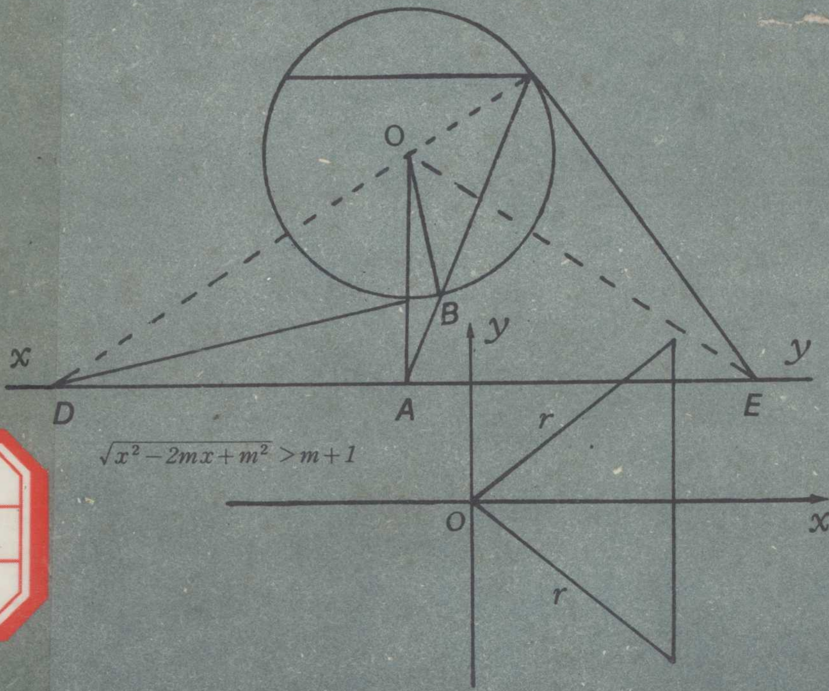
高中

数学精编

代　数

第二册



浙江教育出版社

高中数学精编

代　　数

第二册

江焕棣　谢玉兰　丁宗武
许纪传　钱孝华　陶敏之

浙江教育出版社

高中数学精编
代　　数
第二册
江焕棣　谢玉兰　丁宗武
许纪传　钱孝华　陶敏之
*
浙江教育出版社出版
上虞汤浦印刷厂排版
浙江萧山印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
*
开本 787×1092　1/32　印张 7　字数 160000
1989 年 9 月第 1 版　　1989 年 9 月第 1 次印刷
印数 00001-107650
*
ISBN 7-5338-0554-2/G·555

定　价：1.45 元

说　明

《高中数学精编》（它的前身是《高中数学教材补充题》）自1981年出版以来，先后重版七次，深受读者欢迎。此次修订，我们依据“全日制中学数学教学大纲”的要求，并吸取了广大读者的意见，对原书的体例进行了适当的调整，对其中的题目作了大量的更新，“保持特色，开拓创新”是我们修订的宗旨。

本书强调基础知识和基本技能，重视数学各分科之间的横向联系和综合运用，选题典型、新颖、灵活，知识覆盖面广。为帮助学生自学和教师备课，增加了“典型题型与解题技巧”、“单元测试题”两个栏目。

全书按教材内容的顺序分册编写，教师和学生可配合教学进度与课本同步使用。选题以A组、B组题为主，其中A组题属基本要求，B组题略有提高或带有一定的综合，C组题数量甚少，难度较大，可供学有余力的学生练习。

编　者

1989年1月

目 录

第一章　反三角函数和简单三角方程……………………………… 1

　一、反三角函数 ……………………………………………………… 1

　二、简单三角方程 …………………………………………………26

第二章　数列与数学归纳法……………………………………………42

　一、数列 ……………………………………………………………………42

　二、数学归纳法 ……………………………………………………………71

第三章　不等式……………………………………………………………84

第四章　复数………………………………………………………………121

　一、复数的概念与运算 ………………………………………………126

　二、复数的三角形式 ……………………………………………………141

答案与提示………………………………………………………………150

第一章　反三角函数和简单三角方程

一、反三角函数

【分析与要点】

1. 反三角函数是中学阶段学习初等函数类最后的一个，难度较高.基本初等函数类引进的模式总是正反两个方面.在幂函数的情况下，正、反函数皆是幂函数，如 $y=x^n$ 与 $y=x^{\frac{1}{n}}$；指数函数与对数函数互反；三角函数与反三角函数互反.

