Introduction to Non-linear Mechanics

# 非线性力学导论

徐博侯 曲绍兴 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# 非线性力学导论

徐博侯　曲绍兴　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

## 内容提要

本教材是在浙江大学力学系开设多年的“非线性力学”课程讲义的基础上修订得到的，适用于32学时的研究生课程。在这门课程中，我们主要是以力学为例介绍一些非线性系统所特有的现象，使得对读者在今后的学习和工作中有所帮助。全书共分九讲：绪论、相空间与轨线、平面上的动力系统、结构稳定与分支(岔)现象、突变、单自由度力学系统的自由振动、单自由度力学系统的强迫振动、吸引子与混沌，以及分形与分数维。

**图书在版编目（CIP）数据**

非线性力学导论 / 徐博侯，曲绍兴编著. —杭州：
浙江大学出版社，2012.3
ISBN 978-7-308-09686-7

Ⅰ.①非… Ⅱ.①徐… ②曲… Ⅲ.①非线性力学
Ⅳ.①O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 028823 号

**非线性力学导论**
徐博侯　曲绍兴 编著

---

| | |
|---|---|
| 责任编辑 | 樊晓燕 |
| 封面设计 | 刘依群 |
| 出版发行 | 浙江大学出版社<br>(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)<br>(网址：http://www.zjupress.com) |
| 排　　版 | 杭州中大图文设计有限公司 |
| 印　　刷 | 杭州日报报业集团盛元印务有限公司 |
| 开　　本 | 710mm×1000mm　1/16 |
| 印　　张 | 8.5 |
| 字　　数 | 140 千 |
| 版 印 次 | 2012 年 3 月第 1 版　2012 年 3 月第 1 次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 978-7-308-09686-7 |
| 定　　价 | 22.00 元 |

---


浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

# 前　言

严格地来说，我们在自然界、工程界、甚至在社会界所遇到的大部分问题都是非线性的，而线性问题不过是这些问题在平衡态附近的一个近似。线性问题比较简单，它满足迭加原理，所以只要把每种简单情形搞清楚，就很容易处理由这些简单情形所组合的复杂问题。此外，线性问题随维数增加其解(结构)的基本特性保持不变，只不过计算量增加。但非线性问题不一样，它会出现很多奇特的性质，如分支、突变、混沌、同步、分形、孤波等，而这些性质在线性系统中是不存在的。此外，当非线性系统的维数增加时，会出现很多新的性质，如神经网络系统，每个神经元都是一个简单的非线性单元，但当大量这样的单元联结在一起，就会产生很多匪夷所思的性质，譬如具备自组织、自学习功能等。

由于理工科大学生在本科阶段所接触的基本上是线性问题和仅适用于解决线性问题的工具(如线性代数和线性微分方程等)，即使偶然碰到所谓的非线性问题，大都是离平衡态不远的非线性问题，它们的性态和对应的线性问题相似，而它们的解可以在线性解基础上用摄动方法求得。因而，对于上面列举的现象往往会感到很奇怪，不知所措。而在科学研究和工程实践中，我们常常会遇到一些奇怪的现象，其中一部分可以用非线性问题的性质来解释。在这门课程中，我们主要是以力学为例介绍一些非线性系统所特有的现象，以期对读者在今后的学习和工作中有所帮助。

全书是这么安排的：第 1 讲给出几个简单例子，培养对非线性问题性质的感性认识；第 2 讲主要介绍常微分方程的稳定性理论；第 3 讲介绍平面上动力系统的奇点与极限环理论；第 4 讲介绍由结构稳定性引起的各类分支(岔)现象；第 5 讲介绍分支中的一个特殊现象——突变；第 6、7 讲通过三个典型的力学问题——单摆运动、Van del Pol 振子和 Duffing 方程进一步讨论前面所讲的理论；第 8 讲初步介绍非线性系统中吸

引子与混沌现象;第 9 讲介绍分形与分数维,以满足第 8 讲中所介绍的混沌吸引子理论所需。

本教材是在浙江大学力学系开设多年的“非线性力学”课程讲义的基础上修订得到的,适用于 32 学时的研究生课程。由于课程的性质、学时的限制,特别是编著者的学识所限,不足和错误之处在所难免,希望读者不吝提出宝贵意见。

