国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

现代数学基础丛书 142

# Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用

苗长兴 吴家宏 章志飞 著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 142

# Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用

苗长兴　吴家宏　章志飞　著



科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书内容涉及Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用两大部分. 其一包含了频率空间的局部化、Besov空间的Littlewood-Paley刻画、Bony 的仿积分解及仿线性化技术、新型的 Bernstein 不等式等. 其二在 Littlewood-Paley 理论的框架下, 建立输运扩散方程解的时空正则性估计、频谱层次的正则性估计及零阶 Besov 空间的 log-型估计, 给出了既包含对流, 也包含扩散现象的流体动力学问题的统一处理方法. 在这个新的框架下, 重点讨论了不可压的 Euler 方程与 Navier-Stokes 方程、Boussinesq 方程、临界 Quasi-Geostrophic 方程及可压的 Navier-Stokes 方程等. 本书的特点是将现代调和分析理论, 诸如: 频率空间的分析、Fourier 局部化技术、Bony 的仿积分解及仿线性化技术等和传统的连续模方法、De Giorgi-Nash-Moser 迭代技术相结合, 充分利用与开发流体动力学方程内在的几何与代数结构、正交结构、消失条件来研究相应的非线性相互作用, 达到在自然临界空间研究流体动力学方程的目的.

本书可供理工科大学数学系、应用数学系的高年级本科生、研究生、教师以及相关的科学工作者阅读参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用/苗长兴, 吴家宏, 章志飞著. —北京: 科学出版社, 2012

(现代数学基础丛书; 142)

ISBN 978-7-03-033412-1

I. ①L… Ⅱ. ①苗… ②吴… ③章… Ⅲ. ①泛函分析 ②泛函分析-应用-流体动力学-动力学方程 Ⅳ. ①O177 ②O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 014380 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年3月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2012年3月第一次印刷 印张: 29

字数: 567 000

**定价: 98.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨 乐

2003年8月

# 序　言

Littlewood-Paley 理论最重要的作用之一就是频率空间的局部化. 众所周知, Fourier 变换将物理空间中的微分运算转化成频率空间中的代数运算, Littlewood-Paley 分解将缓增分布形式地写成在频率空间意义下几乎正交的光滑函数的和, 从而实现在不同频段上求导与微分运算的代数化. Littlewood-Paley 理论在偏微分方程研究中的辉煌成就当属 Bony 的仿积分解理论, 它是 Bony 在研究双曲型方程解的奇性传播时引入的, 经过 Meyer 等数学家发展后广泛地应用到偏微分方程的研究. 随着其他重要的分析工具, 诸如: 振荡积分理论、Fourier 限制性估计与 Strichartz 估计、Profiles 分解与集中紧原理等方法的发展与使用, 进一步突显了 Littlewood-Paley 理论的框架性、普适性、灵活性等特征, 从而使这一理论逐步成为研究非线性发展方程的基本工具.

本书的主旨就是 Littlewood-Paley 理论及其在各种流体动力学方程中的应用. Littlewood-Paley 理论的基本思想就是频率空间分析与局部化理论, 其优势包括几个主要方面: 其一是微分算子或一般的 Fourier 乘子算子作用到 Fourier 变换具有环形支集 (或球形支集) 的分布上等价数乘运算 (或被数乘估计控制). 其二是将函数或缓增分布分解成一系列在频率空间上几乎正交的光滑函数的和式, 展示了内在的几何与代数结构, 以便给出非线性相互作用的精确分析. 特别地, Bony 的仿积分解与仿线性化技术为非线性估计提供了强有力的武器. 其三是 Littlewood-Paley 理论不仅给出了一般可微函数空间 (研究偏微分方程的载体) 的完美刻画, 同时也提供了研究偏微分方程的基本工具. 已有的关于输运方程与扩散方程的研究框架基本上处于相互独立的状况, 因此, 它们各自的经典研究方式并不适用于对方. 许多物理模型特别是流体动力学问题中均涉及对流和扩散两种现象, 发展一种同时适应对流和扩散两种现象的研究框架是很有意义的. 它丰富了输运扩散方程的研究, 给出了一个统一的框架与研究方法. 与此同时, Fourier 局部化方法不仅适用于不可压模型, 也可以应用到可压的流体动力学问题.

