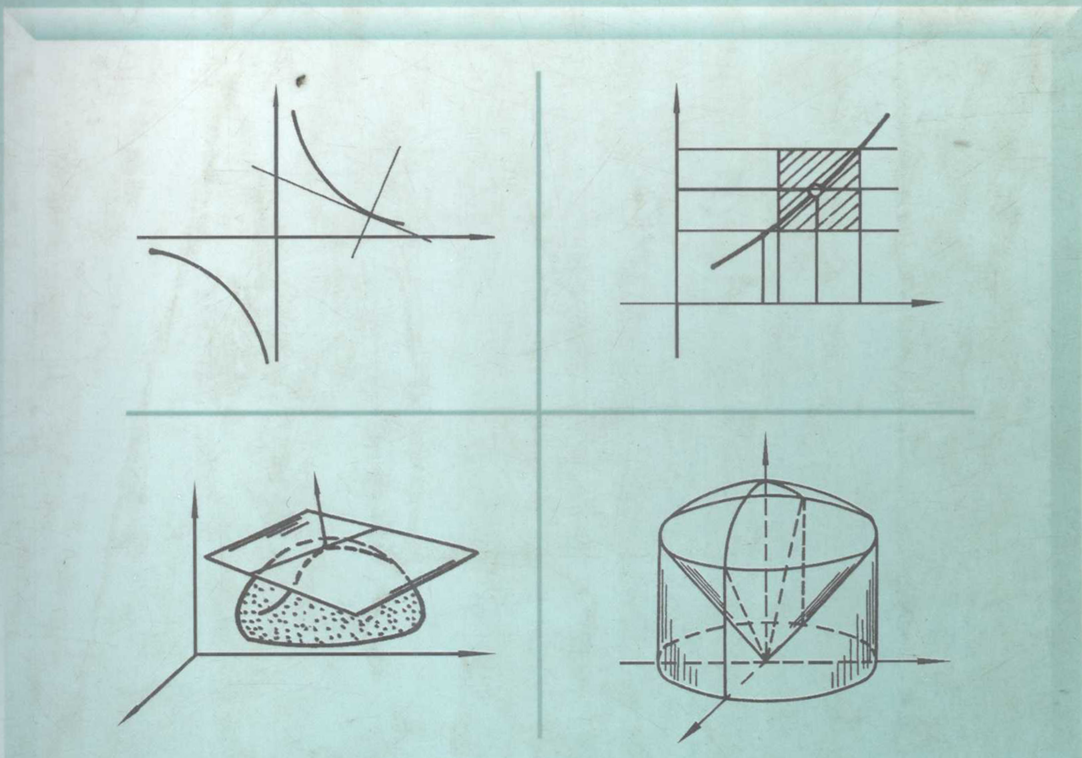
《高等数学》

（修订本）

习题详解·释疑·指导

GAODENG SHUXUE (SIUDINGBEN)
XITI XIANGJIE · SHIYI · ZHIDAO

潘鼎坤



西安交通大学出版社

内容简介

本书是陆庆乐教授编写的全国高等教育自学考试教材《高等数学》(修订本)的配套读物．作者将教材中的习题做了详细解答．书中解题思路清晰，说理详细，指明解题所依据的定理或公式，对读者阅读中可能产生的疑问都给出了解答，并对各类典型题解法及时给以分析、归纳、指导，让读者能抓住重点，牢固掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，尽量使读者可以无师自学，去除解题过程中的种种困难．书中对读者还给出了学习建议，所以本书兼有自学指导书的功能．书末附有试题选编及解答，以便读者了解考试的重点、题型、试卷的题量及深浅程度．

本书是自学考试人员的良师益友，也是高等工科院校、职工大学、函授大学、电视大学学生的极好教学辅导书．大专班也可使用．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(修订本)习题详解·释疑·指导 / 潘鼎坤．西安:西安交通大学出版社，2000.2

ISBN 7-5605-0903-7

Ⅰ．高... Ⅱ．潘... Ⅲ．高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 13100 号

出　　版:西安交通大学出版社

(地址:西安市兴庆南路 25 号　邮政编码:710049　电话:(029)2668316)

