研究生教育创新工程教材

Economic Mathematics

经济数学

——动态经济分析与贝叶斯计量经济学

李亚琼 黄立宏
刘 懿 周路军 ◎著

湖南大學出版社
Hunan University Press

研究生教育创新工程教材

Economic Mathematics

经济数学

——动态经济分析与贝叶斯计量经济学

李亚琼 黄立宏
刘 懿 周路军 ◎著

湖南大学出版社
Hunan University Press

内 容 简 介

本书主要内容包括：变分法和最优控制的理论和在经济学中的应用，频率学派和贝叶斯学派的计量经济学理论与应用及其比较。前者属于数理经济学范畴，后者是经济学中进行实证分析的重要工具之一。书中有些内容是比较新的，如具有时滞响应的最优控制、贝叶斯计量经济学等。

本书可作为经济管理类研究生的经济数学课程的教材或参考书，也适合相关方向的高年级本科生、研究生，以及从事相关专业的科研和教学人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学——动态经济分析与贝叶斯计量经济学/李亚琼，黄立宏，刘懿，周路军著．—长沙：湖南大学出版社．2011．7

（研究生教育创新工程教材）

ISBN 978－7－5667－0075－9

Ⅰ．①经… Ⅱ．①李…②黄…③刘…④周… Ⅲ．①经济数学

Ⅳ．①F224．0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 187426 号

经济数学——动态经济分析与贝叶斯计量经济学

Jingji Shuxue——Dongtai Jingji fenxi yu beiyesi Jiliang Jingjixue

作　　者：李亚琼　黄立宏　刘　懿　周路军　著

责任编辑：陈建华　彭亚新　　责任校对：祝世英

出版发行：湖南大学出版社　　责任印制：陈　燕

社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　邮　　编：410082

电　　话：0731－88822559（发行部），88821327（编辑室），88821006（出版部）

传　　真：0731－88649312（发行部），88822264（总编室）

电子邮箱：presschenjh@hnu.cn

网　　址：http：//www.hnupress.com

印　　装：长沙国防科大印刷厂

开本：787×1092　16 开　　印张：13.75　　字数：318 千

版次：2011 年 9 月第 1 版　　印次：2011 年 9 月第 1 次印刷　　印数：1～2 000 册

书号：ISBN 978－7－5667－0075－9/F·284

定价：28.00 元

前　言

在经济问题的研究中，利用数学工具越来越成为一个重要的趋势。但是，如何将经济学内容和相应的数学方法很好地融合在一起，而不是分离的，这在一些学科的研究生培养过程中是值得认真探索的问题。因此，我们申请了湖南大学研究生教育创新工程项目，并获得了 2006 年度和 2009 年度的资助。近五年中，我们通过不断的理论探索和教学实践总结，终于形成了本书：《经济数学——动态经济分析与贝叶斯计量经济学》。

正如读者所看到的标题一样，在浩瀚的经济数学学科中，本书仅仅讨论两个主题：其一，动态经济分析方法及其在经济管理中的应用；其二，贝叶斯计量经济学原理及其应用和计算。

动态经济分析方法包括第一章的常微分方程基础、第二章的变分法和第三章的最优控制。选择这些内容的主要理由是：在中高级经济学的教材和国外的经济学文献中经常会运用变分法和最优控制理论和方法对经济问题进行研究，使用这些工具来讨论经济问题，最终会转化为求解常微分方程（组）或者定性讨论常微分方程（组）解的性质。比较一些为数不多的包括该内容的书籍，本书增加了一些新内容。例如，Bang-Bang 控制、具有时滞影响的最优控制，以及随机最优控制等。值得一提的是，我们利用变分法和最优控制在经济管理问题中应用的一些研究工作也作为案例在书中做了介绍。

