

高等学校教学用书

线性代数练习

第二版

南京工业大学信息与计算科学系 编



化学工业出版社

高等学校教学用书

线性代数练习 第二版

南京工业大学信息与计算科学系 编



化学工业出版社

· 北京 ·

线性代数是大学理工科与经济、管理等学科的一门基础课程。现将课外练习与自我测试题部分集为一册出版,以使学习者完成练习更加便利。

本书是配套教材《线性代数》(第二版)(邵建峰 刘彬 编)的学生用练习册,共三部分。第一部分是线性代数前七章的习题与每章自测题;第二部分是模拟试题与解答;第三部分是部分习题与自测题参考答案。每章既有一定量的习题,又有作者精心挑选的自测题,并附有部分习题和自测题参考答案。书后附有六套测试试题及详解和一套模拟试题,以帮助学生理解教材的基本概念,提高分析问题和解决问题的能力。

本书与线性代数教材和学习指导书配套使用。本书特殊的装订形式方便学生作业使用,也可供考研人员复习时练习使用。

编写人员名单

邵建峰 程浩 刘彬 刘浩 孙大飞 王天荆

图书在版编目(CIP)数据

线性代数练习/南京工业大学信息与计算科学系编.
—2版.—北京:化学工业出版社,2016.9
高等学校教学用书
ISBN 978-7-122-27765-7

I. ①线… II. ①南… III. ①线性代数-高等学校-
习题集 IV. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 181618 号

责任编辑:唐旭华 郝英华

装帧设计:张 辉

责任校对:吴 静

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 刷:北京市振南印刷有限责任公司

装 订:北京国马印刷厂

787mm×1092mm 1/16 印张 7 字数 166 千字 2016 年 10 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:16.00 元

版权所有 违者必究

目 录

第一章 行列式	1
第一章习题	1
第一章自测题	8
第二章 矩阵	11
第二章习题	11
第二章自测题	23
第三章 向量组的线性相关性与矩阵的秩	25
第三章习题	25
第三章自测题	35
第四章 线性方程组	37
第四章习题	37
第四章自测题	42
第五章 特征值与特征向量·矩阵的对角化	45
第五章习题	45
第五章自测题	52
第六章 二次型	55
第六章习题	55
第六章自测题	60
第七章 线性空间与线性变换	63
第七章习题	63
第七章自测题	66
附录 线性代数测试试题及详解	68
线性代数测试试题 1	68
线性代数测试试题 2	71
线性代数测试试题 3	74
线性代数测试试题 4	78
线性代数测试试题 5	81
线性代数测试试题 6	84
线性代数模拟试题	87
线性代数测试试题 1 解答	90
线性代数测试试题 2 解答	91
线性代数测试试题 3 解答	93
线性代数测试试题 4 解答	95
线性代数测试试题 5 解答	96
线性代数测试试题 6 解答	98
部分习题与自测题参考答案	100

第一章 行列式

第一章习题

1. 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

2. 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}.$$

3. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

4. 已知

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

求下列各行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+4 & 3z+6 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}.$$

5. 计算 n 阶行列式

$$(1) \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

6. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos(n\theta).$$

7. 利用 n 阶范德蒙行列式计算:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

8. 用克莱姆法则解下列线性方程组 (可以利用 MATLAB 计算行列式的值):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$$

9. 求 k 的值, 使下列齐次线性方程组有非零解 (能利用 MATLAB 计算符号行列式吗?):

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

10. 求二次插值多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, 使得 $f(-1) = 7$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$ 。

第一章自测题

1. 填充与选择题

(1) 设 $A = (A_1 \ A_2 \ A_3)$ 是按列分块表示的 3 阶方阵, 且 $|A| = -2$, 则下列行列式 $|A_3 - 2A_1 \ 3A_2 \ A_1| =$ _____。

(2) 设 4 阶行列式 $|A| = |\alpha \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4| = 3$ 和 $|B| = |\beta \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4| = 1$, 则行列式 $|A+B| =$ _____。

(3) 行列式
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$
 的值为 ()。

(A) 0 (B) $a^4 - b^4$ (C) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ (D) $(a^2 - b^2)^2$

(4) 设 $A = (A_1 \ A_2 \ A_3)$ 是 3 阶方阵, 其中 $A_i (i=1, 2, 3)$ 是它的列, 则 $|A| =$ ()。

(A) $|A_3 \ A_2 \ A_1|$ (B) $| -A_1 \ -A_2 \ -A_3 |$
(C) $|A_1 \ A_1 + A_2 \ A_1 + A_2 + A_3|$ (D) $|A_1 + A_2 \ A_2 + A_3 \ A_3 + A_1|$

2. 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. 求三次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ ，使得 $f(-1)=0, f(1)=4, f(2)=3, f(3)=16$ 。

第二章 矩阵

第二章习题

1. 已知

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbf{A}'\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{AB} - 2\mathbf{BA}$ 。

2. 求下列矩阵的乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}。$$

3. 计算:

$$(1) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^2;$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3;$$

$$(3) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^3。$$

4. 求所有与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵。

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \quad (a, b, c \text{ 互不相同})$$

证明：与 A 可交换的矩阵必为对角矩阵。