发　　行:西安交通大学出版社

各地新华书店经销

印　　制:陕西省轻工印刷厂

开本:787 mm×1 092 mm　1/16

印张:29

字数:900 千字

版次:2000 年 3 月第 1 版

印次:2000 年 10 月第 3 次印刷

定价:35.00 元

编者的话

近年，笔者依据陆庆乐教授编著的《高等数学》(西安交通大学出版社出版)一书为参加自学考试的学生讲授微积分，深知此书说理严谨、细密，条理透彻；重视基本概念及其在实际中的应用；经常设想自学者困难所在，多方启迪、谆谆善诱，引导读者深入理解。这本教材是陆庆乐教授 50 多年教学经验的结晶，很受读者欢迎，深得同行赞许。但由于目前许多自学者缺乏教师指导，且程度不一，情况各有不同，加之有些题较难，不少读者反映能顺利读懂教材，但不能顺利答题。他们渴望有一本解答该书上习题疑难的书，以帮助顺利地掌握这门课程。因为这本教材里的习题有一个显著的特点，就是属于基本概念、基本理论方面的题很不少，初次学习微积分的人对于这些题，一般都难于解答清楚，即使勉强作了解答，仍疑虑重重，心中没底。笔者就是想满足读者的这些要求，尽绵薄之力，编写了这本书。

这是一本习题详解书。对陆庆乐教授编著的《高等数学》上的每道习题都尽可能详尽地做了解答，很少有跳步，凡需要指出依据或需要作点解释的地方都在旁注中指出。希望读者阅读时，不再存在障碍，其中不少题还指出多种解答途径，以培养读者灵活解题的能力(以后说教材第几页就是指陆教授编的这本教材(修订本)的页码)。

这又是一本释疑书。书中有不少单项选择题，是非题，判断题，问答题……属于基本概念、基本理论方面的题。对于这些题，笔者作了不厌其烦的解释。如单项选择题，共有四个答案供读者选择，笔者对每一个答案都作了分析：若是错误答案，就分析它错在哪里；若是正确答案，就说明正确的依据。对一些填空题，也都给出推导过程。对是非题、判断题……亦都类似处理。并且在演算过程中，对读者可能产生疑问的地方，笔者也都尽可能在正文或旁注中给出说明。

原教材对每一章内容的学习已作了指导。本书对每一节的习题，再作一点分析：哪些题属于重点内容；哪些题必须熟练掌握；哪些是常见典型考试题；哪些知识点是考试的热点；哪些题较难，若时间不够，初读时可不妨暂时放一下……当然，这都是根据笔者近 50 年的教学经验作出的分析判断，不可避免地带有主观性和片面性，仅供读者学习时参考。但笔者相信，对读者提供这样一些看法会有利于初学者更好地掌握教材的重点和课程的关键部位，便于区分出哪些是西瓜、哪些是芝麻。另一方面，在绝大多数章的开头都有简单的几句引言，说明该章习题内容在整个课程中的地位或各章相互间的联系，引导读者对整个微积分作一个鸟瞰。所以，这不仅是一本解题、释疑的书，也是想献给读者如何学好这门课的指导书。

虽然笔者尽可能为读者解答疑难，但望读者能正确使用本书。建议读者首先熟读教材，看懂教材上的例题，然后自己动手做习题，认真思考探索。若能做出来，再与本书解答对比一下，看看谁对谁错，哪个方法好一点。若经过再三思考，仍做不出，这时再看本题解。即使此时，也不要一口气看完一道题解，最好只看一两步，自己继续思考，看看能否接着做下去。有些较难的题，看完题解后，也要求自己独立地重做一下，看看真的会了没有。坚持这样地做题—看题

—做题，反复磨练自己，必能逐步提高分析问题和解决问题的能力。

由于本书已刊载题目全文，且凡本书解释中指明引用原教材的公式、定义、定理或图形均抄录汇编于书末的附录中，故可独立阅读．所以对于一般选读高等数学这门课程的青年来说，不管是哪个专业的自考生、函授生、电大生或普通高校的一年级大学生，即使用的是别的教材，相信本书对他们也能助一臂之力．

在编写本书过程中，笔者参阅了陆庆乐教授、陆诗娣教授合编的《高等数学习题详解》(高等教育出版社出版)一书，得益匪浅。有的应用题的解答曾得到了高礼魁教授、南忠俊副教授、侯占民副教授、曲小刚副教授的帮助，本书原稿所有的底图都是西安建筑科技大学王翠萍讲师帮助画的。陕西省考试管理中心刁继英老师还鼎力襄助，提供了近年四份高等教育自学考试高等数学试卷(本科、大专各两份)及题解，笔者对以上所有的老师表示衷心的感谢。

特别让笔者感激的是：西安交通大学龚冬保教授以对读者高度负责的精神，在百忙中十分仔细地审阅了本书的原稿，纠正了不少差错，提出了许多宝贵意见，对提高本书质量起了很大的作用。

由于笔者水平有限，疏漏差错，仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教，以便改正并不胜感激之至。