第 1 章从频率空间上的局部化出发, 通过经典 Bernstein 不等式与频率空间上的单位分解定理, 给出齐次与非齐次型的 Littlewood-Paley 分解理论. 在 Littlewood-Paley 理论的框架下, 讨论 Besov 空间理论, 特别是 Besov 空间的各种不同刻画之间的等价关系等. 作为 Littlewood-Paley 理论的重要组成部分, 着重介绍 Bony 的仿积分解及仿线性化技术. 作为应用, 着重讨论了新型的 Bernstein 不等式, 它是建立分数阶耗散算子在局部化空间 (如: Besov 空间、分数阶 Sobolev 空间等) 正性估

计的基础, 在研究分数阶发展型方程中起着重要的作用.

第 2 章主要通过 Fourier 局部化方法建立输运扩散方程的解在 Besov 空间框架下的一致性估计. 需要指出的是, 输运项中的向量场可以不满足不可压条件, 因此它不仅适合于不可压的流体动力学方程, 同时可以应用到可压的流体动力学问题. 鉴于 Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间的局部化特征, 我们讨论了各种形式的局部化估计与交换子估计. 另一方面, 充分利用输运扩散方程的 Lagrange 形式, 将对流项的估计转化为平坦空间中的 Laplace 算子与非平坦空间中的 Laplace 算子所派生的交换子估计, 因此可以通过二次微局部化的过程来处理含交换子型扰动项的热传导方程.

第 3 章首先在 Besov 空间的框架下, 给出 $d$ 维空间不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题的局部适定性与 Blow-up 准则. 作为 Beale-Kato-Majda 准则特例, 就直接推出二维不可压 Euler 方程 Cauchy 问题光滑解的整体适定性. 其次, 通过建立 Vishik 的 "衰减型正交性" 及 log- 型估计, 证明二维不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题在临界空间中的整体适定性. 3.3 节详细讨论具有轴对称无旋的三维不可压 Euler 方程, 利用其特殊的几何结构、涡度场不同分解的 "衰减正交性" 等证明了具有轴对称无旋的三维不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题在临界与次临界空间中的整体适定性. 最后, 还详细研究二维不可压 Navier-Stokes 方程在 Besov 空间 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$ 中的无黏性极限问题, 其中 $p \geqslant 2$ 的情形源于 Hmidi-Keraani [HK3], $p < 2$ 的情形是本书中首次给出.

第 4 章集中讨论具部分黏性的二维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性. 4.1 节主要基于用能量估计与 log-型不等式, 建立具部分黏性的二维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题光滑解的整体适定性. 4.2 节利用 Fourier 局部化方法及相应的输运扩散方程在 Besov 型空间中的正则性估计、频谱层次上的正则性估计等, 在临界空间中建立具部分黏性的二维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性. 4.3 节利用 Boussinesq 方程组自身的耦合结构与对称化的理念, 在适当的条件下, 证明了具有轴对称初值的三维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性.

第 5 章着力于临界 Quasi-Geostrophic 方程. 5.1 节给出了在临界空间的局部适定性与 Blow-up 机制, 同时还介绍了这一方程的研究历史. 5.2 节主要介绍 Kiselev-Nazarov-Volberg 的连续模方法, 它主要基于如下重要观察: 奇异积分算子虽然不能保持连续模, 但它对连续模的破坏也不大. 5.3 节主要讨论 Caffarelli-Vasseur 方法, 这是一个普适性的方法, 基本思想是采用调和扩张及 De Giorgi-Nash-Moser 迭代技术建立 Leray-Hopf 弱解的正则性.

第 6 章主要介绍作者采用 Littlewood-Paley 理论研究可压缩 Navier-Stokes 方程的一个结果, 这是一个新的尝试. 首先给出了一个线性化的双曲抛物耦合系统的基本解, 通过 Fourier 局部化方法, 分析此系统在不同的频率空间中表现的不同效

应, 从而引入了适合高低频演化的 Hybrid-Besov 空间这一新的框架. 为了克服高频时对流项作为扰动项带来的关于密度的导数损失，引入了频谱层次上的 Lagrange 坐标, 从而得到了具有高振荡初值 (即某种意义上的大初值) 的整体适定性.

