}$,并将 $x_j = u_j - v_j$ 代入各约束条件.

例 1.3.1 将下列线性规划问题化为标准形:

$$(1)\begin{cases} \max \quad z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 4 \\ \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 5 \\ \quad x_2 + x_3 \geqslant 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ \quad -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 (1)引入松弛变量 x_4, x_5, x_6,并修改目标函数,将原线性规划问题化为标准形:

$$\begin{cases} \min \quad f = -x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 - x_6 = 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$