潘鼎坤写于西安

1999.4

目　　录

第 5 章　不定积分法

第 6 章　定积分及其应用

第 7 章　向量代数与空间解析几何

第 8 章　多元函数微分学

第 9 章　多元函数积分学

第 10 章　常微分方程

第1章 函数

习题 1-1 函数概念

函数概念是高等数学中十分重要的基本概念之一，函数概念的两个要素是它的定义域和自变量与因变量之间的对应法则．这个习题主要让读者学习：如何用各种不同的方法表示出变量的变化区域，由给出的对应法则会计算出指定点的函数值，并要求读者能指出各函数的定义域．

1. 把下列各不等式表示的变域用区间的记号来表示，并在数轴上画出这些变域．

同一变域可用三种不同的方法表示：不等式、区间及数轴上的线段．

方括号表示包含区间的端点，圆括号表示区间的端点不被包含，在数轴上的实点表示这点被包含，空心点表示这点不被包含．

(1) $-3\leqslant x\leqslant 1$.

[解] $-3\leqslant x\leqslant 1$ 用区间的记号表示为 $[-3,1]$，在数轴上画出来如图 1-1 所示．

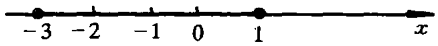


图 1-1

(2) $-3\leqslant x<1$.

[解] $-3\leqslant x<1$ 用区间的记号表示为 $[-3,1)$，在数轴上画出来如图 1-2 所示．

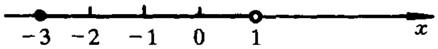


图 1-2

(3) $-3<x<1$.

[解] $-3<x<1$ 用区间的记号表示为 $(-3,1)$，在数轴上画出来如图 1-3 所示．

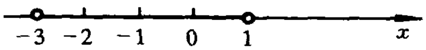


图 1-3

(4) $|x|\leqslant 1$.

[解] $|x|\leqslant 1$ 即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，用区间的记号表示为 $[-1,1]$，在数轴上画出来如图 1-4 所示．

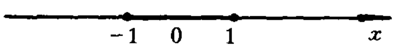


图 1-4

注意如何去绝对值符号？习题(4)很重要．

(5) $|x|>2$.

[解] $|x|>2$ 即 $x<-2$ 或 $x>2$，用区间的记号表示为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，在数轴上画出来如图 1-5 所示．

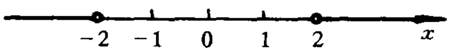


图 1-5

注意这个“或”字，不能用“和”字；$\cup$ 是集合论中并集的符号，并集是用“或”字表达的．

(6) $-1\leqslant x<+\infty$.

[解] $-1\leqslant x<+\infty$ 用区间的记号表示为 $[-1,+\infty)$，在数轴上画出来如图 1-6 所示．

图 1-6

2. 用绝对值不等式来表示下列各区间：

(1) $(-1,+1)$； (2) $(-2,4)$； (3) $(1,4)$； (4) $(-\delta,\delta)$； (5) $(x_0-\delta, x_0+\delta)$； (6) $(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$[用一个绝对值不等式表示].

[解] 用绝对值不等式表示一个区间的方法是先求出区间的中心点 x_0，再求出区间的长的一半 δ，则该开区间便可表示为$|x-x_0|<\delta$.

区间长的一半叫做该区间的半径，区间的中心点叫做区间的中心，区间(a,b)的中心$=(a+b)/2$，区间半径$=(b-a)/2$.

(1) $(-1,1)$可用绝对值表示为$|x-0|=|x|<1$.

(2) 先把$(-2,4)$这个区间在数轴上画出来，便知它的中心在点 1 处，区间的半径是$\dfrac{4-(-2)}{2}=3$，则可用绝对值不等式$|x-1|<3$表示该区间(如图 1-7 所示).

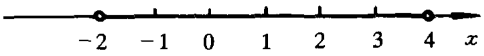


图 1-7

区间中心$=\dfrac{4+(-2)}{2}=1$.

(3) $(1,4)$在数轴上表示时它的中心在点 2.5 处，区间的半径为 1.5，所以这个区间用绝对值不等式表示时为$\left|x-\dfrac{5}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$.

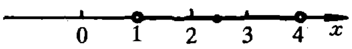


图 1-8

区间中心$=(1+4)/2$.
区间半径$=(4-1)/2$.

(4) $(-\delta,\delta)$的区间中心是$\dfrac{\delta+(-\delta)}{2}=0$，区间半径是$\dfrac{\delta-(-\delta)}{2}=\delta$，$(-\delta,\delta)$可用绝对值不等式表示为$|x|<\delta$.

这是原点的 δ 邻区. 有不少书称邻区为邻域.

(5) $(x_0-\delta,x_0+\delta)$的区间中心是$\dfrac{x_0-\delta+x_0+\delta}{2}=x_0$，区间半径是$\dfrac{x_0+\delta-(x_0-\delta)}{2}=\delta$，这个区间用绝对值不等式表示为$|x-x_0|<\delta$.