最后, 在附录中给出了经典的不可压 Navier-Stokes 方程的研究进展, 以方便读者参考使用. 内容涉及 Leray-Hopf 弱解、光滑解的局部适定性、Kato 的双模方法、时空正则性与单模方法、$L^p$- 方法及无条件唯一性等, 主要取材于文献 [Chem3], [Ca1], [Lem1] 及 [MiZ].

本书的初稿始于在北京大学国际数学中心、香港中文大学数学研究所、北京应用物理与计算数学研究所等讲座与课程的讲稿, 后经认真修改、增删而成. 在本书形成过程中, 得到了田刚院士、辛周平教授的大力支持, 作者深表感谢. 本书的部分内容与张恭庆院士、洪家兴院士、陆善镇教授进行了交流, 得到了鼓励与支持, 在此表示由衷的感谢. 作者感谢周毓麟院士、郭柏灵院士等长期的指导与帮助, 以及对本书提出的许许多多的建设性意见.

最后, 作者还要感谢年轻同事与学生: 陈琼蕾副研究员、徐桂香副研究员、原保全教授、苑佳博士、吴刚博士、张军勇博士及博士生薛留堂、郑孝信、程星、郑继强、夏素霞、张谦、徐夫义、杨建伟、王大卫、路静等, 他们为本书的校对做了许多有益的工作.

本书得到国家科学技术学术著作出版基金、国家杰出青年基金、国家自然科学基金、北京应用物理与计算数学研究所“学习、创造、提高”活动的资助.

作　者

2011 年 10 月于北京

# 目　录


《现代数学基础丛书》序

序言

第 1 章　Littlewood-Paley 理论 $\cdots\cdots$ 1

1.1　频率空间的局部化 $\cdots\cdots$ 1

1.2　齐次 Besov 空间 $\cdots\cdots$ 14

1.3　非齐次 Besov 空间 $\cdots\cdots$ 39

1.4　Bony 的仿积分解与仿线性化技术 $\cdots\cdots$ 54

1.5　新型的 Bernstein 不等式 $\cdots\cdots$ 75

第 2 章　输运扩散方程的时空正则性 $\cdots\cdots$ 84

2.1　引言 $\cdots\cdots$ 84

2.2　局部化引理及交换子估计 $\cdots\cdots$ 88

2.3　输运扩散方程的混合时空估计 $\cdots\cdots$ 109

2.4　具有对流项的线性 Stokes 方程的正则性估计 $\cdots\cdots$ 142

第 3 章　不可压 Euler 方程的数学理论 $\cdots\cdots$ 146

3.1　不可压 Euler 方程在 Besov 空间中的局部适定性与 Blow-up 准则 $\cdots$ 147

3.2　二维不可压 Euler 方程的整体可解性 $\cdots\cdots$ 162

3.3　三维轴对称 Euler 方程的整体适定性 $\cdots\cdots$ 172

3.4　二维 N-S 方程在 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$ 中的整体适定性及无黏性极限 $\cdots\cdots$ 198