作　者

于杭州浙江大学

2011 年 10 月

# 目 录

# 第1讲　绪　论

本课程的主要目的是通过力学介绍非线性系统所特有的现象。迄今为止，我们处理的极大多数问题是线性或接近线性（有时称为弱非线性）的问题。线性问题比较容易处理，再加上线性问题解的迭加原理成立，所以当问题的维数增加时，原则上很多定性是不会改变的。而非线性问题却不同，它可以出现很多线性系统中不可能出现的现象，并且当维数增加时会不断出现一些新的性质。譬如神经网络系统，每个神经元都是一个简单的非线性单元；当大量的这样单元联结在一起，就会出现很多新的性质。由于课时关系，我们只介绍最基本的非线性系统的特点，即便如此，其新的特点也会使人目不暇接。通过学习使读者在今后的学习和工作中可以运用这些知识去了解、研究某些看起来是奇特的现象。

非线性系统还可以分成两类：确定性系统和随机系统，它们的区分取决于系统的参数或激励是确定性的还是随机的。本课程中我们研究的是确定性系统，即所有的参数和激励是确定性的，它们通常由差分方程或微分方程来描述，说明怎样由过去决定现在，有时也称为**动力系统**。

在本书中为简便起见，有时在函数上加点"·"，表示对时间的导数，如 $\dot{f}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$；在函数上加撇"′"，表示对空间变量 $x$ 的导数，如 $g'=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$。

## 1.1　差分动力系统例

由差分方程描述的发展过程称为**差分动力系统**。

**例 1.1**　差分方程（Logistic 映射）

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n),\lambda\in(0,4],x_0\in[0,1] \tag{1.1}$$

由条件可知，$x_0 \in [0,1] \Rightarrow x_n \in [0,1]$①。$\lambda$ 称为系统的**控制参数**。

- **内在的随机性**

取 $\lambda=4$，对不同的 $x_0$（取 10 位有效数字），计算如下：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 0.1 | 0.10000001 | 0.10000002 |
| $x_1$ | 0.**36** | 0.**36000000**32 | 0.**36000000**64 |
| ⋮ | | | |
| $x_{10}$ | 0.**1478**365599 | 0.**1478**244449 | 0.**1478**125182 |
| ⋮ | | | |
| $x_{50}$ | *D*0.2775690810 | 0.4350573997 | 0.0550053776 |
| $x_{51}$ | 0.8020943862 | 0.9831298346 | 0.2079191442 |

对初值的敏感（依赖）性导致内在的随机性，即不稳定性。一般来说，上述问题中如果有 100 位二进制初值，经过 100 次迭代后就无任何初值信息保留下来。

- **不动点 · 稳定集合**

若 $x=f(x)$，则称 $x$ 为**不动点**，不动点有时也称为**定常解**或**平衡点**。在例 1.1 中有两个不动点：$x_1=0, x_2=1-\dfrac{1}{\lambda}$。

现在讨论不动点（附近）的**稳定性**。设 $\bar{x}=f(\bar{x})$ 是不动点，则

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\bar{x}| &= |f(x_n)-\bar{x}| \approx |f'(\bar{x})|\,|x_n-\bar{x}| \\ &\approx |f'(\bar{x})|^{n+1}\,|x_0-\bar{x}|\end{aligned}$$

所以当 $|f'(\bar{x})|<1$ 时，$x_n \to \bar{x}$；当 $|f'(\bar{x})|>1$ 时，$x_n \not\to \bar{x}$。

在例 1.1 中，$f'(x)=\lambda(1-2x)$，所以

$$f'(x_1)=\lambda, f'(x_2)=2-\lambda$$

当 $\lambda<1$ 时，$x_1=0$ 是稳定点；当 $\lambda>1$ 时，$x_1=0$ 是不稳定点；当 $1<\lambda<3$ 时，$x_2=1-\dfrac{1}{\lambda}$ 是稳定点；当 $\lambda<1$ 或 $\lambda>3$ 时，$x_2$ 是不稳定点。对于 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$，需要讨论高阶项。

