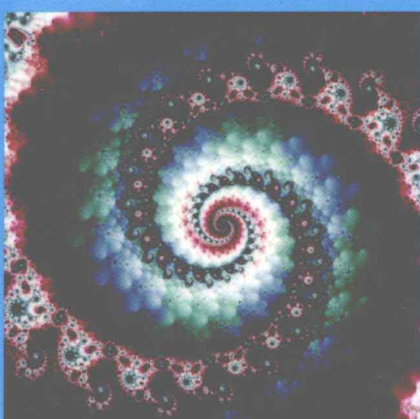
高等教育"十一五"规划教材

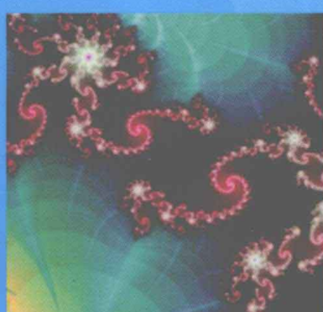
# 数学欣赏

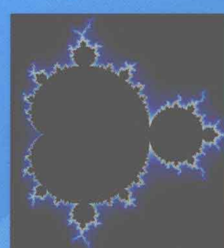
SHUXUE XINSHANG

张文俊　编著

mathematics







科学出版社

高等教育“十一五”规划教材

# 数学欣赏

张文俊 编著

科学出版社

北京

# 内 容 简 介

本书为大学生数学综合素养教育书籍. 全书从宏观的角度，以介绍数学的对象、内容、特点、思考方式、典型问题、典型方法为载体，通过深刻的分析及生动的实例，采用轻松的语气，使读者领悟数学之魂、认识数学之功、经历数学之旅、欣赏数学之美、品味数学之趣、感受数学之妙、领略数学之奇、思考数学之问，准确、完整、科学地认识数学的实质，剖析数学的魅力，弄清数学的脉络与层次，体味数学思想方法的深刻性与普适性. 该书不涉及深奥的数学知识，从历史与科学的角度切入题材，沿应用与传播的途径展开，以文化与美学的眼光欣赏，寓知识性、科学性、思想性、趣味性和应用性于一体，漫谈但不失严谨，通俗却不失深刻，科学又不乏趣味.

本书配有全套设计精美的教学课件，适合作为高等学校通识类课程——数学文化教学用书，也可作为通俗读物，供各级教师、大中学生和其他数学爱好者阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

数学欣赏/张文俊编著. —北京：科学出版社，2010
（高等教育“十一五”规划教材）
ISBN 978-7-03-029663-4

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①数学-普及读物　Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 233583 号

策划：姜天鹏　刘玉兴
责任编辑：王纯刚　李　瑜 / 责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011年2月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2011年2月第一次印刷　印张：15 3/4
印数：1—3 000　字数：353 000
定价：32.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换（双青））
销售部电话 010-62140850　编辑部电话 010-62135763-2038（VF02）

# 序

众所周知，古今中外，数学一直是学校教育必教、升学考试必考的一门课程. 却很少有人思考，数学为何受到如此重视？数学对人类的影响到底有多大？要透彻解释这些问题并非易事，但有两句话值得关注：一句是，一个人不识字甚至不会说话可以生活，若不识数，就很难生活；另一句是，一个国家的科学进步，可以用它使用数学的程度来度量. 前一句比较通俗，然颇为深刻；后一句比较高雅，且非常精彩！它们都说明数学对人类生存、生活以及社会进步、科技发展有重要影响. 其实，数学源于实践、追求永恒、强调本质、关注共性，识方圆曲直、判正负盈亏，时时为人解难；数学思想深刻、方法巧妙、内容广阔、结论优美，析万事之理、解万象之谜，处处引人入胜；数学根基简明、推理严密、结论可靠、应用广泛，可化繁为简、能化难为易，事事让人放心. 数学是数量与空间的组合，是科学与艺术的统一，是人类思维的体操，更是人类不可缺少的素质. 代数简洁、几何优雅、分析严谨，数学充满魅力，使人着迷.