这区间叫点 x_0 的 δ 邻区.

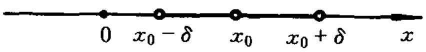


图 1-9

(6) $(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$在数轴上表示为图 1-9，它是 x_0 的 δ 去心邻区，所以只要把(5)题的不等式稍加修改即可，亦即可用一个绝对值不等式表示为 $0<|x-x_0|<\delta$.

$|x-x_0|>0$ 即表示 $x\neq x_0$，故点 x_0 从区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中去掉.

3. 不以开区间(1,3)为邻区的点是○.

① 1.1　　② 2　　③ 2.5　　④ 3.001

[解] 点 1.1、点 2、点 2.5 都在区间(1,3)之内，所以开区间(1,3)是这些点的邻区，只有点 3.001 不被区间(1,3)所包含，故开区间(1,3)不是点 3.001 的邻区，答案是④.

请读者仔细阅读教材第 2 页中 x_0 的 ε 邻区的定义，并比较它与 x_0 的邻区定义的不同之处.

4. 试用绝对值不等式表示 3 的$\dfrac{1}{2}$去心邻区.

[解] $\dfrac{1}{2}$是 3 的邻区的半径，且把点 3 从区间$\left(3-\dfrac{1}{2},3+\dfrac{1}{2}\right)$中剔除出去，由题 2 中的(6)题知，用绝对值不等式表示则为 $0<|x-3|<\dfrac{1}{2}$.

邻区与去心邻区都是重要概念，要通过解答3,4二题掌握这两个概念.

5. 试计算下列各函数在各指定点处的值：

(1) 设 $f(x)=x^2-3x+7$，求 $f(x+h)$，$f(\frac{1}{h})(h\neq0)$，$f(2a)$，$f(-2)$.

[解] 设 $f(x)=x^2-3x+7$，把其中的 x 都用$x+h$ 代入得：

$$f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)+7$$

$$=x^2+2hx+h^2-3x-3h+7=x^2+(2h-3)x+h^2-3h+7.$$

同次幂的系数合并.

同理可得：

$f\left(\frac{1}{h}\right)=\left(\frac{1}{h}\right)^2-3\left(\frac{1}{h}\right)+7=\frac{1}{h^2}-\frac{3}{h}+7=\frac{1}{h^2}(1-3h+7h^2)$;

$f(2a)=(2a)^2-3(2a)+7=4a^2-6a+7$;

$f(-2)=(-2)^2-3(-2)+7=4+6+7=17.$

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$，$a>1$，求 $f(1)$，$f\left(\frac{a}{2}\right)$，$f(2a)$. 只要把 $f(x)$中的 x 分别以 $1,\frac{a}{2},2a$ 代入即可，亦即

$$f(1)=1-\frac{a-1}{\sqrt{a^2-2a+1}}=1-\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2}}=1-1=0;$$

$f(x)$中的 x 用 1 代入，并注意$\sqrt{x^2}=|x|$.

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\left[1-\frac{a-\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2-2a\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right]=\frac{4}{a^2}\left[1-\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right]$$

$$=\frac{4}{a^2}(1-1)=0;$$

$f(x)$中的 x 用$\frac{a}{2}$代入.

$$f(2a)=\frac{1}{(2a)^2}\left(1-\frac{a-2a}{\sqrt{a^2-2a\cdot2a+(2a)^2}}\right)=\frac{1}{4a^2}\left(1-\frac{-a}{\sqrt{a^2}}\right)=\frac{1}{2a^2}.$$

$f(x)$中的 x 用 $2a$ 代入.

另法： 由 $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{|a-x|}\right)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{x^2}(1-1)\\ \frac{1}{x^2}(1-(-1))\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{当 } x<a\\ \frac{2}{x^2}, & \text{当 } x>a\end{cases},$$

$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x<0\end{cases}.$

便知　$f(1)=0$，　$f\left(\frac{a}{2}\right)=0$，　$f(2a)=\frac{2}{4a^2}=\frac{1}{2a^2}.$

6. 如果 $g(x)=\sqrt{x}$，证明

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

[证] 在 $g(x)$中分别用 $x_0+\Delta x$，x_0 代入，等式左端得

此处 x_0，$x_0+\Delta x$ 皆为正数，$\Delta x\neq0$.

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

7. 指出下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{5-2x}+\frac{1}{x}.$

[解] 当一个函数的定义域没有具体给出时，总是指它的自然定义域，也就

是使解析式子有确定数值的实数的全体.

