北方阳光系列丛书

# 高等数学全程导学及练习

## （理工类）


主　编◎陈凡红

副主编◎邵泽军　聂廷芳　王　云



中国财富出版社

CHINA FORTUNE PRESS

北方阳光系列丛书

# 高等数学全程导学及练习

## （理工类）

主　编　陈凡红

副主编　邵泽军　聂廷芳　王　云

中国财富出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学全程导学及练习：理工类／陈凡红主编．—北京：中国财富出版社，2016.3

（北方阳光系列丛书）

ISBN 978－7－5047－6057－9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 036021 号

**策划编辑**　李彩琴　　**责任编辑**　于　淼　李彩琴

**责任印制**　方朋远　　**责任校对**　杨小静　　**责任发行**　敬　东

---

**出版发行**　中国财富出版社

**社　　址**　北京市丰台区南四环西路 188 号 5 区 20 楼　　**邮政编码**　100070

**电　　话**　010－52227568（发行部）　　010－52227588 转 307（总编室）

010－68589540（读者服务部）　　010－52227588 转 305（质检部）

**网　　址**　http：//www.cfpress.com.cn

**经　　销**　新华书店

**印　　刷**　北京京都六环印刷厂

**书　　号**　ISBN 978－7－5047－6057－9/O·0050

**开　　本**　787mm×1092mm　1/16　　**版　　次**　2016 年 3 月第 1 版

**印　　张**　10.75　　**印　　次**　2016 年 3 月第 1 次印刷

**字　　数**　181 千字　　**定　　价**　26.00 元

---

# 前 言

本书是理工科高等数学的学习指导书。编写本书的目的是帮助学生正确理解和掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本运算，学会对所学知识进行概括和总结，提高学生综合运用能力以及一定的抽象概括和逻辑思维能力.

本书共分五章，每章大体有六部分内容，包括基本内容、重点难点、基本要求、基本概念与性质、典型例题、自测题及其解答. 我们在编写时力求内容完整，深入浅出，重点突出. 基本概念与性质部分不是教材的简单重复，而是对有关理论及运算进行了系统的归纳与总结，典型例题部分侧重于启发学生的解题思路，总结解题规律，提高综合运用所学知识的能力.

建议读者在使用本书时，先看每一章的基本概念与性质及典型例题，面对例题或习题，首先应尽可能独自分析思考，然后与解答核对运算结果正确与否. 只有在找不到思路无法入手的情况下，才可以借助解答. 看完解答后不防将解答合上，自己再独立解答一遍，并考虑是否还有其他解法. 这样，解题能力会提高得很快.

参加本书编写人员均为燕京理工学院数学教研室教师，邵泽军（第一章）、王云（第二章）、陈凡红（第三章）、张亚民（第四章）、聂廷芳（第五章）. 全书由陈凡红统稿并主审.

编写解答过程中，我们参考借鉴了国内部分优秀的传统教材，如同济大学数学系主编的《高等数学》，高等数学编写组编写的《高等数学下册习题解答》及毛京中主编的《高等数学学习指导》，在此谨致谢忱.

本书在编写之初及整个编写过程中得到了徐胜云处长的鼎力支持，在此一并表示感谢.

限于编者的学识水平和经验，书中难免有欠妥之处，恳请读者批评指正.

编 者

2015 年 11 月

# 目　录

# 第一章　微分方程

## 一、基本内容

1. 微分方程、阶、解、通解、特解以及初始条件.

2. 变量可分离的方程.

3. 齐次方程、一阶线性方程和伯努利（Bernoulli）方程.

4. 降阶法；二阶线性微分方程解的结构.

5. 二阶常系数齐次线性微分方程的解法；自由项形如 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 的二阶常系数非齐次线性微分方程的解.

## 二、重点难点

重点：微分方程的基本概念，可分离变量的微分方程，一阶线性微分方程，可降阶的高阶微分方程，二阶常系数齐次线性微分方程，二阶常系数非齐次线性微分方程.

难点：可分离变量的微分方程，一阶线性微分方程，可降阶的高阶微分方程，二阶常系数非齐次线性微分方程.

