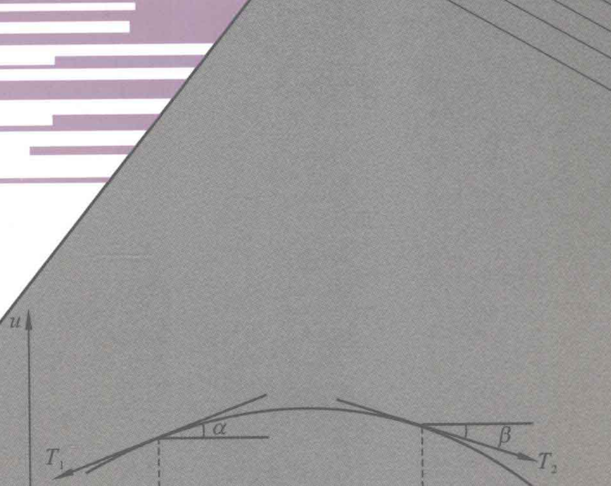
新世纪高等学校教材

PIANWEIFEN FANGCHENG

数学与应用数学基础课系列教材

偏微分方程

北京师范大学数学科学学院 主 编
保继光 朱汝金 编 著



北京师范大学出版集团
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学与应用数学基础课系列教材

偏微分方程

PIANWEIFEN FANGCHENG

北京师范大学数学科学学院　主　编
保继光　朱汝金　编　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

偏微分方程／保继光，朱汝金编著.—北京：北京师范大学出版社，2011.9

（新世纪高等学校教材．数学与应用数学基础课系列教材）

ISBN 978-7-303-13361-1

Ⅰ．①偏… Ⅱ．①保…②朱… Ⅲ．①偏微分方程-高等学校-教材 Ⅳ．①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 171629 号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：17.5
字　　数：310 千字
版　　次：2011 年 9 月第 1 版
印　　次：2011 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：26.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　王　珍
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

内容提要

本书介绍偏微分方程中典型方程的物理背景、主要解法及有关适定性的基本结论．初步介绍能量积分、积分变换、先验估计、变分法与广义解等重要概念．全书的论证及计算完整，难易层次分明，力求简明易读．本书可用于普通高等学校教材，也可用作自学读本．读者具有数学分析、常微分方程知识就可学习本书．略去选讲的材料，57 课时可以基本讲完全书．

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院. 学院现有教师79人，其中教授35人，副教授27人；有博士学位的教师占90%. 特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划入选者2人，高等学校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授6人和讲座教授1人，国家杰出青年科学基金获得者4人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人，北京市高等学校教学名师奖3人，教育部跨世纪人才培养计划(教育部高校青年教师奖，教育部新世纪优秀人才支持计划) 11人，德国洪堡(Humboldt)基金获得者9人.

学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权. 1988年基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科. 1990年建立了我校第1个博士后流动站. 1996年数学学科成为国家"211工程"重点建设的学科. 1997年成为国家基础科学人才培养基金基地. 1998年获数学一级学科博士学位授予权. 2001年概率论方向被评为我国数学界第1个国家自然科学基金创新群体，并获得3期9年资助. 2005年进入"985工程"科技创新基础建设平台. 2007年数学被评为一级学科国家重点学科. 2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点. 2009年国家教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为国家教育部创新团队. 2011年获计算数学博士学位授予权. 学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、课程与教学论(数学)、科学技术史(数学)、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点. 学院下设数学系、统计与金融数学系，有数学与应用数学、统计学2个本科专业和《数学通报》杂志编辑部. (李仲来执笔)

2011年7月26日

前　言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系．2004 年成立北京师范大学数学科学学院．经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验．将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的．

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机．北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版．除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有 5 种版本．第 1 种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 1985 年，由我校出版社编写出版了 1 套(17 部)数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材．在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要．第 2 种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材．第 3 种是面向 21 世纪课程教材．第 4 种是北京师范大学现代数学课程教材．第 5 种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书．在这些教材中，除再次印刷外，已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版．

2005 年 5 月，李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责)，准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写．计划用几年时间，出版数学及应用数学、数学教育、大学数学基础课程、数学学科硕士研究生 4 个系列的主

要课程教材. 我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

2011 年 7 月 26 日

目 录

第1章 引 言

§1.1 偏微分方程的定义与典型实例

偏微分方程指的是包含多元未知函数及其偏导数的关系式. 它反映数学、物理学、力学及工程技术问题中出现的一些量之间的相互关系,因此,最基本的偏微分方程也称为数学物理方程.

从历史上看,偏微分方程的重要源泉是物理学与几何学. 20 世纪末以来,偏微分方程又在备受关注的图像处理与金融数学领域大量出现. 下面分别简要介绍这些方面的实例.