2. 三角函数不能不加限制就得到它的反函数.因为周期函数反过来总是多值的(同一三角函数值对应许多自变量).因此，要选择三角函数的某个单调段，在此单调段上获得反函数(在单调段上函数是一一映射的).

$y=\sin x$，选择单调段为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$；$y=\cos x$，选择单调段为 $[0,\pi]$；$y=\operatorname{tg} x$，选择单调段为 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$；$y=\operatorname{ctg} x$ 选择单调段为 $(0,\pi)$.

$$\begin{cases} y=\sin x:\ \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[-1,1] \\ y=\arcsin x:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\cos x:[0,\pi]\longrightarrow[-1,1], \\ y=\arccos x:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\operatorname{tg} x:\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\longrightarrow(-\infty,+\infty), \\ y=\operatorname{arc\,tg} x:\ (-\infty,\ +\infty)\longrightarrow\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\operatorname{ctg} x:(0,\pi)\longrightarrow(-\infty,+\infty), \\ y=\operatorname{arc\,ctg} x:(-\infty,+\infty)\longrightarrow(0,\ \pi)。 \end{cases}$$

3. 设函数 $f(x)$有反函数,记作 $f^{-1}(x)$, 那么一般地总有

$$f[f^{-1}(x)]=x \qquad (x\in f^{-1}\text{ 的定义域});$$

$$f^{-1}[f(x)]\supset\{x\} \quad (x\in f\text{ 的定义域})。$$

要注意,上面后一式的 $f^{-1}[f(x)]$理解为 $f(x)$的原象全体,一般来说它是一个集合,包含着x。根据上述一般理论,运用到三角函数和反三角函数中,我们提出以下几点注意:

(1) $\sin(\arcsin x)=x$ 总是对的,但是其前提是 $x\in[-1,1]$ ($\arcsin x$ 的定义域).式子 $\sin(\arcsin 2)=2$ 不仅错,且左端 $\arcsin 2$ 是无意义的。

(2) 式子 $\arcsin(\sin x)$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$总是有意义的,因为 $\sin x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$。但是 $\arcsin(\sin x)$ 不一定等于 x。

$$\arcsin(\sin x)\begin{cases} =x, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \neq x, & x\notin\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

一般来说,$\arcsin(\sin x)=x_0$ 而 x_0 满足两个条件:① $x_0\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; ② $\sin x_0=\sin x$。

其它反三角函数类似讨论。

4。人们对于逆过程的认识，常常是不适应的。这是由于原过程印象太深，起了负迁移作用，阻碍人们去认识与其相反的东西。因此加强适应性的大活动量训练（指基本概念）是十分有益的。

基本训练的方式，一种是归结为对原来的三角函数的理解；一种是直接从反三角函数的图象上理解。哪一种方式好？与施教者有关。但是应该尽快地过渡到从反三角函数自身图象上来认识反三角函数这样一个要求上来。比如从反三角函数图象上很快能理解 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$（奇函数），$\arccos(-x)+$

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

$\arccos x=\pi$（平行于 y 轴的介于直线 $y=0$ 和 $y=\pi$ 之间的线段，恰好被曲线 $y=\arccos x$ 分成两段，一段长为 $\arccos x$，另一段长为 $\arccos(-x)$）。

$y=\arcsin x$：定义域 $[-1, 1]$，值域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，增函数，奇函数；