今 $y=\sqrt{5-2x}+\frac{1}{x}$.这个函数只有当 $5-2x\geqslant0$(即 $x\leqslant\frac{5}{2}$)且 $x\neq0$ 时才有意义,所以它的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,\frac{5}{2}]$.

偶次根式函数的定义域是使根号内取非负值的所有实数.

(2) $y=\sqrt{1-|x|}$.

[解] 这个函数只有当 $1-|x|\geqslant0$(即 $|x|\leqslant1$)时才有意义,所以它的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant1$,即 $[-1,1]$.

(3) $y=\frac{1}{x^2-x}$.

[解] 这个函数只有当 $x^2-x\neq0$(即 $x(x-1)\neq0$)时才有意义.所以,它的定义域是去掉 $x=0$ 和 $x=1$ 两数之外的所有实数,亦即 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

有理函数的定义域是使分母不为零的所有实数.

(4) $y=\frac{1}{|x|-x}$.

[解] 当 $x\geqslant0$ 时 $|x|-x=x-x\equiv0$,该式无意义;所以只有当 $x<0$ 时,$|x|-x=-x-x=-2x\neq0$,该式有意义,这函数的定义域是 $(-\infty,0)$.

(5) $y=\lg x+\frac{1}{\tan x}$.

[解] 当 $x\leqslant0$ 时,$\lg x$ 无意义;当 $x=\frac{n\pi}{2}$ 时,$\frac{1}{\tan x}$ 无意义,其中 $n=0,1,2,\cdots$.故这个函数的定义域是 $x>0$ 且 $x\neq\frac{n\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$.

对数函数的定义域是使其真数部分为正的所有实数.

$\tan(n+\frac{1}{2})\pi=\infty$,

$\tan n\pi=0$

$(n=0,1,2,\cdots)$.

(6) $y=\frac{1}{x}\lg\frac{1-x}{1+x}$.

[解] 只有当 $-1<x<1$ 时,真数部分 $\frac{1-x}{1+x}>0$,所以这个函数的定义域是 $(-1,0)\cup(0,1)$,亦即 $0<|x|<1$.

8. 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & -4\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x<2,\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant4\end{cases}$

作出这函数的图形,并求 $f(-2),f(0),f(1),f(3.95)$**的值.**

[解] 这函数的图形如图 1-10 所示.

$f(-2)=-2$;

$f(0)=2$;

$f(1)=2$;

$f(3.95)=4-3.95=0.05$.

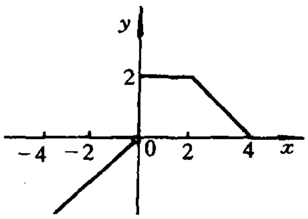


图 1-10

在不同的区间内给出 x 与 y 之间数值对应的不同关系式,称为分段函数.

9. 设 $y=\sin x$,**证明:**$\Delta y=2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$.

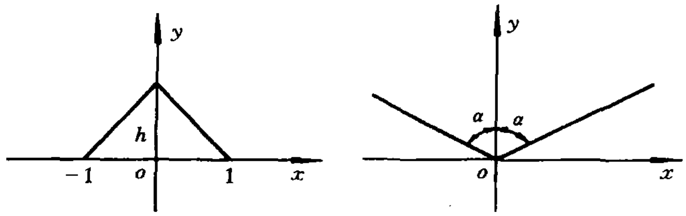
[证] $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$

$=2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$.

$\sin\alpha-\sin\beta$

$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

10. 写出下列图形所表示的函数:



(1) (2)

图 1-11

在不同的区间内不同的图形给出不同的解析表示式.

[解] (1) 过$(-1,0)$,$(0,h)$两点的直线方程为 $y=hx+h$,过$(1,0)$,$(0,h)$两点的直线方程为 $y=-hx+h$,所以表示该图形的函数是

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant -1\\ h(x+1), & -1\leqslant x\leqslant 0\\ h(-x+1), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases},$$

亦即
$$y=\begin{cases}h(|x|+1), & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}.$$

(2) 右半平面中的直线斜率为 $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$,所以它的方程为

$$y=x\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=x\cot\alpha.$$

左半平面中的直线斜率为 $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$,所以它的方程为 $y=-x\cot\alpha$,于是表示这整个图形的函数为

$$y=\begin{cases}-x\cot\alpha, & -\infty<x\leqslant 0\\ x\cot\alpha, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases},$$

亦即 $y=|x|\cot\alpha,\quad -\infty<x<+\infty.$

[指导] 通过习题 1-1,同学们要熟练掌握区间记号,熟练掌握用绝对值不等式表示某些区间,能准确计算出各函数在各指定点的值,能准确指出各函数的定义域,其中 1,2,5,7 等题十分重要,与以后的学习内容关系十分密切,特别要注意的是,题 7 是常见的考试题题型,指出函数的定义域经常是考试的热点之一.