贝叶斯计量经济学是采用基于主观先验的贝叶斯思想的计量经济学，考虑到对于国内的研究生一般具有频率学派的统计学基础，为了使读者在这样的基础上容易理解和比较贝叶斯学派的计量经济学，我们首先介绍了频率学派的计量经济学，接着再引入贝叶斯学派的计量经济学及其与频率学派的计量经济学的比较。在贝叶斯计量经济学中主要选择了正态分布假设下的自然共轭先验的模型进行讨论，这样有助于读者容易接受贝叶斯计量经济学的思想和方法，暂时避免复杂的计算，并且在此基础上读者可以利用某些软件包（例如 Winbugs，R 等）开展一些自己感兴趣的实证工作。同样，在这部分内容中也将我们利用数理分析和实证分析相结合的一些研究工作作为案例写入书中，供读者参考。贝叶斯计量经济学与频率学派的计量经济学比较有一些显著的特点，例如，贝叶斯计量经济学结合了研究者先验的信息和数据信息进行统计推断；贝叶斯统计可以对小样本数据以及特殊样本数据进行统计推断。毋庸置疑，未来在国内经济学的研究领域中会有越来越多的学者愿意接受贝叶斯统计学的理论思想和使用贝叶斯计量经济学开展实证研究方面的工作。

本书的出版除获得湖南大学研究生教育创新工程的资助（06D009，09C004）外，还得到国家自然科学基金（11071060，60835004，11171098，71171077），湖南省高校科技创

新团队支持计划资助（湘教通［2008］244号），湖南省自然科学基金项目（11JJ1001，10JJ3071），教育部人文社会科学研究项目（11YJCZH259）。在此我们表示感谢！

本书能够出版，我们还要感谢湖南大学研究生院、湖南大学出版社、湖南大学数学与计量经济学院的大力支持。感谢英国拉夫堡大学的 Baibing Li 教授和曼彻斯特大学的潘建新（Jianxin Pan）教授曾经对第一作者在贝叶斯统计和贝叶斯计量经济学理论思想和学术方面的建议和指导。感谢湖南大学出版社的陈建华老师和湖南大学的彭亚新老师在出版过程中认真负责的态度和辛勤的工作。

本书的作者分别是湖南大学的李亚琼老师，湖南大学和湖南女子学院的黄立宏教授，湖南有色金属研究院的刘懿高级国际财务管理师，湖南农业大学经济学院的周路军老师。

在本书形成的过程中，作者们根据在教学和研讨过程中学生对后续知识需求、使用情况、知识的更新情况对本书的内容进行了不断的调整和修改，但是难免有不足之处，恳请读者们给予批评指正。

作　者

2011年8月

于岳麓山下

目　次

第 1 章　常微分方程基础

第 1 节　微分方程的基本概念 …………（1）
第 2 节　一阶微分方程 …………（2）
第 3 节　几类可降阶的高阶微分方程 …………（7）
第 4 节　线性微分方程解的结构 …………（10）
第 5 节　高阶常系数线性微分方程 …………（14）
第 6 节　欧拉方程 …………（21）
第 7 节　常系数线性微分方程组 …………（24）
第 8 节　常微分方程图解法简介 …………（26）
第 9 节　微分方程稳定性理论简介 …………（31）

第 2 章　变分法

第 1 节　固定边值问题 …………（35）
第 2 节　自由边值问题 …………（40）
第 3 节　终点带不等式约束的情形 …………（45）
第 4 节　角点问题 …………（47）
第 5 节　无穷限的自治问题 …………（51）
第 6 节　多个变量的情形 …………（52）
第 7 节　最快路径问题 …………（54）
第 8 节　相位图实例分析 …………（56）
思考题…………（59）

第 3 章　最优控制

第 1 节　自由端点问题 …………（60）
第 2 节　多个变量的情形 …………（68）
第 3 节　固定边值问题 …………（69）
第 4 节　各种终点约束情形 …………（72）
第 5 节　比较静态分析 …………（76）
第 6 节　边界控制 …………（77）

第 7 节　带约束的控制 …………………………………………………… (78)
第 8 节　Bang-Bang 控制 ………………………………………………… (80)
第 9 节　具有时滞响应的最优控制 ……………………………………… (82)
第 10 节　随机最优控制 ………………………………………………… (84)
第 11 节　动态最优化和最优控制应用案例……………………………… (88)
思考题…………………………………………………………………… (93)