$y=\arccos x$：定义域 $[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$，减函数，$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$；

$y=\mathrm{arc\,tg}\, x$：定义域 $(-\infty, +\infty)$，值域 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，增函数，奇函数；

$y=\mathrm{arc\,ctg}\, x$：定义域 $(-\infty, +\infty)$，值域 $(0,\pi)$，减函数，$\mathrm{arc\,ctg}(-x)=\pi-\mathrm{arc\,ctg}\, x$。

【典型题型与解题技巧】

1. 求定义域

例 求函数 $y=\arcsin(x^2-2x-2)$ 的定义域。

解：由反正弦函数定义域要求，需

$$|x^2-2x-2|\leqslant 1.$$

即有 $$-1\leqslant x^2-2x-2\leqslant 1,$$

或 $$\begin{cases}x^2-2x-3\leqslant 0,\\ x^2-2x-1\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)(x-3)\leqslant 0,\\ [x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ -\infty< x\leqslant 1-\sqrt{2} \text{ 或 } 1+\sqrt{2}\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

因此求得定义域是 $[-1,\ 1-\sqrt{2}\ ]\cup[1+\sqrt{2}\ ,3]$。

2. 求三角函数的值

例 1 求 $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right]$。

解：设 $\alpha=\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$，

则 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\right)$。

于是问题变为：已知 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\right)$，求

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$的值的问题。先求 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$（注意取＋根号）

再求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$。

例 2 求 $\cos\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$。

解：在实际应用中（如求积分的理论中），常采用图解法。画一

直角三角形，斜边长总是正的，两直角边可以看作负值，相应地写

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{3}{4}\right)=\operatorname{arc\,tg}\frac{-3}{4},$$

$$\beta=\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{2}{3}\right)=\operatorname{arc\,cos}\frac{-2}{3}.$$

图解法避免诸多繁难，直接求解。

图1

于是，原式 $=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{-2}{3}-\frac{-3}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{8}{15}.$$

3．函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图象

这是一个由正弦函数和反正弦函数复合起来的函数．定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

容易验证，它是奇函数，以 2π 为周期的周期函数．故只需讨论一个周期内的情况．

在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 段上，$\arcsin(\sin x)=x$.

在 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 段上，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 时，则 $x-\pi=x_1\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，于是有 $\arcsin(\sin x_1)=x_1$.

这样 $y=\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(x_1+\pi)]$

$=\arcsin(-\sin x_1)=-\arcsin(\sin x_1)$

$=-x_1=\pi-x,$

即 $y=\pi-x \quad \left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}\right)$。

最后得到

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases}x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}。\end{cases}$$

$\arcsin(\sin x)$ 在整个数轴上的情形，可以将一个周期上的函数变化规律按 2π 周期延拓出去。其表达式和它的锯齿形图象如下：

$y=\arcsin(\sin x)$

$$=\begin{cases}x-2k\pi, x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right];\\ -x+(2k+1)\pi, x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]。\end{cases}$$

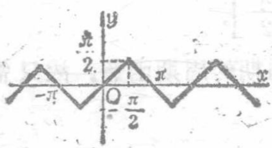


图2

函数 $y=\arccos(\cos x)$， $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$，$y=\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x)$ 及其图象也可类似讨论，不再叙述了。

4。等式证明

例1 若 $|x|\leqslant 1$，证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$。

证明：设 $\alpha=\arcsin x$， $\beta=\arccos x$，则 $\sin\alpha=x$，$\cos\beta=x$。但 $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，

所以 $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta.$$

由反三角正弦、反三角余弦的值域，知道

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\beta\leqslant\pi$$

或 $$0\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi$$

$$\therefore\quad \arcsin x+\arccos x=\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

例 2 证明 $\cos \operatorname{arc\,tg}\sin \operatorname{arc\,ctg} x=\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$.