数学经世致用. 像文学艺术探索和描绘人类的心灵世界一样，数学探索和表达自然的奥秘，分析和描述社会的本质，是人类认识与改造自然、理解与发展社会的重要动力. 作为一门课程，数学知识是学习与理解其他知识的基础，在世界各地，在学校教育的各个阶段，数学是教育时间最长、分量最重、要求最高的课程；作为一种工具，数学方法是人们生存、生产、生活的得力助手，在人类社会的各个领域，在人类生活的各个方面，在科学技术的各个分支，在社会发展的各个阶段，尤其是关键时刻，数学都扮演着极其重要、不可替代的角色；作为一种语言，数学的符号、公式、图形等是描述自然与社会现象的通用语言，她以简洁而精确的方式，描绘宇宙万物的本质与共性，揭示自然与社会的结构、模式与发展规律；作为一种思维，数学严谨、精细、简洁、可靠，是理性思维的标志和典范，她培养的思考力、判断力、决策力是人的重要素质，是科学素质的核心；作为一门科学，数学既是科学之母，也是科学之仆，既孕育了许多科学圣婴，又推动着所有科学的发展. 如今，人类进入信息时代，数学更显示出前所未有的“统治力”，她无声无息地走进人们的生活，引领科技的发展，把握社会的命脉. 本质上，信息时代就是数学时代，信息技术就是数字技术，信息化就是数字化. 数字技术把各种事物、事物的关系、事物的发展变化等统一用数字来描述，把各种问题的研究归结为数据存储、数据处理和数据传递：其记忆容量远超人类大脑，其传递速度可与光速匹敌. 数字技术极大地提高了各个领域的工作效率和工作质量，威力难以估量，影响异常惊人.

数学睿智聪慧. 她蕴涵着人类精细的思维与高超的智慧，以合情推理（归纳、类比、关联、辐射、迁移、空间想象等）为主的发散性思维，以演绎推理（三段论、递归、反证等）为主的收敛性思维，都深刻地影响着人类的思维方式，既饱含理性，又充满创新. 人类的发明创造开始于感性的发散性思维，终止于理性的收敛性思维，数学思维是人类

发明创造的源泉和动力. 优秀的数学教育是对人理性的思维品格和思辨能力的培养，是聪明智慧的启迪和潜在能动性与创造力的开发，对人类的素质有重要影响，它使人成为更完全、更丰富、更有力量的人.

数学美丽神奇. 她打开了自然与社会的大门，掀起了两者神秘的面纱，用各种有组织的“符号”、“方程”以及“公式”等，简洁而深刻地描绘了复杂的自然与社会现象的本质与规律，其方法和内容都体现着自然与社会的多姿多彩、对立统一，具有极为深刻的美学价值. 数学方法以静识动、以直表曲、以反论正，尽显神奇之威；数学结论万变有常、万异存同、万象同根，皆表和谐之美. 数学美是数学生命力的重要支柱.

因此数学是美丽的、有趣的、有用的，更是人类不可缺少的素质.

因为数学是美丽的，所以数学需要欣赏；因为数学是有趣的，故而数学可以欣赏；因为数学是有用的，因此数学值得欣赏.

然而遗憾的是，数学教育的现状却不容乐观！许多人感觉数学抽象、枯燥、学起来困难，惧怕、甚至讨厌数学. 这固然可以在很大程度上归根于数学的研究对象、内容和方法的抽象性，但也与中国的教育环境、中考高考的压力，以及数学教师对数学理解的角度、深度和讲授数学的方式、方法有关. 因此，在大学开设一门课程，编写一本教材，从欣赏的角度去认识数学、领悟数学、应用数学，就显得特别必要，这正是《数学欣赏》这门课和这本书的初衷. 实践证明，欣赏激起热爱，热爱焕发激情，激情产生动力，并最终真正提高读者的数学素质，这也正是《数学欣赏》要达到的目的.

全书共分八章：数学之魂、数学之功、数学之旅、数学之美、数学之趣、数学之妙、数学之奇、数学之问. 从宏观的角度去认识数学的本质，使读者对数学的概念、思想、方法等有一个整体的把握；以生动且富有哲理和智慧的实例去展示数学的美、理、奇、妙、趣，并通过数学自身的特点与思考方式去解释这些现象背后的原因；通过数学的对象、内容与思想方法去揭示数学的价值，包括数学对人、自然和社会的影响；伴随着流传千古的典故和让人陶醉的佳话去认识和理解一些著名的数学问题，包括最近解决的庞加莱猜想等.