第 4 章　经典计量经济学模型
第 1 节　线性回归模型概述 ……………………………………………… (95)
第 2 节　一元线性回归模型的参数估计 ………………………………… (98)
第 3 节　多元线性回归模型的参数估计 ………………………………… (101)
第 4 节　线性回归模型的统计检验 ……………………………………… (106)
第 5 节　线性回归模型的置信区间 ……………………………………… (110)
第 6 节　计量经济学软件应用与实例 …………………………………… (112)
第 7 节　异方差检验 ……………………………………………………… (118)
第 8 节　序列相关性的检验 ……………………………………………… (122)
第 9 节　多重共线性 ……………………………………………………… (127)

第 5 章　非经典计量经济学模型
第 1 节　线性时间序列分析模型 ………………………………………… (132)
第 2 节　协整理论与误差修正模型 ……………………………………… (139)
第 3 节　Granger 因果关系检验 ………………………………………… (152)
第 4 节　面板数据计量经济学模型 ……………………………………… (155)
第 5 节　面板数据模型的软件应用及实例 ……………………………… (169)

第 6 章　贝叶斯计量经济学模型
第 1 节　贝叶斯分析原理 ………………………………………………… (186)
第 2 节　自然共轭先验的一元线性回归模型 …………………………… (190)
第 3 节　自然共轭先验的多元线性回归模型 …………………………… (200)
第 4 节　实例分析 ………………………………………………………… (207)
思考题…………………………………………………………………… (210)

参考文献………………………………………………………………… (212)

第 1 章　常微分方程基础

在第二、三章中，我们将介绍变分法和最优控制理论. 在这些问题的讨论中，往往会涉及求解微分方程，因此在本章首先介绍常微分方程的一些基本理论和方法.

第 1 节　微分方程的基本概念

在研究客观现象的许多问题时，常常需要求出我们所要研究变量之间的函数关系. 但在许多情况下，这些函数关系不能直接得到，而只能间接地得到这些变量和它的导数（或微分）之间的关系. 我们把这种含有未知函数及其导数（或微分）的方程，称为微分方程.

定义 1　微分方程中所出现的未知函数的导数（或微分）的最高阶数，称为微分方程的阶.

方程

$$x^4 y''' + x^3 y'' - 4y' = 3x^2$$

是三阶微分方程.

方程

$$x^{(4)} - 3y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 3x$$

是四阶微分方程.

一般地，一阶微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y') = 0. \tag{1}$$

如果从(1)式中能将 y' 解出，则得到方程

$$y' = f(x,y), \tag{2}$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{3}$$

我们称(1)式为一阶隐式微分方程，(2)式称为一阶显式微分方程，而(3)式称为微分形式的一阶微分方程.

类似地，n 阶隐式微分方程的形式可表为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

这里 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 表示含 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的一个表达式，而且一定含有 $y^{(n)}$；y 是未知函数，x 是自变量.

n 阶显式微分方程的形式可表为

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{5}$$

定义 2　如果把一个函数 $y=f(x)$ 代入微分方程，能使方程成为恒等式，则称此函数

为该微分方程的一个解.

如果微分方程的解含有独立的任意常数的个数与方程的阶相等，则称这样的解为微分方程的通解.

在通解中给予任意常数以确定的值而得到的解称为特解.

给出方程的通解后，为了确定通解中的任意常数，往往要给出确定这些常数的条件，则称这些条件为定解条件.

如果确定一个 n 阶方程特解的定解条件由自变量在某一点所对应的未知函数值及未知函数的直到 $n-1$ 阶导数的值所给出，则称这种定解条件为初始条件.

一般地，n 阶微分方程的初始条件可以写成

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

或写成

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,y'\Big|_{x=x_0}=y_0',\cdots,y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{\ (n-1)},$$

其中 $x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的值.

