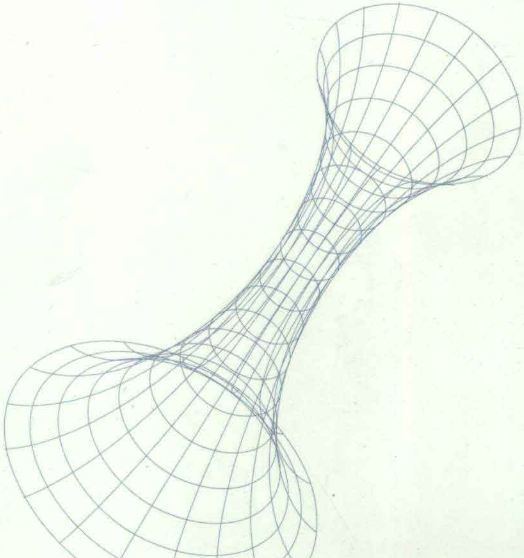
高等学校教材

高等数学

（上册）

主　编　方明亮　郭正光
副主编　刘国栋　赵立新　周裕中



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（上册）

主　编　方明亮　郭正光
副主编　刘国栋　赵立新　周裕中
编　委　(以姓氏笔画排名)
王雪琴　陈　羽　罗　辉
徐小红

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是由华南农业大学等多所高等学校长期从事高等数学教学的老师，根据近几年来中学数学教学内容的改革，并结合高等数学课程教学基本要求的精神编写而成的。

本书分上、下两册，上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等五章，书末附有积分表、几种常用的曲线、MATLAB 软件简介、习题答案与提示。

本书注重概念与定理的直观描述与背景介绍，强调理论联系实际。为了便于读者阶段性复习，每章末给出了 A,B 两类复习题，其中 A 类题目适宜初次接触微积分知识的学生，B 类题目则适宜那些学有余力和准备考研的学生。

本书既可以作为高等学校理工科专业的高等数学教材，也可以作为各类成人教育相应课程的教材，还可以作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/方明亮，郭正光主编. —北京：高等教育出版社，2011.8

ISBN 978-7-04-032519-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①方… ②郭… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 128925 号

策划编辑	李 蕊	责任编辑	贾翠萍	封面设计	于 涛	版式设计	马敬茹
插图绘制	尹文军	责任校对	胡美萍	责任印制	尤 静		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京宏信印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	20.25	版　　次	2011 年 8 月第 1 版
字　　数	370 千字	印　　次	2011 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	27.70 元

物 料 号 32519-00

前　言

高等数学的主要内容是微积分。从17世纪中叶牛顿、莱布尼茨的奠基性工作迄今，微积分学已经逐步发展成为一门逻辑严密、系统完整的学科。它不仅是诸多数学分支的重要基础，而且在自然科学、社会科学的众多领域获得了十分广泛的应用，成为处理有关连续变量问题最有力的数学工具。

本教材由华南农业大学、惠州学院、嘉应学院等高校中多年从事高等数学教学的老师编写而成。我们的编写原则是：保持微积分学系统的完整性，满足后续课程对高等数学的需求性，关注近年来考研试题的导向性。在编写过程中，我们充分注意到近几年来中学数学教学内容的改革，力争在初等数学与高等数学教学内容的衔接部分做到拾遗补漏，以期大一的学生得以顺利进入高等数学的学习状态。在内容的取舍上，我们坚持以面向高等学校理工科专业和科技发展的需要，舍弃了部分应用很少的传统微积分内容，增加了数学模型及数学实验等内容。在体系的编排上，既注意体现数学课程循序渐进、由浅入深的特点，又尽可能对体系合理优化安排，避免烦琐复杂的推理证明。为了方便对教材中内容的选学和分层次教学，书中标有*号的内容可以选学，即便不选这部分内容也不会影响教材的系统性和对后续内容的学习。在习题的选配方面，各节精选了一些概念性强、方法有代表性、难度适中的练习题。每章末配有A，B两类复习题，其中A类题目适宜初次接触微积分学知识的学生，B类题目则适宜那些学有余力和准备考研的学生。

本教材分上、下两册。上册包含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用；下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程。

本教材既可以作为高等院校理工科专业本、专科（高职）的高等数学课程的教材，也可以作为各类成人教育相应课程的教材，还可以作为相关科技人员的参考书。

由于编者水平有限，书中错漏之处在所难免，恳请读者特别是使用本教材的教师批评指正，以使本教材在今后教学实践的基础上更加完善。

编者
2011年2月

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

目　录

第一章

函数与极限

高等数学的主要研究对象是函数，所谓函数就是变量之间的依赖关系. 极限方法是研究函数的基本方法，极限理论则是微积分学的基础. 本章将介绍集合、函数、极限和函数的连续性等基本概念及其性质.