证明：设 $\alpha=\operatorname{arc\,ctg} x$，则 $\operatorname{ctg}\alpha=x$. 因为 $0<\alpha<\pi$，所以

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

分步求解

利用三角函数基本关系式

$\csc^2\alpha$

再设 $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

于是，因 $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$，故

$$左端=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}=\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$$

例 3 证明 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$

$+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$ 均小于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

略证：设 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$, $\gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$, $\delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$. 求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 与 $\operatorname{tg}(\gamma+\delta)$，再求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1$，又 $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<\frac{2}{3}\pi$ 故得证。

【训练题】

(A)

1．等式 $\arcsin(\sin x)=x$ 成立的条件是（　）D

(A) $(-\infty,+\infty)$。　　(B) $[-1,1]$。

(C) $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$。

(D) $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$(k\in Z)$。

2．等式 $\sin(\arcsin x)=x$ 成立的条件是 $x\in$（ D ）

(A) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。　　(B) $\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$。

(C) $(-\infty,+\infty)$。　　(D) $[-1,1]$。

3．$\arccos(-x)$ 等于（ D ）

(A) $\arccos x$。　　(B) $\pi+\arccos x$。

(C) $-\arccos x$。　　(D) $\pi-\arccos x$。

4．设 e 为自然对数的底，则 $\arcsin(\sin e)$ 的值是（　　）

(A) e。(B) $e-\frac{\pi}{2}$。(C) $\pi-e$。(D) 以上都不是。

5．$\arccos(\cos\pi^2)$ 等于（ D ）

(A) π^2。(B) $\pi^2-4\pi$。(C) $3\pi-\pi^2$。(D) $4\pi-\pi^2$。

6. $\arcsin\left(\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$等于(C)

(A) $\dfrac{2}{3}\pi$. (B) $\dfrac{\pi}{6}$. (C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) $-\dfrac{\pi}{3}$.

7. 下列各式中正确的是(C)

(A) $\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\cos\left(\arccos\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

(C) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{3}{4}\pi$.

(D) $\arcsin\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi\right)=\dfrac{5}{6}\pi$.

形如arcsin(cosx)求值范围以arcsin为准。

8. 当$\dfrac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}\pi$时，$\arcsin(\sin x)$等于(B)

(A) $-x+2\pi$. (B) $x-2\pi$.

(C) x. (D) 以上都不是.

9. 函数 $y=\sin(\arcsin x)$, $x\in[-1,1]$的图象是(C).

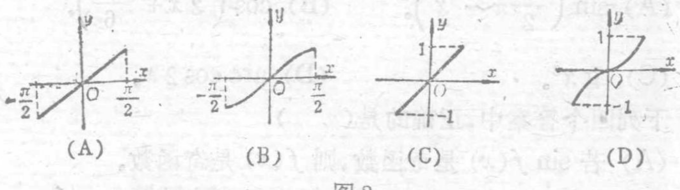


图3

10. 函数 $y=\cos(\arccos x)$, $x\in[-1,1]$的图象是(D)

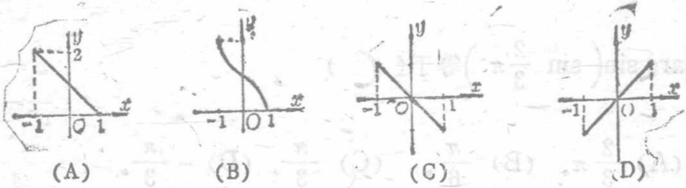


图 4

11. 把图象(A)、(B)、(C)、(D)正确地填在下面括号内

(1) $y=\text{arc}\sin|x|$的图象是(B)。图象皆是偶函数，故负值以正值为准。

(2) $y=\text{arc}\cos|x|$的图象是(C)。

(3) $y=\text{arc}\,\text{tg}\,|x|$的图象是(A)。|x|并不意味图象在零之上即行。

(4) $y=\text{arc}\,\text{ctg}\,|x|$的图象是(D)。

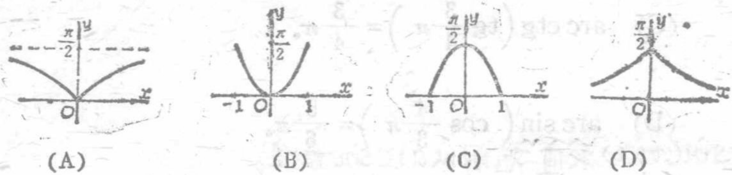


图 5

12. 函数 $y=\cos(\text{arc}\sin x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$的图象是(D)