第 4 章　Boussinesq 方程的 Cauchy 问题 $\cdots\cdots$ 211

4.1　$\mathbb{R}^2$ 中具部分黏性的 Boussinesq 方程的整体适定性 $\cdots\cdots$ 212

4.2　$\mathbb{R}^2$ 中具部分黏性的 Boussinesq 方程在临界空间中的整体适定性 $\cdots$ 227

4.3　$\mathbb{R}^3$ 中具部分黏性的 Boussinesq 方程的轴对称解的整体适定性 $\cdots$ 254

第 5 章　临界 Quasi-Geostrophic 方程 $\cdots\cdots$ 275

5.1　Q-G 方程局部理论与 Blow-up 机制 $\cdots\cdots$ 276

5.2　连续模方法与临界 Q-G 方程的整体解 $\cdots\cdots$ 284

5.3　Caffarelli-Vasseur 的正则化方法 $\cdots\cdots$ 294

第 6 章　可压的 Navier-Stokes 方程 $\cdots\cdots$ 340

6.1　引言 $\cdots\cdots$ 340

6.2　Hybrid-Besov 空间与局部化引理 $\cdots\cdots$ 346

6.3　不具对流项的线性化方程的 Green 矩阵与解的正则性估计 $\cdots\cdots$ 351

6.4 Hybrid-Besov 空间中的 Bony 仿积估计及交换子估计 ················ 357
6.5 具有对流项的线性化方程解的正则性估计 ························ 368
6.6 具高振荡的初值问题的整体适定性 ······························ 378
**附录 Navier-Stokes 方程的经典研究** ·························· 389
A.1 引言 ························································ 389
A.2 N-S 方程在 Hilbert 空间 $H^s$ 中的适定性理论 ················ 396
A.3 N-S 方程的结构及相应结果 ···································· 405
A.4 N-S 方程的 $L^p$ 方法及其注记 ································ 411
A.5 $L^d$-解的无条件唯一性 ······································ 421
**参考文献** ······················································ 434
**名词索引** ······················································ 444
**《现代数学基础丛书》已出版书目** ································ 446

# 第 1 章　Littlewood-Paley 理论

Littlewood-Paley 理论最重要的作用之一就是将频率空间局部化. 众所周知, Fourier 变换将物理空间中的微分运算转化成频率空间中的代数运算, Littlewood-Paley 分解将缓增分布形式地写成在频率空间意义下几乎正交的光滑函数的和. 这种局部化方法的优点在于对于其 Fourier 变换支在球或环上的分布, 可以充分利用 Bernstein 估计, 实现求导或微分运算的代数化. Littlewood-Paley 理论在偏微分方程研究中的辉煌成就当属 Bony 的仿积分解理论, 它是 Bony 在研究双曲方程解的奇性传播时引入的, 经过 Meyer 等数学家发展后广泛地应用到偏微分方程的研究. 随着其他重要的分析工具, 诸如: 振荡积分理论、Fourier 限制性估计与 Strichartz 估计、Profile 分解与集中紧原理等方法的发展与使用, 进一步突显了 Littlewood-Paley 理论的框架性、普适性、灵活性等特征, 从而使这一理论逐步成为研究非线性发展方程的基本工具.

本章从频率空间上的局部化出发, 1.1 节着力于讨论经典 Bernstein 不等式与频率空间上单位分解定理, 给出缓增分布的齐次与非齐次型的 Littlewood-Paley 分解. 1.2 节在 Littlewood-Paley 理论的框架下, 给出齐次 Besov 空间定义、基本的嵌入关系、插值定理及热传导方程的解在混合时空 Besov 空间上的时空正则性. 重点讨论 Besov 空间的各种不同刻画之间的等价关系等. 1.3 节主要讨论相应的非齐次 Besov 空间的理论. 作为特例, 介绍了 Hölder 型空间 $C^\alpha$ 与 Zygmund 型空间 $\mathscr{C}^1_* = B^1_{\infty,\infty}$ 及其应用. 1.4 节着力介绍 Bony 的仿积分解及仿线性化技术, 它是其他章节的基本工具之一. 1.5 节介绍新型的 Bernstein 不等式, 它是建立分数阶耗散算子在局部化空间 (如: Besov 空间、分数阶 Sobolev 空间等) 正性估计的基础, 在研究分数阶发展型方程的研究中起着重要的作用.

## 1.1　频率空间的局部化

Littlewood-Paley 理论的基本思想就是频率空间的局部化, 其优势在于将物理空间的微分运算转化成频率空间的数乘运算. 更一般地, Fourier 乘子算子作用在 Fourier 变换具有环形支集 (或球形支集) 的缓增分布上, 等价于数乘运算 (或被数乘估计控制). 为书写方便, 本节 Fourier 变换与逆变换采用如下形式:

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \triangleq \hat{f}(\xi),$$

$$\mathcal{F}^{-1}g(x)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi\triangleq\check{g}(x).$$

在这种形式下, 常常用到 $\mathcal{F}\left[e^{-|x|^2/2}\right]=e^{-|\xi|^2/2}$. 频率局部化中最基本引理就是如下的 Bernstein 不等式.