哪些题要特别注意?这一节的考试热点在哪里?考试题型将是怎样?

习题 1-2 函数的简单性态

1. 验证下列各函数是单调函数:

(1) x^3,$(-\infty,+\infty)$.

[证] 设 $x_2>x_1$,则

$$\begin{aligned}x_2^3-x_1^3&=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)\\&=(x_2-x_1)\left[(x_2+\frac{1}{2}x_1)^2-\frac{1}{4}x_1^2+x_1^2\right]\\&=(x_2-x_1)\left[(x_2+\frac{1}{2}x_1)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0.\end{aligned}$$

因设 $x_2>x_1$,故 x_1,x_2 不全为零,所以必有$(x_2+\frac{1}{2}x_1)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0$.

可见 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内为单调增函数,因为对于$(-\infty,+\infty)$内任何两

这是单调增函数的定

个值 x_1 与 x_2，在 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $x_1^3<x_2^3$ 成立.

义，要熟记.

(2) $\cos x$，$(0,\pi)$.

[证] $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，但在 $(0,\pi)$ 内为单调减函数，验证如下：

设 x_1，x_2 是 $(0,\pi)$ 内任意两个值，并设 $x_1<x_2$. 于是 $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi$，$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\pi$，$\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}<0$，即当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时 $\cos x_2<\cos x_1$. 所以 $\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 内是单调减函数.

因当 $0<\alpha<\pi$ 时，$\sin\alpha>0$.

根据单调减函数定义.

(3) $\sqrt{x}$，$(0,+\infty)$.

[证] 对于 $(0,+\infty)$ 内任意两个数值 x_1，x_2，并设 $x_1<x_2$. 于是

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$$

$$=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}>0\quad \text{(因分子、分母都大于零)}.$$

分子分母同乘以 $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}$.

所以，当 $0<x_1<x_2$ 时，有 $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$，故 $\sqrt{x_2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增函数.

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在包含原点的区间内是否有界?

[答] 无界. 因为对于任意大正数 M，当 x 在区间 $\left(-\frac{1}{\sqrt{M}},\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ 内但 $x\neq 0$ 时，即当 $0<|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ 时，便有 $0<x^2<\frac{1}{M}$，$\frac{1}{x^2}>M$. 故函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在包含原点的区间内不是有界函数.

注意任意大三字.

3. 证明 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

[证] 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意 x，$|f(x)|=\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$，所以 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为有界函数.

4. 如果 $f(x)$ 在区间 I 满足不等式：$f(x)\leqslant M$，那末称 $f(x)$ 在 I 为上有界；如果 $f(x)$ 在区间 I 满足不等式：$f(x)\geqslant m$，那末称 $f(x)$ 在 I 为下有界（M，m 均为常数）. 试证，函数在区间 I 有界的充分与必要条件是：函数在 I 既上有界又下有界.

M 叫做 $f(x)$ 在 I 的上界，m 叫做 $f(x)$ 在 I 的下界，上界未必为正数，下界未必为负数.

[证] 先证必要性.

若 $f(x)$ 在区间 I 有界，由有界函数的定义，存在一个与 x 无关的常数 M，对区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$，亦即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，所以 $f(x)$ 在 I 既上有界（因 $f(x)\leqslant M$），又下有界（$-M\leqslant f(x)$，这里的 $-M$ 可看作定义中的 m）.

有界函数定义中的这个 M 必为正数.

再证充分性.

若函数 $f(x)$ 在 I 既上有界又下有界，则分别存在常数 M，m，对于 I 的所有 x 总有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 今取 $M_1=\max\{|M|,|m|\}$，必有 $-M_1\leqslant m\leqslant f(x)\leqslant M\leqslant M_1$，亦即对 I 的所有 x 总有 $-M_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$，即 $|f(x)|\leqslant M_1$.

这个 M_1 就是有界函数定义中的 M.

注：若条件 A 成立，导致条件 B 必成立，条件 A 就称作条件 B 成立的充分

条件,条件 B 称作条件 A 的必要条件.

5. 举例说明,单调增函数是否一定无界?

[答] 不一定无界.如 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为单调增函数,但对任一实数 x 总有 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$,它是一个有界函数.又如 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上为一单调增函数,它在 $[0,1]$ 上也是一个有界函数.

6. 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既不是偶函数也不是奇函数.

在 $(-a,a)$ 上的奇函数的定义是:$f(-x)=-f(x)$.偶函数的定义是:$f(-x)=f(x)$.

(1) $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

[答] 因 $\tan(-x)=-\tan x$ 故 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 是奇函数.

(2) $y=\frac{1}{1+x^2}(-3,4)$.