求微分方程满足初始条件的特解的问题称为初值问题. 微分方程特解的图形是一条曲线，称之为微分方程的积分曲线. 初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

的几何意义就是在 xOy 平面上经过点 (x_0,y_0) 的积分曲线.

例 1 函数 $y=e^{2t}$ 是否为微分方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4y=0$ 的解？

解 将 $y=e^{2t}$ 代入方程的左边，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4y=2(2e^{2t})-4e^{2t}=0,$$

故函数 $y=e^{2t}$ 是所给方程的解.

第 2 节 一阶微分方程

本节介绍几种常见的一阶微分方程的解法.

一、变量可分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1}$$

的方程称为变量可分离方程，其中函数 $f(x)$，$g(y)$ 分别是 x，y 的连续函数.

当 $g(y)\neq 0$ 时，方程(1)可写为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

这样,变量被分离,两边积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由(2)式解出 $y=\varphi(x,C)$,即得到方程(1)的通解,而(2)式是方程(1)的通解的隐式表达式,称之为方程(1)的通积分.

假如(1)式中 $g(y)=0$ 有实根 y_0,则 $y=y_0$(常函数)也是方程(1)的解.它可能不包含在方程(1)的通解(2)中,此时必须补上.

例1 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人中进行.设该人群的总人数为 N,在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0,在 t 时刻已掌握新技术的人数为 $x(t)$,其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数 $k>0$,求 $x(t)$.

解 由题意,有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(N-x), \\ x\Big|_{t=0} = x_0. \end{cases}$$

将方程变量分离,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)} = k\mathrm{d}t.$$

两边积分,得

$$x = \frac{NC\mathrm{e}^{kNt}}{1+C\mathrm{e}^{kNt}} (C\text{ 为任意常数}).$$

代入初始条件,得 $C=\dfrac{x_0}{N-x_0}$,从而

$$x = \frac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}.$$

二、齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

的方程称为齐次方程.

求解这类方程的方法是利用变量替换将方程变换为变量可分离的微分方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$,即 $y=xu$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入(3)式得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u),$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u.$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分便可求出通解，再以 $u=\frac{y}{x}$ 代入，即得到原方程的通解.

例 2 求方程 $xy'-y=x\tan\frac{y}{x}$ 的通解.

解 原方程可变为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=\tan\frac{y}{x}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u=\tan u \quad 或 \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u.$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}(u\neq 0).$$

两边积分，得

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1(C_1 为任意常数).$$

由此有

$$\sin u=\pm \mathrm{e}^{C_1}x.$$

代回原来的变量，并注意到对应 $u=0$，原方程有解 $y=0$，从而原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=Cx(C 为任意常数).$$

三、可化为齐次方程的方程

对于方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{4}$$

当 $c=c_1=0$ 时是齐次的，否则不是齐次的. 此时我们分两种情形讨论：

(1) $ab_1-a_1b\neq 0$. 此时方程组

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

存在唯一解 $x=x_0, y=y_0$. 作变量替换

$$x=X+x_0, y=Y+y_0,$$

则方程(4)化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right).$$

求出此方程的通解后再代回原变量，即得原方程的通解.

(2) $ab_1-a_1b=0$. 此时令 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$，则方程(4)可写为

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

引入新变量 $v=ax+by$,从而方程(4)化为

$$\frac{dv}{dx}=a+bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+c_1}\right),$$

这是变量可分离的方程.

例 3　方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y+x+5}$的通解.

解　解方程组

$$\begin{cases}y-x+1=0,\\ y+x+5=0,\end{cases}$$

得 $x=-2,y=-3$. 令 $x=X-2,y=Y-3$,原方程化为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{Y+X},$$

这是齐次方程,采用与例 2 类似的方法可求得它的通解为

$$\ln(X^2+Y^2)+2\arctan\frac{Y}{X}=C.$$

代回原变量,即得原方程的通解为

$$\ln[(x+2)^2+(y+3)^2]+2\arctan\frac{y+3}{x+2}=C.$$

四、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{5}$$

的方程称为一阶线性微分方程.之所以称为线性,是因为它关于未知函数 y 及其导数都是一次的.如果 $q(x)\equiv0$,则方程(5)称为一阶齐次线性微分方程;如果 $q(x)\neq0$,则方程(5)称为一阶非齐次线性微分方程.