**引理 1.1** (Bernstein 不等式) 设 $\mathscr{C}$ 与 $B$ 分别是以原点为中心的环和球. 存在常数 $C>0$ 使得对任意整数 $k\geqslant 0$, 任意度为 $m$ 的光滑齐次函数 $\sigma(x)$, 任意的数对 $b\geqslant a\geqslant 1$ 及任意的 $L^a$ 函数 $u$, 有如下估计:

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)}\leqslant C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)},\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda B,\tag{1.1}$$

$$C^{-(k+1)}\lambda^k\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}\leqslant\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}\leqslant C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)},\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C},\tag{1.2}$$

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{\sigma,m}\lambda^{m+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)},\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C}.\tag{1.3}$$

**证明** 第一步. 取 $\hat{\phi}(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\begin{cases}\hat{\phi}(\xi)=1, & \xi\in B,\\ \hat{\phi}(\xi)=0, & \xi\in\mathbb{R}^d\setminus 2B,\end{cases}\tag{1.4}$$

这里 $2B$ 是与 $B$ 同心、半径扩张 2 倍的球 ($2\mathscr{C}$ 同理定义). 易见

$$\hat{u}(\xi)=\hat{\phi}(\xi)\hat{u}(\xi),\quad \operatorname{supp}\hat{u}(\xi)\subset B,\tag{1.5}$$

因此

$$u(x)=\phi*u(x)\Longrightarrow\partial^\alpha u=\partial^\alpha\phi*u.\tag{1.6}$$

利用 Fourier 变换的定义、插值可见

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha\phi(x)\|_{L^c}&\leqslant\|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty}+\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} && (1\leqslant c\leqslant\infty)\\ &\leqslant 2\omega_d\|(1+|x|^2)^d\partial^\alpha\phi\|_\infty && (\omega_d:\mathbb{R}^d\text{ 单位球面的面积})\\ &\leqslant 2\omega_d\|(I-\Delta)^d(i\xi)^\alpha\hat{\phi}(\xi)\|_{L^1}\\ &=: C^{k+1}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

利用 Young 不等式, (1.6) 两边取 $L^b$ 模就得

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b}\leqslant\|\partial^\alpha\phi\|_{L^c}\|u\|_{L^a}\leqslant C^{k+1}\|u\|_{L^a},\tag{1.8}$$

这里

$$\frac{1}{b}+1=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.$$

两边关于 $|\alpha|=k$ 取上确界, 就得 (1.1) 在 $\lambda=1$ 的情形. 通过尺度变换技术, 它本质上就意味着一般的结果. 事实上

$$\hat{u}(\xi)=\hat{\phi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\hat{u}(\xi),\qquad \forall \xi\in\lambda B,$$

于是

$$u(x)=\lambda^d\phi(\lambda\cdot)*u(\cdot)\Longrightarrow \partial^\alpha u=\lambda^d\partial_x^\alpha(\phi(\lambda\cdot))*u(\cdot),\tag{1.9}$$

注意到

$$\|\lambda^d\partial_x^\alpha\phi(\lambda x)\|_{L^c}=\lambda^{k+\frac{(c-1)d}{c}}\|\partial_x^\alpha\phi(x)\|_{L^c}=\lambda^{d(1-\frac{1}{c})+k}C^{k+1},\tag{1.10}$$

由 Young 不等式及关系式 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=1-\dfrac{1}{c}$ 就推出

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b}\leqslant\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}C^{k+1}\|u\|_{L^a},\qquad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda B,$$

关于 $|\alpha|=k$ 取上确界就是估计 (1.1).

第二步. 取 $\hat{\psi}(\xi)\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$, 并且

$$\begin{cases}\hat{\psi}(\xi)=1, & \xi\in\mathscr{C},\\ \hat{\psi}(\xi)=0, & \operatorname{dist}(\xi,\mathscr{C})\geqslant\dfrac{d(0,\mathscr{C})}{2}.\end{cases}\tag{1.11}$$

利用代数恒等式

$$|\xi|^{2k}=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_d^2)^k=\sum_{1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_k\leqslant d}\xi_{j_1}^2\cdots\xi_{j_k}^2=\sum_{|\alpha|=k}(i\xi)^\alpha(-i\xi)^\alpha,$$

有

$$\sum_{|\alpha|=k}\frac{(i\xi)^\alpha(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}=1.\tag{1.12}$$

利用 $\hat{\psi}(\xi)$ 取代 $\hat{\phi}(\xi)$ 的位置, 完全类似于第一步的推导, 就可以证明 (1.2) 的第二个不等式. 下面仅证第一个不等式

$$\hat{u}(\xi)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}\hat{\psi}(\xi)(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi),\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\mathscr{C},\tag{1.13}$$

$$u(x)=\sum_{|\alpha|=k}g_\alpha*\partial^\alpha u,\quad g_\alpha(x)=\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}\hat{\psi}(\xi)\Big)\in L^1(\mathbb{R}^d),\tag{1.14}$$