[答] 因为函数定义域 $(-3,4)$ 不是与原点对称的区间,所以 $y=\frac{1}{1+x^2}(-3,4)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(3) $y=|x-1|$.

[答] $|-x-1|\neq|x-1|$,$|-x-1|\neq-|x-1|$,故 $y=|x-1|$ 既不是奇函数也不是偶函数.(说明,这里没有明显写出函数定义域,即意为函数自然定义域.)

$y=|x-1|$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) $f(x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$.

[答] $f(-x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}=f(x)$,故 $f(x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

(5) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

[答]
$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$
故 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

$\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,真值部分的分子分母同乘以 $\sqrt{x^2+1}+x$.

(6) $f(x)=(x^2-x)/(x-1)$.

[答] $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义,而在 $x=-1$ 处却有定义,可见 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 关于原点不对称,故 $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数.或许有读者会说:$f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}\overset{?}{=}x$,$f(x)=x$ 不是奇函数吗?$f(x)=x$ 是奇函数,但 x 与 $\frac{x^2-x}{x-1}$ 不恒等,$f(x)=x$ 与 $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ 是两个不同的函数,这是由于两个函数的定义域不同.

望读者特别注意(2),(3),(6)三小题.

只有当 $x\neq1$ 时,问号两端才相等.

7. $\sin^2x$ 是不是周期函数?如果是,求它的周期.

[答] 因 $\sin^2(x+\pi)=[-\sin x]^2=\sin^2x$,故 $\sin^2x$ 是周期函数,π 是它的周期.那末,有没有更小的正数是 $\sin^2x$ 的周期呢?设其为 l,由周期函数的定义 $f(x+l)-f(x)\equiv0$.现

$$\sin^2(x+l)-\sin^2 x=[\sin(x+l)-\sin x]\cdot[\sin(x+l)+\sin x]$$
$$=2\cos(x+\frac{l}{2})\sin\frac{l}{2}\cdot 2\sin(x+\frac{l}{2})\cos\frac{l}{2}$$
$$=\sin(2x+l)\sin l\equiv 0$$

使等式对任意 x 成立的最小正数为 $l=\pi$，故 $\sin^2 x$ 的最小周期即是 π.

另法： $\sin^2 x=\frac{1-\cos^2 x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$，可看出它是以 π 为周期的周期函数.

$\sin\alpha+\sin\beta$
$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
$\sin\alpha-\sin\beta$
$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

8. 下列函数中不是周期函数的是○.

① $|\sin x|$ ② $\cos^2 x$ ③ $x\tan x$ ④ $2\cos(\pi x+1)$

[答] $|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$，故 $|\sin x|$ 是周期函数.

$\cos^2(x+\pi)=[-\cos x]^2=\cos^2 x$，故 $\cos^2 x$ 为周期函数.

$2\cos[\pi(x+2)+1]=2\cos[\pi x+1+2\pi]=2\cos(\pi x+1)$，故 $2\cos(\pi x+1)$ 是周期函数.

$x\tan x$ 是非周期函数 x 与以 π 为周期的周期函数的乘积，故它必是非周期函数. 现用反证法证明如下：首先注意 $f(x)=x\tan x$ 的定义域是 $n\pi-\frac{\pi}{2}<x<n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 若 $f(x)=x\tan x$ 为以正数 l 为周期的周期函数，则对于函数定义域内任一 x 值总成立等式 $(x+l)\tan(x+l)=x\tan x$，于是取 $x=0$ 时亦必成立，得 $l\tan l=0$. 在含有 $x=0$ 及其相邻区间内能使 $l\tan l=0$ 成立的最小正数只有 $l=\pi$，但 $(x+\pi)\tan(x+\pi)=(x+\pi)\tan x=x\tan x+\pi\tan x\neq x\tan x$，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，故 $x\tan x$ 不是周期函数.

由上可知：本题应选③.

周期函数的定义是对 $f(x)$ 的定义域中的任一 x 有等式 $f(x+l)=f(x)$ 成立.

对于学习数学有困难的读者，7 题中 π 是最小正周期的证明，以及本题非周期性的证明均可略去不看.

9. 函数 $f(x)=2^{-x}\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 内是○.

①偶函数 ②单调函数 ③有界的 ④奇函数

[答] 函数 $f(x)=e^{-x}\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 的定义域与原点不对称，故它既不是奇函数也不是偶函数. $f(0)=1$，$f(\frac{\pi}{2})=0$，$f(2\pi)=e^{-2\pi}>0$. 可见 $f(x)=e^{-x}\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 内有时增有时减，因此它不是单调函数. 由于 $|f(x)|=|e^{-x}\cos x|\leqslant e^{-x}\leqslant 1(x\in[0,+\infty))$，故 $e^{-x}\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 内是有界的. 所以，本题应选③.