## 三、基本要求

1. 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理，理解微分方程、阶、解、通解、特解以及初始条件等概念.

2. 熟练掌握变量可分离的方程及一阶线性方程的解法.

3. 会解齐次方程和伯努利（Bernoulli）方程，并从中领会用变量代换求解方程的思想，知道全微分方程.

4. 会用降价法解下列方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x, y')$，$y''=f(y, y')$.

5. 理解二阶线性微分方程解的结构，掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并了解高阶常系数齐次线性微分方程的解.

6. 熟练掌握求自由项形如$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$的二阶常系数非齐次线性微分方程的解，会用微分方程解一些简单的几何和物理问题.

## 四、基本概念与性质

### （一）微分方程的基本概念

1. 微分方程

表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫作微分方程.

2. 常微分方程

未知函数是一元函数的微分方程，叫作常微分方程.

3. 偏微分方程

未知函数是多元函数的微分方程，叫作偏微分方程.

4. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫作微分方程的阶.

5. 微分方程的解

满足微分方程的函数（把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式）叫作该微分方程的解. 确切地说，设函数$y=\varphi(x)$在区间$I$上有$n$阶连续导数，如果在

区间 $I$ 上，

$$F[x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x)]=0,$$

那么函数 $y=\varphi(x)$ 就叫作微分方程 $F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0$ 在区间 $I$ 上的解.

6. 通解

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫作微分方程的通解.

7. 初始条件

用于确定通解中任意常数的条件，称为初始条件，如

$$x=x_0\text{时，}y=y_0,\ y'=y_0',$$

一般写成

$$y|_{x=x_0}=y_0,\ y'|_{x=x_0}=y_0'.$$

8. 特解

确定了通解中的任意常数以后，就得到微分方程的特解，即不含任意常数的解.

9. 初值问题

求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题.

如求微分方程 $y'=f(x,\ y)$ 满足初始条件 $y=|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题，记为

$$\begin{cases}y'=f(x,\ y),\\ y=|_{x=x_0}=y_0.\end{cases}$$

10. 积分曲线

微分方程的解的图形是一条曲线，叫作微分方程的积分曲线.

## （二）可分离变量方程及其解法

### 1. 可分离变量方程概念

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\,\mathrm{d}y=f(x)\,\mathrm{d}x\ (\text{或写成 } y'=\varphi(x)\psi(y))$$

就是说，能把微分方程写成一端只含 $y$ 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含 $x$ 的函数和 $\mathrm{d}x$，那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

### 2. 可分离变量的微分方程的解法

第一步，分离变量，将方程写成 $g(y)\,\mathrm{d}y=f(x)\,\mathrm{d}x$ 的形式;

第二步，两端积分，$\int g(y)\,\mathrm{d}y=\int f(x)\,\mathrm{d}x$，设积分后得 $G(y)=F(x)+C$；

第三步，求出由 $G(y)=F(x)+C$ 所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$.

$G(y)=F(x)+C$，$y=\varphi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 都是方程的通解，其中 $G(y)=F(x)+C$ 称为隐式（通）解.

## （三）齐次方程

### 1. 齐次方程的定义

如果一阶微分方程

$$y'=f(x,y)$$

中的函数 $f(x,y)$ 可写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，即 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，则称该方程为齐次方程.

### 2. 齐次方程 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的解法

作代换 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，于是

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

从而
$$x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u),$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\varphi(u)-u}{x},$$

分离变量得
$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

两端积分得
$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

求出积分后，再用 $\frac{y}{x}$ 代替 $u$，便得所给齐次方程的通解．

## （四）一阶线性微分方程及伯努利方程

### 1．定义

方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

称为一阶线性微分方程．

其特点，关于未知函数 $y$ 及其导数 $y'$ 是一次的．

若 $Q(x)\equiv0$，称（1）为齐次的；

若 $Q(x)\neq0$，称（1）为非齐次的．

### 2．一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解法

当 $Q(x)\equiv0$ 时，方程（1）为可分离变量的微分方程．

当 $Q(x)\neq0$ 时，为求其解首先把 $Q(x)$ 换为0，即

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{2}$$

称为对应于（1）的齐次微分方程，求得其解

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

为求（1）的解，利用常数变易法，用 $u(x)$ 代替 $C$，即 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$.
于是，

$$\frac{dy}{dx} = u'e^{-\int P(x)dx} + ue^{-\int P(x)dx}[-P(x)].$$

代入（1），得

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$$

故

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{3}$$

3. 定义

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$（$n\neq0$，1）称为伯努利方程.