当 $\lambda\neq 1$ 时, 形如 (1.14) 的表示推导如下:

$$\hat{u}(\xi)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}\hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)=\lambda^{-k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{(-i\xi/\lambda)^\alpha}{(|\xi|/\lambda)^{2k}}\hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi),$$

由此可见

$$u(x) = \lambda^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \lambda^d g_\alpha(\lambda x) * \partial^\alpha u. \tag{1.15}$$

直接估计

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^a} &\leqslant \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \\ &\leqslant \#\{|\alpha| = k\} \cdot \max_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \\ &=: C^{k+1} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a}, \end{aligned}$$

因此

$$C^{-(k+1)} \|u\|_{L^a} \leqslant \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a}, \quad \operatorname{supp} \hat{u} \subset \mathscr{C}. \tag{1.16}$$

同理, 用 (1.15) 代替 (1.14), 就得估计 (1.2) 的第一个不等式.

第三步. 注意到 $\sigma(\xi)\hat{u} = \hat{\psi}(\xi)\sigma(\xi)\hat{u}(\xi)$, 就得

$$\sigma(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}(\xi)\sigma(\xi)) * u = g_\sigma(x) * u, \quad \operatorname{supp}\hat{u} \subset \mathscr{C}. \tag{1.17}$$

由于 $\sigma(\xi)$ 是 $m$ 阶齐次函数, 容易看出

$$\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \lambda^m \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\sigma\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\hat{u}(\xi).$$

因此, $\sigma(D)u = \lambda^m \lambda^d g_\sigma(\lambda x) * u(x)$. 由此推出

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b} \leqslant C_{\sigma,m} \|u\|_{L^a}, \tag{1.18}$$

这里

$$\|g_\sigma(x)\|_{L^c} =: C_{\sigma,m}, \quad 1 + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \operatorname{supp} \hat{u}(\xi) \subset \mathscr{C}. \tag{1.19}$$

同理推得

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b} \leqslant \lambda^{m+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} C_{\sigma,m} \|u\|_{L^a}, \quad \operatorname{supp} \hat{u}(\xi) \subset \lambda\mathscr{C}. \tag{1.20}$$

□

下面来重点讲授单位分解定理.

**定理 1.2**　设 $\mathscr{C}$ 是一个以原点为中心, 长半径是 $\frac{8}{3}$, 短半径是 $\frac{3}{4}$ 的环. 存在两个径向函数 $\chi(\xi) \in \mathscr{D}(B_{\frac{4}{3}}(0))$,$\hat{\varphi}(\xi) \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$ 满足 $0 \leqslant \chi(\xi), \hat{\varphi}(\xi) \leqslant 1$ 及

$$\chi(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1.21}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{1.22}$$

$$\text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j}\cdot) \cap \text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j'}\cdot) = \varnothing, \quad |j - j'| \geqslant 2, \tag{1.23}$$

$$\text{supp } \chi(\cdot) \cap \text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j}\cdot) = \varnothing, \quad j \geqslant 1. \tag{1.24}$$

令

$$\tilde{\mathscr{C}} := B_{\frac{2}{3}}(0) + \mathscr{C} = \left\{ \xi \;\middle|\; \frac{1}{12} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{10}{3} \right\}, \tag{1.25}$$

则 $\tilde{\mathscr{C}}$ 是环, 并且有如下关系式:

$$2^{j'}\tilde{\mathscr{C}} \cap 2^j\mathscr{C} = \varnothing, \quad |j - j'| \geqslant 5, \tag{1.26}$$

$$1/3 \leqslant \chi^2(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1.27}$$

$$1/2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{1.28}$$

**证明** 第一步. 这是一个构造性的证明. 取 $\alpha \in (1, 4/3)$, 记

$$\mathscr{C}' = \{ \xi |\ \alpha^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\alpha \} \subsetneq \mathscr{C}, \tag{1.29}$$