读者要熟记奇函数、偶函数、有界函数、单调函数的定义.

10. 函数 $f(x)=C$(常数)，$(-\infty,+\infty)$ 是不是周期函数?

[答] 因对任何正数 l 都有 $f(x+l)=C=f(x)$，故 $f(x)=C,(-\infty,+\infty)$ 是以任何正数 l 为周期的周期函数.

[指导] 在微积分学中经常要判断所处理的函数是否具有单调性、周期性、奇偶性、有界性等性质，也要经常研究单调函数、周期函数、有界函数、奇(偶)函数的各自一些特性. 这些函数性态虽很简单，但很重要，很有用，要把它们的定义记清楚. 这个习题中的题，几乎全是根据定义来判断. 考题中常会出现像 1,6,8,9 等类型的题.

熟记定义在微积分学习中的重要性.

习题 1-3 反函数和复合函数

1. 求下列各函数的反函数：

(1) $y=10^x-1$.

[解] 由 $y=10^x-1$，其中 $x\in(-\infty,+\infty)$，解得 $x=\log_{10}(y+1)$，亦即 $y=10^x-1$ 的反函数为 $y=\lg(x+1)$，$-1<x<+\infty$.

(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

[解] 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$解得 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$，$x=\log_2\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$，其中$\dfrac{y}{1-y}>0$. 这就是 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数，习惯上改写为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，$0<x<1$.

(3) $y=\log_{10}(x+\sqrt{x^2-1})$.

[解] $y=\log_{10}(x+\sqrt{x^2-1})$的定义域是 $x\geqslant1$，值域为$[0,+\infty)$，并得 $x+\sqrt{x^2-1}=10^y$. 另一方面，由 $y=\log_{10}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=-\log_{10}(x-\sqrt{x^2-1})$得 $x-\sqrt{x^2-1}=10^{-y}$. 二者相加并除以 2 得 $x=\dfrac{10^y+10^{-y}}{2}$，这就是 $y=\log_{10}(x+\sqrt{x^2-1})$的反函数，习惯上写作 $y=\dfrac{1}{2}(10^x+10^{-x})$，$0\leqslant x<+\infty$.

函数概念的两大要素是定义域与对应规律，用什么字母表示函数的因变量和自变量无关重要，习惯上常用 y 表示因变量，x 表示自变量.

真数部分的分子分母同乘以 $x-\sqrt{x^2-1}$.
求反函数时，要考虑在什么区间上存在反函数，值域、定义域各是什么.
反函数的定义域为$[0,+\infty)$，值域为$[1,+\infty)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-2}$，求 $f^{-1}(x)$.

[解] 已知 $y=\dfrac{2x+3}{4x-2}$，于是$(4x-2)y=2x+3$，由上式解出 x，得$x=\dfrac{2y+3}{4y-2}$. 按习惯，自变量写作 x，因变量写作 y，得 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{4x-2}$，它的定义域是$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

注：因 $y=\dfrac{2x+3}{4x-2}$的图形对称于直线 $y=x$，故它的反函数就是它自身.

$y=\dfrac{2x+3}{4x-2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{4x-2}$的图形是对称于直线 $y=x$ 的双曲线.
$f^{-1}(\ )$表示 $f(\ )$的反函数，这里
$x=f^{-1}(y)=\dfrac{2y+3}{4y-2}$，故
$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{4x-2}$.

3. 设 $f(x)=x^2-x$，$\varphi(x)=\sin2x$，写出 $f[f(x)]$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$的表达式.

[解] $f[f(x)]=[f(x)]^2-f(x)=(x^2-x)^2-(x^2-x)=(x^2-x)(x^2-x-1)$；
$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)-\varphi(x)=\sin^2 2x-\sin2x=\sin2x(\sin2x-1)$；
$\varphi[f(x)]=\sin[2f(x)]=\sin2(x^2-x)$.

这是一个常见的典型题.

4. 已知 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$，$u=\varphi(x)=x-1$，求 $f[\varphi(x)]$的定义区间.

[解] $f[\varphi(x)]=\sqrt{1-\varphi^2(x)}=\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{x(2-x)}$，只有当 $x(2-x)\geqslant0$ 时，$f[\varphi(x)]$才有意义，故 $f[\varphi(x)]$的定义区间为 $0\leqslant x\leqslant2$.

另法： 由 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$的定义区间为 $u^2\leqslant1$，亦即$|\varphi|=|x-1|\leqslant1$，故

$f(u)$的定义域与 $u=\varphi(x)$的值域的交集是非空集方可“代入”，并审查复合函数