第一章数学之魂，旨在通过分析数学的对象、内容、特点、思考方式等，揭示数学与自然和社会的密切关系，领悟数学知识、方法、思想的深刻性、普适性与可靠性，这是数学的灵魂，是数学价值和美、理、奇、妙、趣的根源. 第二章数学之功，介绍数学的功能与价值，从数学与个人成长、数学与人类生活、数学与科技发展、数学与社会进步四个方面，通过实例见证数学的教育价值、应用价值以及对社会进步的推动作用. 第三章数学之旅，介绍数学各主要分支的研究对象、内容、方法、价值和发展简史，包括代数学大观、几何学通论、分析学大意、随机数学一瞥、模糊数学概览等. 第四章数学之美，通过一个关于人脸美丑的实验以及对数学本质的分析，剖析数学美的原因和特征，并以典型实例欣赏数学方法之美妙和数学结论之和谐. 第五章数学之趣，通过勾股定理、悖论以及几个游戏，品味数学的数形之趣、思维之趣以及数学与游戏的相通之处. 第六章数学之妙，通过数学归纳法原理、抽屉原理、一笔画定理以及欧拉定理，感受数学方法的美妙与神奇. 第七章数学之奇，通过分析实数系统的结构、三种不同的几何学

以及神奇的幻方世界，领略数学的奇异现象. 第八章数学之问，通过古代数学三大难题、近代数学三大难题和现代数学的庞加莱猜想等问题的缘起、发展、争端，直至最终解决的历程，体会数学家关注什么、如何提问、如何思考，感受他山之石可以攻玉的道理，领略数学家为科学献身的精神，并通过现代数学七大难题，使读者了解数学发展的最新动态.

全书各章通过深刻的分析及生动的实例，为你打开一扇窗户，开启你认识世界的通道，欣赏数学的美丽与神奇；帮你擦亮一双眼睛，丰富你观察世界的方式，认识数学的本质与价值；给你武装一副头脑，提升你改造世界的能力，掌握数学的思想与方法. 以轻松的方式，使你领悟数学之魂、认识数学之功、经历数学之旅、欣赏数学之美、品味数学之趣、感受数学之妙、领略数学之奇、思考数学之问，准确认识数学的实质、剖析数学的魅力、弄清数学的脉络与层次、体会数学思想方法的深刻性与普适性.

数学之魂，追根求源，昂首顶天立地；数学之功，探因析理，阔步所向披靡；
数学之旅，超越时空，数形争放异彩；数学之美，简洁和谐，方圆竞展奥秘；
数学之妙，出神入化，时时化繁为简；数学之奇，鬼斧神工，事事化难为易；
数学之趣，引人入胜，促进情智共生；数学之问，简明深刻，焕发数学生机.

全书题材兼顾数与形的科学，并点缀着数学的思维，以名言与故事的寓意引导，从历史与科学的角度切入，沿应用与传播的途径展开，用文化与美学的眼光欣赏，寓知识性、科学性、思想性、趣味性和应用性于一体，力争做到漫谈但不欠严谨，通俗却不失深刻，科学又不乏趣味.

本书从构思、酝酿到杀青，前后历时 12 年，其间对各专业本科生、中学数学教师等连年试用，数易其稿. 但由于数学历史源远流长，数学思想博大精深，数学应用广泛深入，数学之美无处不在，数学之趣俯拾即是，要从茫茫的数学世界中去涉猎、去选材，具有极大的主观性. 限于作者的数学与文学修养水平，本书的选材尽可能做到前呼后应、衔接自然，但无法做到面面俱到、例例贴切；本书的表述尽可能做到观点明确、说理透彻，但难以保证字字精辟、句句优美. 不当、甚至谬误之处在所难免，恳请读者批评指正.

张文俊

2010.8

# 目　　录

# 第一章 数学之魂

Mathematics Appreciation

## 数学之魂 追根求源

数学，各级学生必学、升学选拔必考；

数学，启迪人类智慧、优化人类生活；

数学，促进科学发展、推动社会进步……

为什么？为什么数学如此受到关注？为什么数学如此重要？

这是因为：

数学理论的研究对象——数与形，为万物共有，是万物之本；

数学理论的研究内容——数形变化关系与规律，反映的是物质世界的运动规律与相互关系，是万物之理；

数学理论建立的基础——公理系统，其结论通俗，道理自明；

数学理论建立的方法——演绎推理（三段论），其形式简洁，层次清晰，结构严谨，推论无疑.

数学关注万物共性与本质，揭示万象之理与奥秘，其基础简明稳固，方法科学普适，结论精准可靠，这是数学的灵魂，也是数学价值和美、理、奇、妙、趣的根源.