第一节 函 数

一、集合

集合是数学中的一个基本概念. 例如，一个班的全体学生构成一个集合，全体整数构成一个集合等. 一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为一个**集合**（简称集），组成这个集合的事物称为这个集合的**元素**（简称元）.

集合通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，其元素则用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，否则，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 含有有限个元素的集合称为**有限集**，不是有限集的集合称为**无限集**.

对于数集，习惯上把全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，把全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，把全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，把全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 我们有时在表示数集的字母的右上角标上“$*$”来表示该数集内排除 0 的集，标上“$+$”来表示该数集内排除 0 与负数的集. 例如，全体正整数的集合记作 $\mathbf{Z}^+$，即 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$，即 $A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$. 如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\underset{\neq}{\subset}B$. 不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$，规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

集合的基本运算有交、并、差等. 设 A,B 为两个集合，由所有既属于 A 又属

于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(简称交)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(简称并)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**(简称差)，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

有时我们所研究的集合 A,B 都是集合 I 的子集，此时，称集合 I 为**全集**或**基本集**，称 $I\setminus A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^C.

设 A,B,C 为任意三个集合，则集合的交、并、余运算满足下列运算规律：

交换律　$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$；

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

分配律　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C), (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

对偶律　$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C, (A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

二、区间与邻域

所谓**区间**是指介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数，在数轴上就是从 a 到 b 的线段. a 与 b 称为区间的端点，当 $a<b$ 时，a 称为左端点，b 称为右端点. 数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)；数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$. 类似地，数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

除了上述这些有限区间以外，还有各种无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间. 例如，集合 $\{x\mid x\geqslant a\}$ 可记为 $[a,+\infty)$，集合 $\{x\mid x<b\}$ 可记为 $(-\infty,b)$，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记为 $(-\infty,+\infty)$.

闭区间 $[a,b]$，开区间 (a,b) 及无限区间 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 在数轴上的表示分别如图 1-1(a)，(b)，(c)和(d)所示.

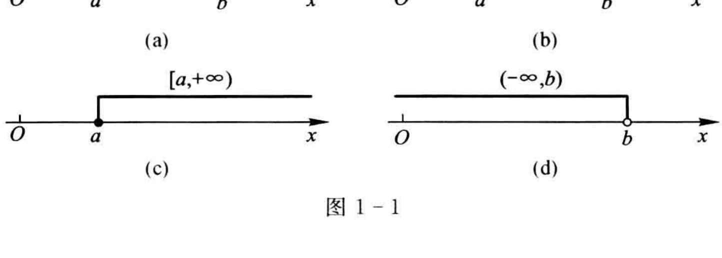


图 1-1

以后我们会看到，有些定理的成立与变量的区间的开闭有很大关系，但有些情形不需要考虑区间的开闭以及是有限区间还是无限区间，此时，我们统称为区间，并记作 I.

有一类特殊的区间，我们称为**邻域**，即以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$. 设 δ 是任一正数，以点 a 为中心、以 δ 为半径的开区间，即开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$（图 1-2）. 依定义有

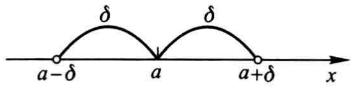


图 1-2

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\} \quad 或 \quad U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，所以点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

如果把点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 的中心点 a 去掉后，称此邻域为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$.

有时把半开半闭区间 $(a-\delta,a]$ 称为 a 的**左 δ 邻域**，把半开半闭区间 $[a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**. 相应地，把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**去心左 δ 邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**去心右 δ 邻域**.