当 $n=0$，1 时，为一阶线性微分方程.

4. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ 的解法

（1）两边同除 $y^n$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

（2）令 $z = y^{1-n}$，则有

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x),$$

而

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x),$$

为一阶线性微分方程，故

$$z = e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx + C\right].$$

## （五）可降阶的高阶微分方程

### 1. $y^{(n)}=f(x)$ 型方程

形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程，其特点是方程中除 $y^{(n)}$ 外，不显含未知函数的其他更低阶的导数.

对于 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程，其解法为令变量代换 $p=y^{(n-1)}$，化为一阶微分方程 $p'=f(x)$，采用逐次积分的方法加以解决.

### 2. $y''=f(x,y')$ 型方程

形如 $y''=f(x,y')$ 的方程称为不显含未知函数的二阶微分方程. 其特点是：方程右端不显含未知函数 $y$.

对于不显含未知函数的二阶微分方程，其解法为令变量代换 $y'=p(x)$，注意 $y''=p'$，化为一阶微分方程 $p'=f(x,p)$ 加以解决.

### 3. $y''=f(y,y')$ 型方程

形如 $y''=f(y,y')$ 的方程称为不显含自变量的二阶微分方程. 其特点是方程右端不显含自变量 $x$.

对于不显含自变量的二阶微分方程，其解法为令变量代换 $y'=p(y)$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，化为一阶微分方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$ 加以解决.

## （六）线性微分方程解的结构

### 1. 定义

方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=f(x) \tag{1}$$

称为二阶线性微分方程.

当$f(x)\equiv 0$时称为齐次的，当$f(x)\neq 0$时称为非齐次的.

为求解方程（1）需讨论其解的性质.

2. 解的性质

二阶线性齐次微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{2}$$

**性质1** 若$y_1(x)$，$y_2(x)$是（2）的解，则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是（2）的解，其中$C_1$，$C_2$为任意常数.

称性质1为解的叠加原理.

**性质2** 若$y_1(x)$，$y_2(x)$是（2）的两个线性无关的特解，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$（$C_1$，$C_2$为任意常数）是方程（2）的通解.

此性质称为二阶齐次线性微分方程（2）的通解结构.

**推论** 若$y_1$，$y_2$，…，$y_n$是$n$阶齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的$n$个线性无关解，则方程的通解为

$$y=C_1y_1+\cdots+C_ny_n(C_1,\cdots,C_n\text{ 为任意常数}).$$

**性质3** 设$y^*$是（1）的特解，$Y$是（2）的通解，则$y=Y+y^*$是（1）的通解.

**性质4** 设（1）式中$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，若$y_1^*$，$y_2^*$分别是

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(y)y=f_1(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(y)y=f_2(x),$$

的特解，则$y_1^*+y_2^*$为原方程的特解.

## （七）二阶常系数齐次线性微分方程

若

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{1}$$

式中 $P(x)$，$Q(x)$ 为常数，称之为二阶常系数齐次微分方程，而（1）称之为二阶变系数齐次微分方程.

记

$$y''+py'+qy=0. \tag{2}$$

将 $y=e^{rx}$ 代入（2）中有（$r^2+pr+q$）$e^{rx}=0$，称 $r^2+pr+q=0$ 为（2）的特征方程.

$$r^2+pr+q=0. \tag{3}$$

设 $r_1$，$r_2$ 为（3）的解，则

（1）当 $r_1\neq r_2$ 即 $p^2-4q>0$ 时，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ 为其通解；

（2）当 $r_1=r_2=r$ 即 $p^2-4q=0$ 时，只有一个线性无关解 $y=Ce^{rx}$；

（3）当 $r=\alpha\pm i\beta$ 即 $p^2-4q<0$ 时，有 $y=e^{(\alpha\pm i\beta)x}$.