系统的不稳定点在实际中难以观察到，而稳定的定常解可以从 $n\to\infty$ 得到。图 1.1 表示例 1.1 中的定常解，实线是稳定解，虚线是不稳定解。$\lambda$

---

① 由于 $x_0 \in [0,1]$，所以 $x_0 \geqslant 0, 1-x_0 \geqslant 0$，从而

$$x_0(1-x_0) \leqslant \frac{1}{4}[x_0+(1-x_0)]^2=\frac{1}{4} \Rightarrow (x_1 \in [0,1] \Rightarrow x_n \in [0,1], n=1,2,\cdots)$$

=1 处有尖点，同时从只有一个定常解变成两个定常解，其中一个稳定，另一个不稳定。

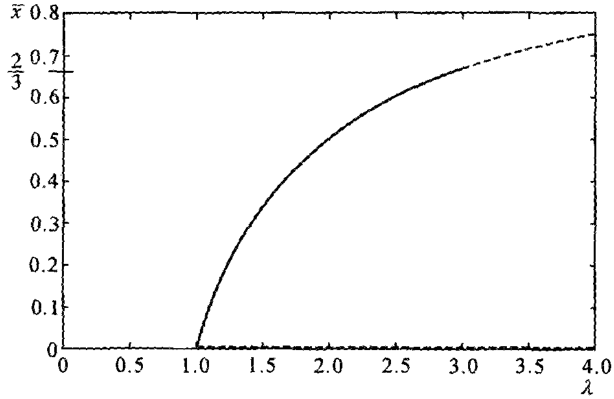


图 1.1 $\lambda$ 和定常解

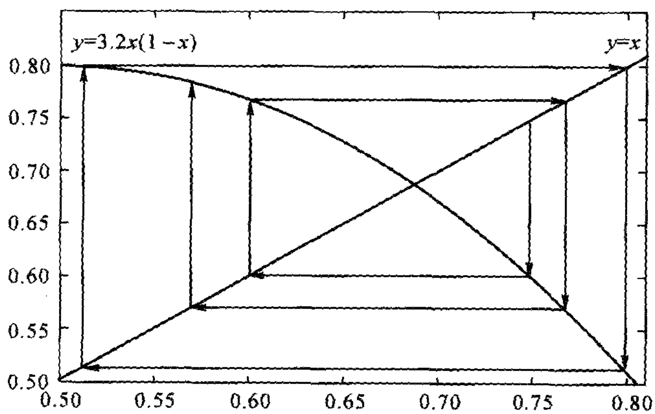


图 1.2 周期为 2 的解

- **周期解·分支**

当 $\lambda>3$ 时除了有不动点外还有**周期解**。不难验证，当 $\lambda=3.2$ 时，0.5130，0.7995，0.5130，0.7995，…是周期为 2 的解（如图 1.2 所示）。

为了求得周期为 2 的解，由

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \lambda x_{n+1}(1-x_{n+1}) \\ &= \lambda^2 x_n(1-x_n)[1-\lambda x_n(1-x_n)] = f[f(x_n)] \end{aligned} \tag{1.2}$$

从而周期为 2 的解 $\xi$ 是下述方程的定态解

$$\xi[1-\lambda(1-\xi)][1+\lambda(1-\xi)(1-\lambda\xi)]=0$$

这是四次代数方程，其中 $\xi[1-\lambda(1-\xi)]=0$ 对应的是原问题的不动点，而

$$[1+\lambda(1-\xi)(1-\lambda\xi)]=0 \tag{1.3}$$

对应的就是周期为 2 的解

$$\xi_{1,2}=\frac{1}{2\lambda}\left[1+\lambda\pm\sqrt{(1+\lambda)(-3+\lambda)}\right] \tag{1.4}$$