三、函数的概念

我们在研究某一实际问题或自然现象的过程中，总会发现问题中的变量并不是独立变化的，而是存在着依存关系. 下面我们考察两个例子：

例 1 球的体积 V 随半径 R 的改变而变化，它们的关系为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3, \quad R\in(0,+\infty).$$

例 2 自由落体运动中，物体下落的距离 h 和时间 t 都是变量，它们有如下关系：

$$h=\frac{1}{2}gt^2, \quad t\in[0,T].$$

从以上的例子我们看到，它们所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：

(1) 每个问题中都有两个变量，它们之间不是彼此孤立的，而是相互联系、相互制约的；

(2) 当一个变量在它的变化范围中任意取定一值时，另一个变量按一定法则就有一个确定的值与这一事先取定的值相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系，我们称为函数关系.

定义 **设两个变量 x 和 y，当变量 x 在某给定的数集 D 中任意取一个值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=$**

$f(x), x\in D$，**其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域.**

当自变量 x 取值 x_0 时，与 x_0 对应的变量 y 的数值 y_0 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $y_0=f(x_0)$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}.$$

例 1、例 2 的值域分别为 $R_f=(0,+\infty)$ 和 $R_f=\left[0,\frac{1}{2}gT^2\right]$.

若对任意 $x\in D$，按照一定的法则 f 只有一个 y 值与之对应，则称函数 $y=f(x)$ 为单值函数，否则，称函数 $y=f(x)$ 为多值函数. 例如，函数 $y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+3$ 为单值函数，由方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 确定的函数为多值函数.

值得注意的是，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值，但习惯上常用记号“$f(x), x\in D$”或“$y=f(x), x\in D$”来表示定义在 D 上的函数 f. 除了常用记号 f 表示函数外，还可以用 g, F, φ 等英文字母或希腊字母来表示函数.

从定义可知，函数有两个要素：定义域 D 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则为同一函数，否则，就是不同的函数. 例如，函数 $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 是同一函数，函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 就不是同一函数.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是在实际问题中，根据实际意义确定. 例如，在球的体积 V 与半径 R 的函数关系 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 中，定义域为 $R>0$，因为 $R\leqslant 0$ 时不再有实际意义. 另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域 D 为 $[-1,1]$，函数 $y=(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域 D 为 $(-3,3)$，这种定义域称为函数的自然定义域.

函数的表示方法主要有三种：解析法（公式法）、图形法、表格法.

点集 $P=\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形，如图 1-3 所示.

常见的函数有我们在中学数学里学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等. 下面再举几个函数的例子：

例 3　符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 其中，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-4 所示. 可知对于任何实数 x，下列关系成立：$x=|x|\operatorname{sgn} x$.

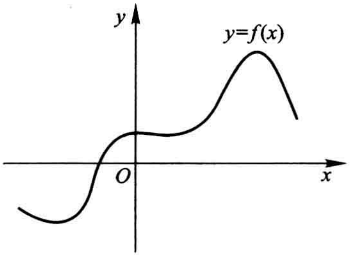


图 1-3

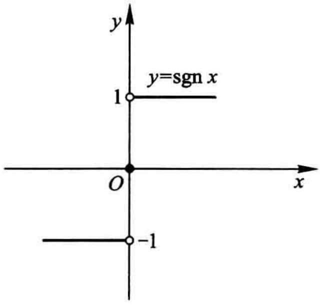


图 1-4

例 4 取整函数 $y=[x]$. 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$. 例如,$\left[\frac{1}{3}\right]=0$,$[\pi]=3$,$[-2]=-2$,$[-4.1]=-5$. 把 x 看作变量,则函数 $y=[x]$称为取整函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$,其图形如图 1-5 所示.

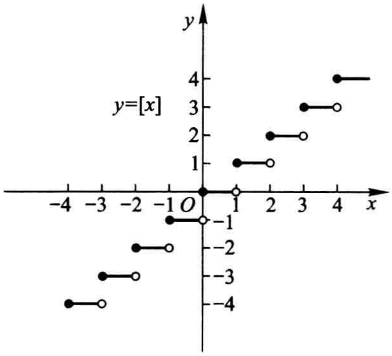


图 1-5

如例 3 所示,有时一个函数需要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为分段函数.