利用欧拉公式可得实解，故通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{4}$$

的通解的步骤如下

①写出微分方程（4）的特征方程

$$r^2+pr+q=0; \tag{5}$$

②求出特征方程（5）的两个根 $r_1$、$r_2$；

③根据特征方程（5）的两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程（2）的通解.

| 特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 $r_1,r_2$ | 微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 |
|---|---|
| 两个不相等的实根 $r_1,r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 两个相等的实根 $r_1=r_2$ | $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$ |
| 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

（八）二阶常系数非齐次线性微分方程

$f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$ 型方程

如果 $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$，则方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 具有形如 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的特定多项式，而 $k$ 按 $\lambda$ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或者是特征方程的重根依次取 0，1 或 2.

## 五、典型例题

**例 1.1** $xy' - y\ln y = 0$.

**解** 分离变量得 $\frac{1}{y\ln y}dy = \frac{1}{x}dx$，两边积分得 $\int \frac{1}{y\ln y}dy = \int \frac{1}{x}dx$，求解得 $\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln|C|$，从而 $\ln|\ln y| = \ln|Cx|$，即 $\ln y = Cx$，故通解为 $y = e^{Cx}$.

**例 1.2** $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

**解** 分离变量得 $\frac{y}{y^2-1}dy = -\frac{x}{x^2-1}dx$，两边积分 $\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{x}{x^2-1}dx$，即 $\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C_1$，化简得 $(y^2-1)(x^2-1) = \pm e^{2C_1}$，故通解为 $(y^2-1)(x^2-1) = C$，其中 $C$ 为任意常数.

**例 1.3** $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$.

**解** 方程可化为 $\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$，分离变量得 $\frac{1}{1+y^2}dy = (1+x)dx$，两边积分得 $\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int(1+x)dx$，即 $\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$，于是原方程的通解为 $y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)$.

**例 1.4** $xy' - y - \sqrt{x^2 - y^2} = 0 (x > 0)$.

**解** 原方程变为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，则原方程化为$u+x\dfrac{du}{dx}=u+\sqrt{1-u^2}$，即$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\dfrac{1}{x}dx$，两边积分得$\arcsin u=\ln|x|+C$，将$u=\dfrac{y}{x}$代入上式得原方程的通解为$\arcsin\dfrac{y}{x}=\ln|x|+C$.

**例 1.5** $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$.

**解** 原方程变为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，则原方程化为$u+x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$，即$\dfrac{1}{u(\ln u-1)}du=\dfrac{1}{x}dx$，两边积分得$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|$，即$u=e^{Cx+1}$，将$u=\dfrac{y}{x}$代入上式得原方程的通解为$y=xe^{Cx+1}$.

**例 1.6** $\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx-x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$.

**解** 原方程变为$\dfrac{dy}{dx}=\sec\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，则原方程化为$u+x\dfrac{du}{dx}=\sec u+u$，即$\cos u du=\dfrac{1}{x}dx$，两边积分得$\sin u=\ln|x|+C$，将$u=\dfrac{y}{x}$代入上式得原方程的通解$\sin\dfrac{y}{x}=\ln|x|+C$.

**例 1.7** $\dfrac{x}{1+y}dx-\dfrac{y}{1+x}dy=0, y|_{x=0}=0$.

**解** 分离变量得$y(1+y)dy=x(1+x)dx$，两边积分得$\int(y+y^2)dy=\int(x+x^2)dx$，即$\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+C$，由$y|_{x=0}=0$得$C=0$，所以所求特解为$\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

**例 1.8** 求一曲线的方程，该曲线通过点$(0,1)$且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线.

**解** 设曲线方程为$y=f(x)$，切点为$P(x,y)$，则与原点连线斜率为$\dfrac{y}{x}$，由题意