# 地王大厦有多高?

20 世纪 90 年代中期，在祖国改革开放的前沿阵地深圳经济特区建起一座当时为中国最高的摩天大厦——地王大厦，如图 1.1 所示. 人们驻足地王，不禁叹问：地王大厦有多高?

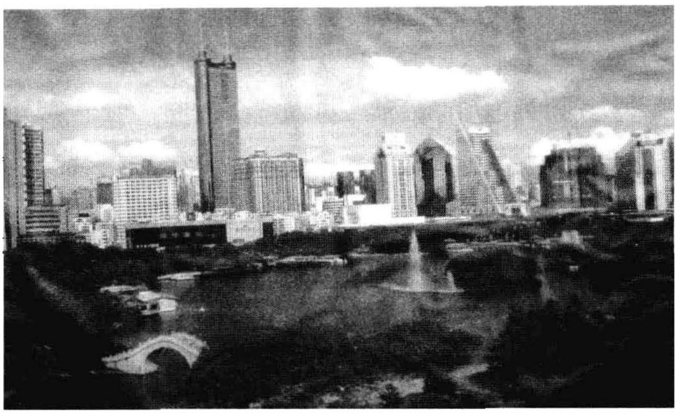


图 1.1　地王大厦

对于这个问题，只要找相关人员询问，自然会得到准确答案. 这里提出这个问题，目的并不在于要确切地了解地王大厦的高度，只是探讨一下受过不同类型教育的人对此类问题的不同反映.

文学家喜欢用语言对事物进行描述. 他可能用诸如“巍然屹立、高大宏伟、高耸入云”等一系列词汇对地王大厦的高度进行描述. 这样的答案给了你充分的想象空间和美的感受，但你却不能据此准确得知地王大厦的高度.

物理学家习惯用实验的方式处理问题. 要想知道地王大厦的高度，按照实验的思想是“拿根绳子量一量”：从楼顶吊下一根绳子直达楼底，记下从楼顶到楼底绳子的长度，这就是地王大厦的高度. 尽管这个做法不算简单，也不一定具有可移植性. 比如，要测量一根竖立在地面上又细又长的钢管，人们就无法站到钢管顶部，但是这个做法确实可以给出准确的答案.

如果数学家遇到这样的问题，其处理方式会有很大不同. 他善于对事物进行类比，因此会选取一个标尺，借助阳光，利用标尺与大厦投影的长度及相似原理测出大厦的高度；他擅长将事物进行转化，因此可能通过直角三角形直角边长与其对角的依赖关系，把大厦高度的测量问题转化为对仰视角的测量问题. 他没有爬上楼顶，但能准确得到楼顶到地面的距离；他没有丰富的词汇但却告诉了你大厦的雄伟. 他的方法不仅可以用来测量大厦，还可以移作它用.

这就是数学的威力——方法简洁、结论可靠、适用广泛.

# 第一节　数学的对象与内容

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式（数与形）的科学.

——恩格斯《反杜林论》

## 万物共有数与形

世间万事万物，不论是有生命的，还是没有生命的；不论是动物，还是植物；不论是自然形成的，还是人工创造的；不论是气态、液态，还是固态；不论是在宏观世界，还是在微观世界……均以一定的形态存在于空间之中，并受诸如长度、面积、体积、质量、浓度、温度、色度等各种量的制约. 这种万事万物所共有的内在特质——“形（态）”与“（数）量”，乃是数学科学的两大柱石.

世间万事万物不是静态不变的，而是在不断、相互联系地运动和变化着. 事物的运动和变化体现在其内在特质上，就是“形”的变换和“量”的增减. 如图 1.2 所示.

图 1.2　列车

形的变换各种各样，有描述位移的平移、旋转等刚体变换，也有描述缩放、透视的相似、仿射、直射等射影变换，还有描述拉伸、扭转等的拓扑变换. 研究形在各种变换下的不变性质，或者用各种不同方法、观点去研究形，就形成了各种各样的几何学.

量的增加衍生出一种基本运算——加法. 在量的变化中，先增加 2、再增加 3，与先增加 3、再增加 2，其结果无异，这就衍生出加法运算的交换律……研究各种量，甚至抽象元素的运算及其规律就形成了各种各样的代数学.

作为万事万物所共有的内在特质“数”与“形”，附以反映万事万物变化规律的运算、变换及其规则，就是数学. 古典数学如此，现代数学本质也如此.