先考虑齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \tag{6}$$

这是一个变量可分离的方程.显然 $y=0$ 是它的一个解,当 $y\neq0$ 时,分离变量,得

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

两边积分,得

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+C_1,$$

或

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}\quad(C=\pm e^{C_1}).$$

但因 $y=0$ 也是解,如在上式中允许 $C=0$,则得方程(6)的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{7}$$

对方程(5)可以采用常数变易法来求其通解. 方法是将(7)中的 C 换成待定函数 $C(x)$，即令

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{8}$$

将(8)代入(5)，得到

$$[C(x)e^{-\int p(x)dx}]' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

即

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),\text{或者 } C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

积分后得

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\ (C\text{ 为任意常数}).$$

将上式代入(8)，得到了方程(5)的通解

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{9}$$

例 4 求方程 $xy'+y=e^x(x>0)$的通解.

解 将方程化为

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

利用公式(9)，$p(x)=\frac{1}{x}$，$q(x)=\frac{e^x}{x}$，得到方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{e^x}{x}e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x}(e^x + C). \end{aligned}$$

五、伯努利方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,1) \tag{10}$$

的方程称为伯努利(Bernoulli)方程. 它虽然不是线性方程，但是通过适当的变量替换，可将它化为线性方程.

事实上，将方程两边除以 y^{α}，得

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

令 $z=y^{1-\alpha}$，有$\frac{dz}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$，代入上式，即得到一个线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

求出方程的通解后，以 $y^{1-\alpha}$代 z，便得到伯努利方程的通解. 此外，当 $\alpha>0$ 时，方程还有解 $y=0$.

例 5　求方程 $xy'-4y=2x^2\sqrt{y}$ $(x\neq 0, y>0)$的通解.

解　将方程变形为

$$y'-\frac{4}{x}y=2xy^{\frac{1}{2}}.$$

这是一个 $\alpha=\frac{1}{2}$的伯努利方程.

令 $z=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$,则上式化为

$$z'-\frac{2}{x}z=x.$$

解这个一阶线性微分方程,得通解为

$$z=x^2(\ln|x|+C).$$

将 z 换成 $y^{\frac{1}{2}}$,得原方程的通解为

$$y=x^4(\ln|x|+C)^2.$$

利用变量替换把一个微分方程化为较易求解的方程,这是求解微分方程的常用的方法.

第 3 节　几类可降阶的高阶微分方程

我们把二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程,求解高阶微分方程的方法之一是设法降低微分方程的阶数.若能降为一阶微分方程,则有可能应用前面几节中所介绍的方法来求出它的解.下面介绍几类较容易降阶的高阶微分方程的求解方法.

一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

微分方程

$$y^{(n)}=f(x) \tag{1}$$

的右端函数中仅含自变量 x,两边积分,得到一个 $n-1$ 阶方程

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1.$$

再积分,得

$$y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right)\mathrm{d}x+C_2.$$

依此法继续进行,连续积分 n 次,便可得到方程(1)的通解.

例 1　求方程 $y'''=xe^x$ 的通解.

解　对方程两边关于 x 积分,得

$$y''=\int xe^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C_1.$$

再积分,得

$$y'=\int(xe^x-e^x+C_1)\mathrm{d}x=xe^x-2e^x+C_1x+C_2,$$

故

$$y = \int (xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2)\mathrm{d}x$$
$$= xe^x - 3e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

这就是所求的通解，其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

二、$y''=f(x,y')$型的微分方程

方程

$$y'' = f(x,y') \tag{2}$$

的右端不显含未知函数 y. 若令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入(2)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x,p).$$

这是一个以 p 为未知函数的一阶方程. 若能求出它的通解：$p=\varphi(x,C_1)$，回代 $p=y'$，即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x,C_1).$$

两边积分，可得方程(2)的通解

$$y = \int \varphi(x,C_1)\mathrm{d}x + C_2.$$

例 2　求方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=3$ 的解.