取 $\theta(\xi) = \theta(|\xi|) \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$ 并且

$$0 \leqslant \theta(\xi) \leqslant 1; \quad \theta(\xi) \equiv 1, \qquad \xi \in \mathscr{C}'. \tag{1.30}$$

重要观察:

$$2^j\mathscr{C} \cap 2^{j'}\mathscr{C} = \varnothing, \quad |j - j'| \geqslant 2. \tag{1.31}$$

否则, 就应有

$$2^j\frac{8}{3} > 2^{j'}\frac{3}{4} \text{ 且 } 2^{j'}\frac{8}{3} > 2^j\frac{3}{4},$$

即

$$2^{j-j'} > \frac{9}{32}, 2^{j-j'} < \frac{32}{9} \Longleftrightarrow |j - j'| < 2.$$

类似地, 亦有

$$B_{\frac{4}{3}}(0) \cap 2^j\mathscr{C} = \varnothing, \quad j \geqslant 1, \tag{1.32}$$

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j\mathscr{C} = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{1.33}$$

由 (1.31) 说明 $\theta_j(\xi) = \theta(2^{-j}\xi)$ 是几乎正交的光滑函数列, 令

$$S(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \theta(2^{-j}\xi), \tag{1.34}$$

易见, 上面和式在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上是局部有限求和 (具体地说, 对 $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, 存在含 $\xi$ 的邻域 $U_\xi$, 满足在邻域 $U_\xi$ 上, (1.34) 的右边和式中非零项不超过 3 项). 从而,

$S(\xi) \in C^\infty$. 与此同时, (1.34) 表达式就意味着

$$S(2^k\xi) \equiv S(\xi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.35}$$

故令

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\theta(\xi)}{S(\xi)} \Longrightarrow \operatorname{supp} \hat{\varphi}(\xi) \subset \mathscr{C}, \tag{1.36}$$

且

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\theta(2^{-j}\xi)}{S(\xi)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\theta(2^{-j}\xi)}{S(2^{-j}\xi)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{1.37}$$

由此可以推出 $0 \leqslant \hat{\varphi}(\xi) \leqslant 1$ 并且满足 (1.22),(1.23) 及定理中所涉及的光滑性 $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$.

由 $\{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\}$ 的几乎正交性可见

$$\chi(\xi) := 1 - \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi), \tag{1.38}$$

光滑并且满足 (1.21), 由于

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \subset \left\{ \xi \;\middle|\; \frac{3}{4}\cdot 2^j \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\cdot 2^j \right\},$$

故

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \subset \left\{ \xi \;\middle|\; |\xi| \leqslant \frac{4}{3} \right\}, \quad \forall j \leqslant -1,$$

因此

$$\sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall |\xi| \geqslant \frac{4}{3}. \tag{1.39}$$

由此说明 $\chi(\xi) \in \mathscr{D}(B_{\frac{4}{3}}(0))$. 进而, 当 $j \geqslant 1$ 时,

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}_j(\xi) := \operatorname{supp} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \subset \left\{ \xi \mid |\xi| > \frac{3}{2} \right\}.$$

自然

$$\operatorname{supp} \chi(\xi) \cap \operatorname{supp} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = \varnothing, \quad j \geqslant 1.$$

第二步. 下面来证明 (1.26)~(1.28). 注意到

$$\widetilde{\mathscr{C}} = \left\{\xi \;\middle|\; \frac{1}{12} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{10}{3}\right\},$$

容易看出

$$\begin{aligned} 2^{j'}\widetilde{\mathscr{C}} \cap 2^j\mathscr{C} \neq \varnothing &\Longleftrightarrow \frac{3}{4}\cdot 2^j < 2^{j'}\frac{10}{3} \text{ 且 } \frac{1}{12}\cdot 2^{j'} < 2^j\frac{8}{3} \\ &\Longleftrightarrow 2^{j-j'} < \frac{40}{9}, 2^{j-j'} > \frac{1}{32} \\ &\Longleftarrow |j'-j| < 5. \end{aligned}$$

于是, (1.26) 得证.