当 $\lambda=3.2$ 时，$\xi_{1,2}=0.5130, 0.7995$。

类似地，可以讨论周期为 2 的解的稳定性。可以证明，当

$$3<\lambda<1+\sqrt{6}=3.449$$

时，周期为 2 的解是稳定的。由于在上述区间中的定常解是不稳定的，所以对于任意非零初始值 $x_0\in[0,1]$，$x_n$ 趋向周期为 2 的解。

当 $1+\sqrt{6}<\lambda<3.544\cdots$ 时，$x_n$ 趋向周期为 4 的稳定解。取 $\lambda=3.5$，则周期为 4 的解为

$$\begin{array}{ccc} 0.3828 & \rightarrow & 0.8269 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 0.8750 & \leftarrow & 0.5009 \end{array}$$

这样，在 $\lambda=3, 1+\sqrt{6}, 3.544, \cdots$ 处出现解的周期倍化现象，这些点称为**分支点**，而

$$\lambda=3.569945673\cdots$$

为上述分支点的极限，此时解的周期为 $2^\infty$，即非周期的解。

- **混沌区**

当 $\lambda\in[3.5699\cdots,4]$ 时，一般来说其解是非周期的解，称为**混沌解**。但以上讨论的是限于有无周期为 $2^n$ 的解；事实上 $[3.5699\cdots,4]$ 中还会有其他周期的解，譬如 $(1+\sqrt{8}, 3.841499\cdots)$ 是周期为 3 的解存在的窗口，等等；这样的窗口有无穷多个，但没有覆盖整个 $[3.5699\cdots,4]$。

## 1.2 微分动力系统例

由微分方程描述的发展过程称为**微分动力系统**。

**例 1.2** Logistic 方程(生态方程)

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=an-bn^2(a,b>0) \tag{1.5}$$

可视为生物界的繁殖方程，解得

$$n=\frac{n_0\mathrm{e}^{at}}{1-\frac{b}{a}n_0+\frac{b}{a}n_0\mathrm{e}^{at}},\lim_{t\to\infty}n=\frac{a}{b}$$

● **定常解**

$$an-bn^2=0\Rightarrow n_1=0,n_2=\frac{a}{b}$$

● **稳定性**

$$n_1=0:\ \frac{\mathrm{d}(n-n_1)}{\mathrm{d}t}=a(n-n_1)-b(n-n_1)^2\approx a(n-n_1)$$

解得

$$n=n_0\mathrm{e}^{at}$$

因为 $a>0$，所以上述解是不稳定的。

$$n_2=\frac{a}{b}:\ \frac{\mathrm{d}(n-n_2)}{\mathrm{d}t}\approx f(n_2)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}\Big|_{n_2}(n-n_2)=-a(n-n_2)$$

解得

$$n=n_2+(n_0-n_2)\mathrm{e}^{-at}$$

是稳定的。

一般来说，若微分动力系统为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x) \tag{1.6}$$

当 $f(\bar{x})=0$ 为定常解，则 $f'(\bar{x})>0$ 定常解为不稳定，$f'(\bar{x})<0$ 为稳定。

**例 1.3** Landau 方程(湍流发展方程)

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\sigma A-\frac{1}{2}l|A|^2A,\quad \sigma>0,l>0 \tag{1.7}$$

这里 $A$ 为复振幅。对上式取共轭

$$\frac{\mathrm{d}\bar{A}}{\mathrm{d}t}=\sigma\bar{A}-\frac{1}{2}l|A|^2\bar{A},\quad \sigma>0,l>0 \tag{1.8}$$

将式(1.7) 乘$\bar{A}$、式(1.8)乘 $A$，然后相加，从而有

$$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t}=2\sigma|A|^2-l|A|^4$$

令 $x=|A|^2$，$2\sigma=a$，$l=b$，即得例 1.2 中的 Logistic 方程。

现在考虑 $\sigma$、$l$ 可变号，即 $a$、$b$ 可变号的情形。容易得到，方程的定常解

及相应导数为

$$x_1=0,f'(x_1)=a;\quad x_2=\frac{a}{b},f'(x_2)=-a$$

图 1.3 显示了相应定常解的分岔现象。

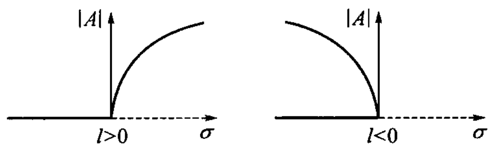


图 1.3　定常解的分岔

**例 1.4**　Lotka-Volttera 方程(化学催化、大鱼吃小鱼)

这是二阶常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dN_1}{dt}=\alpha_1 N_1-\beta_1 N_1 N_2\\[2mm] \dfrac{dN_2}{dt}=-\alpha_2 N_2+\beta_2 N_1 N_2\end{cases},\quad \alpha_1,\ \alpha_2>0 \tag{1.9}$$