解　令 $y'=p$，代入方程并分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得

$$p = y' = C_1(1+x^2).$$

由条件 $y'\big|_{x=0}=3$ 得 $C_1=3$，故

$$y' = 3(1+x^2).$$

两边再积分一次，得

$$y = x^3 + 3x + C_2.$$

又由条件 $y\big|_{x=0}=3$ 得 $C_2=1$，因此所求解为

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

三、$y''=f(y,y')$型的微分方程

方程

$$y'' = f(y,y') \tag{3}$$

的右端不显含自变量 x，令 $y'=p$，将 p 看作 y 的函数，则有

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

代入(3)式得

$$p\frac{dp}{dy} = f(y,p).$$

这是以 p 为未知函数，y 为自变量的一阶方程，若能求出它的通解

$$p = \psi(y,C_1),$$

则有

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y,C_1).$$

分离变量后再积分，得方程(3)的通解为

$$x = \int \frac{1}{\psi(y,C_1)}dy + C_2 \quad (\psi(y,C_1) \neq 0).$$

例 3　求方程 $y''y-(y')^2=0$ 的通解.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入方程，得

$$p\frac{dp}{dy} \cdot y - p^2 = 0.$$

当 $p\neq 0$ 时，方程变为

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

两边积分，得

$$y' = p = C_1 y.$$

从而原方程的通解为

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

当 $p=0$ 时，$y=0$ 显然是解，它被包含在通解中.

四、可利用参变量降阶的方程

某些高阶微分方程，可以利用引入参变量的方法求解.

例 4　求 $e^{y''}-y''=x+1$ 的通解.

解　此方程难以解出 y''，引入参变量 t，令 $y''=t$，则由原方程可得

$$x = e^t - t - 1.$$

因为

$$dy' = y''dx = t(e^t - 1)dt,$$

所以

$$y' = \int t(e^t-1)dt = (t-1)e^t - \frac{1}{2}t^2 + C_1.$$

又

$$dy = y'dx = [(t-1)e^t - \frac{1}{2}t^2 + C_1][e^t - 1]dt,$$

积分得

$$y=(\frac{t}{2}-\frac{3}{4})e^{2t}-(\frac{t^2}{2}-1-C_1)e^t+\frac{1}{6}t^3-C_1t+C_2.$$

从而可得原方程通解的参数表达式为

$$\begin{cases}x=e^t-t-1,\\ y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}-\left(\frac{t^2}{2}-1-C_1\right)e^t+\frac{1}{6}t^3-C_1t+C_2.\end{cases}$$

例 5 求解方程 $y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

解 这是一个不显含未知函数与自变量的方程,可用前面介绍的降阶法求解,但此方程引入参变量求解更为方便.

令 $y'=t$,则 $y''=\frac{dt}{dx}$. 于是原方程化为

$$\frac{dt}{dx}=(1+t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

分离变量后积分得

$$x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+C_1.$$

又由

$$dy=y'dx=\frac{tdt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

积分得

$$y=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}+C_2.$$

故通解的参数表达式为

$$x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+C_1,\qquad y=-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+C_2.$$

若消去 t 得

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1.$$

第 4 节 线性微分方程解的结构

定义 1 在 n 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 中,若 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 为 y 及 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的一次有理整式,则称此方程为 n 阶线性微分方程,或简称 n 阶线性方程.

n 阶线性方程的一般形式可写为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x). \tag{1}$$

当 $f(x)=0$ 时,(1)式变为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0. \tag{2}$$

方程(2)称为 n 阶齐次线性微分方程,方程(1)称为 n 阶非齐次线性微分方程,并通常把方程(2)称为对应于方程(1)的齐次线性方程,而 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 称为方程的系数,f