例 5 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x+1}, & 0\leqslant x<1,\\ 5x-2, & 1\leqslant x<2,\\ x^2+6x-5, & 2\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0,6]$. 当 $x\in[0,1)$时,对应的解析式为 $f(x)=3\sqrt{x+1}$;当 $x\in[1,2)$时,对应的解析式为 $f(x)=5x-2$;当 $x\in[2,6]$时,对应的解析式为 $f(x)=x^2+6x-5$. 例如,$3\in[2,6]$,则 $f(3)=3^2+6\cdot3-5=22$.

在自然科学和工程技术中,我们经常会遇到分段函数的情形.

四、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$时,不等式 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$成立,称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加的**,特别当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$成立时,称函数 $f(x)$在区间 I 上是**严格单调**

增加的(图 1－6)；反之，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立，称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**，特别当严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立时，称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调减少的**(图 1－7). 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**，严格单调增加和严格单调减少的函数统称为严格单调函数，区间 I 称为**单调区间**.

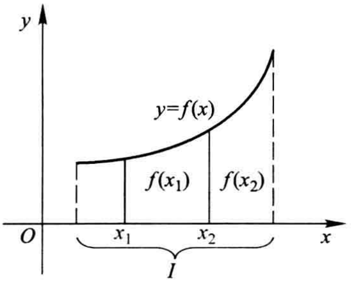


图 1－6

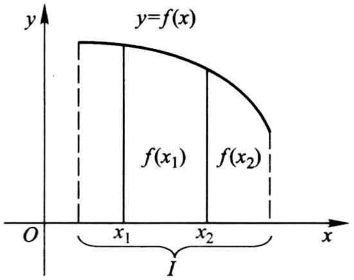


图 1－7

例如，函数 $y=3x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的. 函数 $y=\dfrac{1}{2x}$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调减少的，而在整个定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不是单调的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即如果对于任意 $x\in D$，则有 $-x\in D$. 若等式 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若等式 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 是奇函数，因为 $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$. 函数 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$. 而 $f(x)=x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称. 分别如图 1－8、图 1－9 所示.

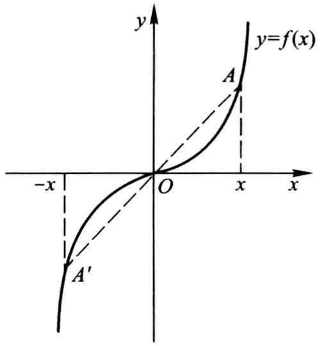


图 1－8

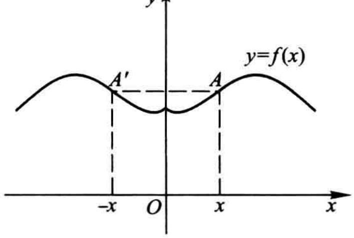


图 1－9

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使得对任意 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在数集 X 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，换句话说，如果对于任何正数 M，总可以在 X 上找到一点 x_1，使得 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

对于函数 $f(x)$，如果存在常数 M_1，使得对任意 $x\in X$，都有

$$f(x)\leqslant M_1$$

成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 如果存在常数 M_2，使得对任意 $x\in X$，都有

$$f(x)\geqslant M_2$$

成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**.

例如，对于函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，因为

$$|f(x)|=|\sin x|\leqslant 1,$$

所以函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，这里 $M=1$（当然也可以取大于 1 的任何数作为 M 而使不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立）. 同理，对于函数 $f(x)=2+\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，因为

$$1\leqslant f(x)=2+\cos x\leqslant 3,$$

则 3 是它的一个上界，这里 $M_1=3$；1 是它的一个下界，这里 $M_2=1$（当然，大于 3 的任何数也是函数 $f(x)=2+\cos x$ 的上界，小于 1 的任何数也是它的下界）.

有些函数只有上界但没有下界，如函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内，-1 就是它的一个上界但没有下界；有些函数没有上界但有下界，如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内，1 就是它的一个下界但没有上界. 这两个函数在区间 $(0,1)$ 内都是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $|f(x)|=\left|\pm\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 但是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,3)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 时，对于一切 $x\in(1,3)$ 都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立.

读者容易证明，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一