(A) 圆。(B) 直线。(C) 余弦曲线。(D) 半圆。

13. 在下列函数中，为偶函数的是(A)

(A) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)$。 (B) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$。

(C) $\text{tg}\,x^3$。 (D) $\text{arc}\cos 2x$。

14. 下列四个答案中，正确的是(C)

(A) 若 $\sin f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 是奇函数。

(B) 若 $\cos f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 是奇函数。

(C) 若 $\text{arc}\sin f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 是奇函数。

∴ sin y 不是奇函数，因 f(-x) ≠ -f(x)
只有 (A)(B)(C)(D) 四项中，只有 arc sin x 是奇函数

(D) 若 $\arccos f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 是奇函数。

15. 下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sin x=-\frac{1}{3}$，则 $x=-\arcsin\frac{1}{3}$。

(B) 若 $\arccos(\cos x)=\frac{\pi}{3}$，则 $x=\frac{\pi}{3}$。 ×

(C) 若 $\cos(\arccos x)=1$，则 $x=0$。 ×

(D) 若 $\arcsin x=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

?16. $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ 的值是(B)

(A) $\frac{\pi}{2}$。 (B) $\pm\frac{\pi}{2}$。 (C) $-\pi$。 (D) 2π。

17. 函数 $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{2}\right)$ 的定义域是(　　)

(A) $\left[\frac{1}{2},\ 20\right]$。 (B) $\left[\frac{1}{5},\ 20\right]$。

(C) $[1,\ 20]$。 (D) $\left[-\frac{1}{5},\ 20\right]$。

18. 函数 $y=\arcsin(2\cos x)$ 的定义域是(　　)

(A) $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$。 (B) $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{5}{6}\pi\right]$。

(C) $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{2}{3}\pi\right]$。

(D) $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$(k\in Z)$。

19. 函数 $y=2^{\arcsin x}$ 的定义域和值域是(　　)

(A) $x \in R, y > 0$。　　(B) $|x| \leqslant 1, y > 0$。

(C) $|x| \leqslant 1, |y| \leqslant \frac{\pi}{2}$。　　(D) $|x| \leqslant 1,\ 2^{-\pi} \leqslant y \leqslant 2^{\pi}$。

20．函数 $y = \frac{1}{3} \arcsin 3x + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}\, x$ 的值域是（ C ）

(A) $\left(-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)$。　(B) $\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$。

(C) $\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right]$。　(D) $\left(-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi\right)$。

21．$\arcsin \frac{1}{2}, \sin \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 的大小关系是（　　）

(A) $\arcsin \frac{1}{2} > \sin \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$。

(B) $\sin \frac{1}{2} > \arcsin \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$。

(C) $\arcsin \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > \sin \frac{1}{2}$。

(D) $\frac{1}{2} > \arcsin \frac{1}{2} > \sin \frac{1}{2}$。

α　　β　　γ

22．$\arcsin \frac{1}{4}$，$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{5}$，$\arccos \frac{4}{5}$ 的大小关系是（ D

(A) $\arcsin \frac{1}{4} < \operatorname{arc\,tg} \sqrt{5} < \arccos \frac{4}{5}$。

(B) $\arccos \frac{4}{5} < \operatorname{arc\,tg} \sqrt{5} < \arcsin \frac{1}{4}$。

(C) $\arccos \frac{4}{5} < \arcsin \frac{1}{4} < \operatorname{arc\,tg} \sqrt{5}$。