图 1.1-1 罗素

1834 年,英国科学家罗素(J. Russell,1808—1882)偶然观测到一种奇妙的水波:一条在狭窄河道中的船被两匹马拉着前进,突然,船停了下来,但河道内被船体带动的水团并未停止前进,它们先是聚集在周围激烈扰动,然后呈现一个长度约 30 英尺①,高约 1～1.5 英尺的滚圆状光滑而巨大的孤立波峰,以每小时 8～9 英里的速度向前推进了 1～2 英里②,最终消失在逶迤的河道中. 1895 年,荷兰数学家科特韦格(D. Korteweg,1848—1941)和德弗里斯(G. de Vries,1866—1934)针对上述现象深入研究了浅水波运动,建立所谓的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{2\alpha}{3}u+\frac{\sigma}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

其中 u 是波峰的高度,l 是水深,g 是重力加速度. 它的解定量地描述孤立波峰,称为**孤立子**. 进入 20 世纪对它的研究广为关注,掀起高潮. 仅在美国数学会的 MathSciNet 网站上就能搜索到有关 KdV 方程的数学论文 4 971 篇,其中仅 2010 年就有 164 篇.

1827 年,德国数学大师高斯(C. Gauss,1777—1855)出版了名著《关于曲面

① 英旧制,1 英尺=0.304 8 米.

② 英旧制,1 英里=1.609 3 千米.

的一般研究》，奠定了微分几何中曲面论研究的基础. 该书给出曲面的高斯曲率的概念，并导出具有指定高斯曲率的曲面方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=K(x,y)\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^2,$$

其中 $K(x,y)$ 是曲面 $z=u(x,y)$ 在点 (x,y) 处的高斯曲率. 为纪念法国数学家孟日(G. Monge, 1746－1818)和安培(A. Ampere, 1775－1836)的贡献，此方程被称为孟日一安培(Monge-Ampere)方程.

图 1.1-2　印在德国 10 马克上的高斯像

图像就是一些二维或三维的信号，其数学表述就是多元函数. 图像处理领域中对图像分割和滤波的研究就要应用偏微分方程理论. 这方面最早的工作是 20 世纪 80 年代初人们对图像光滑、增强和结构的探索. 1993 年法国数学家利翁斯(P. L. Lions, 1956－)等人推出所谓仿射的形态尺度空间(Affine Morphological Scale Space)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=|Du|\left(\mathrm{curv}(u)\right)^{\frac{1}{3}},$$

其中 u 表示图像的亮度，而

$$\mathrm{curv}(u)=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u\partial u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

这个工作标志着基于偏微分方程的图像处理学科的形成，对此有兴趣的读者可以参看张亶、陈刚编著的《基于偏微分方程的图像处理》(高等教育出版社，2004 年版)等著作.

在金融衍生品的风险管理中，人们常常借助偏微分方程与数理统计等工具建立数学模型. 然后通过对有关信息的处理，作出投资决策，以避免交易时的主观判断而受个人情绪、爱好的影响. 1987 年以后，很多学者研究了标的资产的波动率，在考虑股票期权的定价问题中，证券组合的最高合理价格 $V(s,t)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{s^2}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+rs\,\frac{\partial V}{\partial s}-rV=0\ ,$$

其中 r 是利率,函数

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_1, & x>0,\\ \sigma_2, & x<0,\end{cases}$$

σ_1,σ_2 是两个常数,$\sigma_1<\sigma_2$. 此方程称为 Black-Scholes-Barenblatt 方程. 读者欲更多地了解偏微分方程在期权定价理论中的应用,可参看姜礼尚教授(2005 年华罗庚数学奖获得者)等人的著作《金融衍生产品定价的数学模型与案例分析》(高等教育出版社,2008 年版).

§1.2 偏微分方程的发展历史

微积分诞生不久，人们就开始研究偏微分方程．到18世纪已相继提出弦振动方程、调和方程与热传导方程等著名的方程．19世纪中叶，随着对具体方程的深入研究，逐渐形成偏微分方程的一般理论．进入20世纪以来，生产实践与科学实验提出大量的数学物理方程新问题，需要做深入研究；另一方面，由于数学科学的发展，新的数学理论与方法为数学物理方程研究提供新的有力的工具，在理论与应用两方面都取得巨大的成效；计算机的普及、计算方法的创新给数学物理方程的应用创造更加有利的条件．可以说偏微分方程起源于18世纪，发展于19世纪，兴盛于20世纪．

1734年，在欧拉(L. Euler，1707－1783)的著作中就出现了偏微分方程．欧拉出生于瑞士的一个牧师家庭，13岁即进入巴塞尔大学学习，成名后长期在俄罗斯彼得堡科学院工作．他是历史上最多产的数学家，生前发表560多种论文与专著，死后还留下大量手稿，他去世80年后，彼得堡科学院院报上还刊登他的遗作．他被尊为“分析的化身”和近代数学的先驱．他的老师伯努利(D. Bernoulli，1700－1782)在给他的一封信中盛赞这位学生：“我介绍高等分析时，它还是个孩子，而您正将它带大成人．”分析中的一批标准的符号，如函数$f(x)$，求和号$\sum$，超越数e及虚数单位i，等，都是他引进的．瑞士教育与科研国务秘书(C. Kleiber，1942—　)曾说：“没有欧拉的众多科学发现，今天的我们将过着完全不一样的生活．”法国数学家拉普拉斯(P. Laplace，1749－1827)则大声号召：“读读欧拉吧，他是所有人的老师．”

图1.2-1　邮票上的欧拉像

图1.2-2　印在瑞士10法郎上的欧拉像

1747 年，达朗贝尔(J. d'Alembert，1717－1783)发表了著名论文《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》，严格推导出均匀柔软且有弹性的弦，张紧时作微小横振动，所满足的弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

并给出方程通解的表达式. 这是偏微分方程研究的发端. 达朗贝尔是某贵妇的私生子，出生后被遗弃在巴黎一教堂旁，一对玻璃匠夫妇收养并培养教育了他，经努力成为著名的数学家，并当选为巴黎科学院院士.