其定常解为零解和 $N_1^*=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$,$N_2^*=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$,共两组解。

考虑非零定常解的稳定性,设

$$N_i'=N_i-N_i^*,i=1,2$$

代入原方程并略去高阶量

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}N_1'\\N_2'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\alpha_2\\ \alpha_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}N_1'\\N_2'\end{Bmatrix}$$

特征值为 $\lambda=\pm\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,\mathrm{i}$。当 $t=0:N'_1=A,N'_2=0$ 时

$$\begin{cases}N_1'=A\cos\omega_0 t\\ N_2'=A\omega_0\sin\omega_0 t\end{cases},\quad \omega_0=\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$$

表示在($N_1^*$,$N_2^*$)附近的一条闭合曲线(椭圆)。

其准确解可从下列方程得到

$$\frac{dN_2}{dN_1}=-\frac{\alpha_2 N_2\left(1-\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}N_1\right)}{\alpha_1 N_1\left(1-\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}N_2\right)}$$

## 1.3 非线性问题的主要特点

(1) 迭加原理不再成立。

(2) 解的唯一性破坏，对参数具有临界依赖性。

(3) 对称原因可以引起非对称的结果(屈曲、Karman 涡街)。

(4) 不可预测性(内在随机性、混沌)。

由于本课程内容主要是有限自由度力学系统中的非线性问题，所以研究对象限于常微分动力系统和差分动力系统。

## 习题

1.1 在例 1.1 中，讨论 $\lambda=1,3$ 时不动点的稳定性。

1.2 在例 1.1 中，证明：当 $3<\lambda<1+\sqrt{6}=3.449$ 时，周期为 2 的解是稳定的。

1.3 证明：若微分动力系统为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)$$

当 $f(\bar{x})=0$ 为定态解，则 $f'(\bar{x})>0$ 为不稳定，$f'(\bar{x})<0$ 为稳定。与差分动力系统稳定性条件比较。

# 第2讲　相空间与轨线·解的稳定性

由法国数学家庞加莱(Poincare)开创的微分方程定性理论，不借助于对微分方程的求解，而是从微分方程本身的一些特点来推断解的某些性质(如周期性、稳定性等)，成为研究非线性微分方程的重要手段。近年来，人们对微分方程某一解在初值或参数扰动下的稳定性(即Lyapunov稳定性)以及这种稳定性遭到破坏时所可能出现的混沌(chaos)现象引起了兴趣，关心在一定范围内解族的拓扑结构在微分方程的扰动下的稳定性(即结构稳定性)，以及这种稳定性破坏后出现的分支(bifurcation)现象。

## 2.1　相空间

设一个运动质点 $M$ 在时刻 $t$ 的 $n$ 维空间坐标为 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，该点的速度为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}} \tag{2.1}$$

如果速度只与坐标有关而与时刻无关，即 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$，称为**自治微分方程**。如果速度还与时刻有关，称为**非自治微分方程**。

如果式(2.1)满足微分方程解的存在唯一性条件，则任给初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，其解是唯一确定的

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) \tag{2.2}$$

它描述了质点 $M$ 在 $t_0$ 时刻经过点 $\boldsymbol{x}_0$ 的运动。$\boldsymbol{x}$ 取值的空间 $\boldsymbol{R}^n$ 称为相空间，$(t,\boldsymbol{x})$ 取值的空间 $\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^n$ 称为增广相空间。方程(2.1)定义了一个相空间上的**向量场**，而解(2.2)在增广相空间中的图象是一条通过 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 且每个时刻其在相空间上投影与向量场相吻合(切)的光滑曲线(积分曲线)。

对于自治微分方程

$$\boldsymbol{v}=[v_1(x),v_2(x),\cdots,v_n(x)]^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$