注意到 $0 \leqslant \chi(\xi), \hat{\varphi}(\xi) \leqslant 1$, 容易推出

$$\chi^2(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant \Big(\chi(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\Big)^2 = 1,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\Big)^2 = 1.$$

故仅需证明 (1.27),(1.28) 左边的不等式即可. 记 $j = 0(2)$ 与 $j = 1(2)$ 分别表示偶数和奇数. 这样, 利用几乎正交性原理及

$$\Big[\sum_{j=0(2)} \hat{\varphi}_j(\xi) + \sum_{j=1(2)} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big]^2 = 1, \quad \hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

$$\Big[\chi(\xi) + \sum_{j=0(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi) + \sum_{j=1(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big]^2 = 1, \quad \hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

可得

$$2\Big(\sum_{j=0(2)} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 + 2\Big(\sum_{j=1(2)} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 \geqslant 1,$$

$$3\chi^2(\xi) + 3\Big(\sum_{j=0(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 + 3\Big(\sum_{j=1(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 \geqslant 1.$$

从而推出 (1.27), (1.28) 成立. □

基于频率空间上的单位分解定理与 $\chi(\xi), \hat{\varphi}(\xi)$ 的构造, 我们引入一些与 Littlewood-Paley 理论相关的记号:

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)), \quad \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)), \tag{1.40}$$

$$\begin{cases} \Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi)); \quad \Delta_j u = 0, \quad j \leqslant -2, \\ \Delta_j u = \hat{\varphi}(2^{-j}D)u = 2^{jd}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y)u(x-y)dy, \quad j \geqslant 0, \\ S_j u = \chi(2^{-j}D)u = 2^{jd}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h(2^j y)u(x-y)dy, \quad j \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ \hat{\varphi}\Big(\dfrac{\xi}{2^j}\Big) = \chi\Big(\dfrac{\xi}{2^{j+1}}\Big) - \chi\Big(\dfrac{\xi}{2^j}\Big) \Longleftrightarrow \Delta_j u = (S_{j+1} - S_j)u, \quad j \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.41}$$

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_j u = \hat{\varphi}(2^{-j}D)u = 2^{jd}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y)u(x-y)dy, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \dot{S}_j u \triangleq \chi(2^{-j}D)u, \qquad j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.42}$$

容易看出

$$S_j u = \sum_{j'\leqslant j-1} \Delta_{j'} u, \quad \dot{S}_j u \neq \sum_{j'\leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} u, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

事实上, 如果不然, 取 $u=1$, 对于任意整数 $j$, 正交性意味着

$$\dot{\Delta}_j 1 = 0 \quad (\ \hat{\varphi}_j(\xi)\delta(\xi)=0\ ), \qquad \forall j\in\mathbb{Z}.$$

故

$$\langle 1,\phi\rangle = \langle \dot{S}_j 1,\phi\rangle = \left\langle \sum_{j'\leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} 1, \ \ \phi\right\rangle = 0, \qquad \forall\phi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

是一个矛盾式. 说明

$$\dot{S}_j u \neq \sum_{j'\leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} u, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

这充分说明与非齐次 Littlewood-Paley 算子不同, 我们不能用 $\sum\limits_{k\leqslant j-1}\dot{\Delta}_k$ 来定义 $\dot{S}_j$. 然而, 对于 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}=\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$, 总有

$$\dot{S}_j u = \sum_{j'\leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} u, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad u\in\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d).$$

进而, 算子 $\Delta_j(\dot{\Delta}_j)$, $S_j=\dot{S}_j$ 是 $(p,p)$ 型有界算子, 算子的界均不依赖于 $j$, 这一事实将来会一直使用.

下面来考察分解

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j = I\ (\text{非齐次分解}); \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j = I\ (\text{齐次分解}) \tag{1.43}$$

的意义. 以非齐次分解为例先来说明.

**命题 1.3** *设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 则在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 分布意义下, 有*

$$u = \lim_{j\to\infty} S_j u. \tag{1.44}$$

**证明** 对任意 $f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 易见

$$\langle u - S_j u, f\rangle \equiv \langle u, f - S_j f\rangle.$$

因此, (1.44) 就归结为证明

$$f \xlongequal{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \lim_{j\to\infty} S_j f, \quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{1.45}$$

注意到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的局部凸拓扑可以用如下半范数簇

$$|||\cdot|||_{k,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \xlongequal{\text{def}} \sup_{|\alpha|\leqslant k,\xi\in\mathbb{R}^d} (1+|\xi|)^k |\partial^\alpha \hat{f}(\xi)|$$