### 1.1.1 数与形——万物之本

欣赏数学，应从数学的研究对象开始.

19 世纪初，伟大导师恩格斯指出：数学是研究现实世界的数量关系和空间形式（数与形）的科学. 这一经典定义明确了数学的研究对象，概括了从古代到 19 世纪初数学的全部，也代表了目前数学的绝大部分.

数与形是什么？是万物之本.

数，既可表达事物的规模，也可表示事物的次序，万象共有.

形，是人类赖以生存的空间形态，代表的是结构与关系，万物共存.

数与形是一个事物的两个侧面，二者相互联系，对立统一.

为什么从幼儿园到研究生，数学是必修科目？为什么各种升学考试中，数学是必考科目？其根源在于数学的研究对象——数与形，乃万物之本.

按照恩格斯关于数学的定义，“数与形”是数学的两大柱石，整个数学都是围绕这两个概念的提炼、演变与发展而不断发展，数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念而实现.

大体上讲，数学中研究数量关系或数的部分属于代数学范畴；研究空间形式或形的部分属于几何学范畴；数与形有机联系，研究二者联系或数形关系的部分属于分析学范畴. 代数、几何、分析三大类数学构成了整个数学的本体与核心.

在代数学中，数量关系和顺序关系占主导，培养计算与逻辑思维能力；在几何学中，位置关系和结构形式占主导，培养直觉能力和洞察力；在分析学中，量变关系、瞬间变化与整体变化关系占主导，函数为对象，极限为工具，培养周密的逻辑思维能力和建模能力.

### 1.1.2 结构与模式——万物之理

欣赏数学，还要明白数学的研究内容.

1. 数学的研究内容——结构与模式

数学的研究对象数与形是物质世界的本质抽象化，但人们研究数学的根本目的不是做抽象游戏，而是要探讨物质世界的运动规律，并把这些规律通过数与形来表达出来.

19 世纪末到 20 世纪初，德国数学家康托（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845—1918）建立了集合论，借助集合论，人们可以简洁地概括出数学的研究内容：数学是研究模式与秩序的科学. 数学的基本研究对象是各种各样的集合以及在它们上面赋予的各种结构.

数学的基本集合包括：各种数的集合、各类图形、各类函数、各种空间、一般的抽象集合等.

而数学的基本结构有三种.

- ◆ 代数结构：反映“合作”关系的各种运算及其运算规律等；
- ◆ 顺序结构：反映对比关系的大小、先后，反映隶属关系的蕴涵等；
- ◆ 拓扑结构：反映亲疏程度与规模大小的距离.

例如，实数的全体是一个集合，在其上规定的加减乘除四则运算就是一种代数结构；实数之间具有大小关系，这种大小关系就是顺序结构；实数可以通过数轴表现出来，在数轴上可以引入距离. 距离可以刻画两个实数间的亲密程度，这就是一种拓扑结构. 实数的代数结构、顺序结构及其内在规律和关系刻画了实数的代数属性，形成了代数学的根基；实数的拓扑结构刻画了实数的几何属性，它是微积分得以在实数集上建立的基础.

按照这种观点，数学的研究内容就是结构与模式，它反映的是万物之理. 事实上，世界是物质的，物质是运动的，运动是相互联系的，这相互联系的物质运动大都可以被数学家抽象为以数量之间的变化关系和空间结构形式为基本特征的数学模型.

在这种观点下，数学也远没有人们想象的那么神秘，它脉络清晰，是现实的、自然的，其本质也是通俗的. 张景中院士曾经借此把数学与游戏和演戏相比较：数学像游戏，离不开道具和规则. 数学中，各种集合是道具，而在各种集合上赋予的各种结构则是规则. 数学像演戏，离不开演员和剧本. 数学中，各种集合是演员，演员被分配了角色才能演戏.

集合论是数学的基础，但是如果单有集合而没有结构，就像游戏中没有制定规则的道具，也像戏剧中没有分配角色的演员，只能是一副没有生命力的空架子. 集合与结构的组合才构成具有强大生命力的数学，它能够简洁而又精确地刻画自然与社会的各种模式，进而用来解决自然与社会问题.

2. 数学的目标

现实世界千变万化、千差万别. 数学的目标是要发现各种事物的本质，建立不同事物的联系，寻找不同事物的共性，探索事物发展的规律，揭示事物现象的奥秘，用以描述与理解自然和社会现象，以便对发展方向进行判断、控制、改良和预测. 数学要透过现象看本质，通过个性看共性，在混沌中寻找秩序，在变化中寻找恒定.