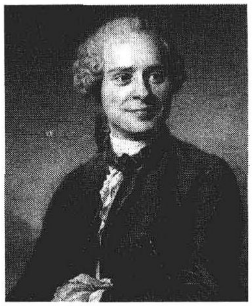


图 1.2-3　达朗贝尔

18 世纪提出的另一类偏微分方程是所谓的位势方程，它与当时的热门力学问题——计算两个物体之间的引力有关. 拉普拉斯 1785 年发表的论文《球状物体的引力理论与行星形状》中引进称为势函数的标量函数 V，推导出 V 满足的方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

这就是所谓的位势方程，也称之为拉普拉斯方程.

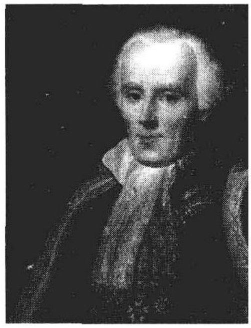


图 1.2-4　拉普拉斯

拉普拉斯是法国的农家子弟，达朗贝尔帮助他当上巴黎军事学校的数学教授，成为著名的数学家、天文学家，并当选为法兰西科学院院士. 他与拉格朗日(J. Lagrange，1736－1813)、勒让德(A. Legendre，1752－1833)并称为“巴黎三 L”.

19 世纪偏微分方程发展的序幕是由法国数学家傅里叶(J. Fourier，1768－1830)拉开的. 他于 1822 年发表的《热的解析理论》是数学史上的经典文献之一，从而成为用数学方法探讨热传导问题的先驱. 傅里叶研究的主要问题是吸热或放热物体内部温度的变化规律，推导出物体内温度分布 $T(x,y,z,t)$ 所满足的三维热传导方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t},$$

由此建立起大家熟知的傅里叶级数与傅里叶积分理论. 虽然，当时数学界还未真正建立分析科学的重要概念，傅里叶的论证也是不严谨的. 但是，由于这一工作在应用上的成功，致使数学家们感到解决有关问题的迫切性. 在随后的几十年间，相继建立起函数的定义(狄利克雷，P. Dirichlet，

图 1.2-5　傅里叶

1805—1866)，级数收敛的定义(哥西，A. Cauchy，1789—1857)，积分的定义(黎曼，G. Riemann，1826—1866)，导出一致连续及一致收敛的概念(维尔斯特拉斯，K. Weierstrass，1815—1897). 为数学分析的内容体系奠定基础，也使傅里叶级数与傅里叶积分理论走上正规的道路. 直至今日傅里叶分析仍是经典分析与现代分析最有生命力的部分，不仅有重要的应用，且给予其他数学分支以深刻的影响. 上述历史事实说明，数学物理及偏微分方程中提出的问题，是数学发展的重要出发点与推动力之一.

弦振动方程，位势方程及热传导方程是基础教程《偏微分方程》要重点介绍的三个方程，我们将在下面几章详细介绍这些方程的导出、解法及解的性质.

19 世纪导出的著名偏微分方程组有描述流体运动的 Navier - Stokes 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot D)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}Dp+\nu\Delta\boldsymbol{u},$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{f}$ 分别表示流团的位移及外力向量，标量 ρ，p 及 ν 分别是流体的密度、压强与粘性系数. 它是由法国力学家数学家纳维(C. Navier，1785—1836)和英国数学家斯托克斯(G. Stokes，1819—1903)分别于 1821 年和 1849 年得到的. 斯托克斯于 1885 年至 1890 年间曾出任英国皇家学会会长.

21 世纪来临之际，美国克雷(K. T. Clay)数学研究所，参照 100 年前德国数学大师希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)的做法，于 2000 年 5 月 24 日在法国召开的千禧年会上，公开征集七个数学问题的答案，并为每个问题的解决提供 100 万美元的奖金. 其中问题之一就是“Navier - Stokes 方程解的存在性与光滑性”.

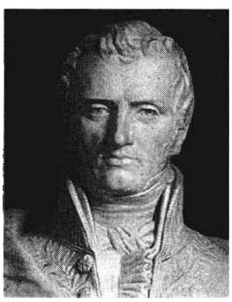


图 1.2-6　纳维

图 1.2-7　斯托克斯

图 1.2-8　克雷数学研究所

1864 年英国皇家学会院士、经典电动力学的创始人马克斯韦尔(J. Maxwell，1831—1879)导出电磁场方程组