对于一个给定的对象，数学家的目标是要**发现本质、探索规律**. 下面通过一个例子来进行说明.

**刘谦没有搞清原理的猜心术**. 在国际魔术大师刘谦表演的众多魔术中，有一个使用月历设计的“猜心术”：随便取出一张月历（每月按照星期排成 4—6 行，如图 1.3 所示），随便找一位观众在月历中画一个正方形框出 $4\times4=16$ 个数字，然后刘谦用笔在一张纸上写下一个数字，折起纸密封于一个信封内. 接下来，刘谦让这位观众在这个方框内随便取一个数字，然后把这个数字所在的行和列中的数字划掉，只留下这个数字；之后在该方框内剩下的数字中再随便取一个数字，然后把这个数字所在的行和列中的数字划掉，只留下这个数字. 依此类推，继续做下去，最后方框内原有的 16 个数字只剩下 4 个. 此时，刘谦请观众算一算留下的四个数字之和是多少. 待观众算出这个和数后，刘谦告诉

他："其实，我早就猜出你的这个和数了，请你打开信封看一看．"观众打开信封，发现刘谦写在纸上的数字正是这个和数，一时使他目瞪口呆．


图 1.3　月历

在一次魔术教学时，观众问刘谦为何对此能够未卜先知，刘谦解密说："因为当你框出 16 个数时，我看到了四个角上的数字，然后相加，把它记在了这个纸上．"观众又问："我选的四个数字完全是随意的，换一个人可能选了另外四个数字，你为什么知道它一定等于这四个角上的数字之和呢？"刘谦无奈地回答："这个真的很抱歉，我只知道一定是这样，但是我不知道为什么．"

现在让我们来看一看其中的奥秘到底是什么：首先注意任何一个方框框出 $4\times4=16$ 个数字的规律．记左上角那个数字为 $n$，则其后的数字组成一个公差为 1 的等差数列，依次为 $n+1$、$n+2$、$n+3$；而其下面几行的首位数字组成一个公差为 7 的等差数列，依次为 $n+7$、$n+14$、$n+21$．而且，每一行各数从左到右都组成一个公差为 1 的等差数列，每一列各数从上到下都组成一个公差为 7 的等差数列．其次考察一下观众最后留下的四个数字的规律：注意观众取下第一个数字后，不论在哪里取，它所在的行和列中的数字就全部划掉，只留下这个数字，因此后面再选取数字的时候就只能在其他行、列进行．按照规则进行，最后剩下的四个数字的特点是：每行、每列都有而且只有一个数字．最后结合刚才的规律，看一看选出的四个数字之和的奥秘．由于这四个数字在每行、每列都有而且只有一个，因此，当行确定时，它一定为该行首位数字 +0、+1、+2、+3 之一，而且只能有一个．于是，由于四个数字取自四个不同的行，它们所在的行的首位数字分别为 $n$、$n+7$、$n+14$、$n+21$，它们的和就应该是这四个数字 $n$、$n+7$、$n+14$、$n+21$ 分别+0、+1、+2、+3，即和为

$$(n+n+7+n+14+n+21)+1+2+3=4n+48$$

其中 $n$ 是左上角的数字．

再看看刘谦写下的四个角上的四个数字之和是什么？四个角上的数字分别是 $n$、$n+3$、$n+21$、$n+24$，其和亦为 $4n+48$．这就是刘谦这个猜心术的奥秘．

事实上，刘谦的算法很麻烦．有许多简单算法，比如大家看到的，左上角数字 $n$ 的 4 倍+48，即 $4n+48$．下面再列举一些简单算法：

1）设 $n$ 为右上角数字，则和 $S=4n+36$；

2）设 $n$ 为第二行首位数字，则和 $S=4n+20$；

3）设 $n$ 为第二行末位数字，则和 $S=4n+8$；

4）$S=$ 对角线上（左上到右下，或者左下到右上）四个数字之和；

5）$S=$ 中心四个数字之和．

以上例子代表数学家思考问题的方式和目标：他不限于发现一个结论，更要明白结论背后的原因；他不仅要知道某一种特定结论，更要发现其内在规律．

对于多个给定的对象，数学家的目标是要**发现共性、探索关系**．比如