普通高校应用学科数学教材系列

高等数学

GAODENG SHUXUE

◎ 主编 柴惠文 蒋福坤

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高校应用学科数学教材系

高等数学

柴惠文　蒋福坤　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/柴惠文,蒋福坤主编.—上海:华东理工大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-5628-3004-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①柴…②蒋… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 032180 号

普通高校应用学科数学教材系列

高等数学

主　　编 / 柴惠文　蒋福坤
责任编辑 / 郭　艳
责任校对 / 张　波
出版发行 / 华东理工大学出版社
社址:上海市梅陇路 130 号,200237
电话:(021)64250306(营销部)
传真:(021)64252707
网址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787mm×1092mm　1/16
印　　张 / 19.25
字　　数 / 485 千字
版　　次 / 2011 年 6 月第 1 版
印　　次 / 2011 年 6 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-3004-7/O·236
定　　价 / 39.80 元

前　言

本书参照教育部制定的高等数学教学基本要求，依据理工类各专业对高等数学低要求的教学要求编写而成.在编写过程中，按深入浅出、循序渐进的原则，突出高等数学的基本思想和基本方法，强化对掌握基本内容的基本训练及应用.对概念的叙述力求从身边的实际问题出发，自然引入；适当淡化运算上的一些技巧，降低某些理论上的要求，从简处理一些公式的推导及证明.基本编写理念是：在不失科学性的大前提下，从简某些严密论证，突出数学思想的介绍及数学方法的训练、应用；努力让学生通过学习该课程，掌握各部分知识的内在联系与区别，较好地把握高等数学的思想和方法，并把这些知识应用到实际中去的基本方法.

为提高学生的基本能力，本书的例题及习题较多，所设置的习题按学习的进程并充分考虑基本概念和基本方法的掌握来配置，也考虑到具体的应用，还在每一章后配有总复习题，以供复习提高之用.

参加本书编写的人员有柴惠文、蒋福坤、刘正春、刘静、杨晓春；由柴惠文、蒋福坤统稿.

严从荃教授认真细致地审阅了全书并提出非常宝贵的意见.在本书的编写过程中，采纳了诸多同行的有价值的建议，在此一并表示最诚挚的谢意.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正，以便不断完善.

目　　录

1　函数 ………………………………… 1
1.1　集合 ………………………………… 1
1.1.1　集合的概念 ………………… 1
1.1.2　集合的运算 ………………… 1
1.1.3　区间和邻域 ………………… 2
习题 1.1 ………………………………… 3
1.2　函数 ………………………………… 3
1.2.1　函数的概念 ………………… 3
1.2.2　反函数 ……………………… 5
习题 1.2 ………………………………… 5
1.3　函数的基本性质 ………………… 6
1.3.1　函数的奇偶性 ……………… 6
1.3.2　函数的周期性 ……………… 6
1.3.3　函数的单调性 ……………… 7
1.3.4　函数的有界性 ……………… 7
习题 1.3 ………………………………… 8
1.4　初等函数 ………………………… 8
1.4.1　基本初等函数 ……………… 8
1.4.2　复合函数 ………………… 12
1.4.3　初等函数 ………………… 13
习题 1.4 ……………………………… 13
1.5　函数关系的建立　双曲函数 …… 13
1.5.1　函数关系的建立 ………… 13
1.5.2　双曲函数 ………………… 14
习题 1.5 ……………………………… 16
总习题一 ……………………………… 16

2　极限与连续 ……………………… 18
2.1　数列的极限 ……………………… 18
2.1.1　数列的概念与性质 ……… 18
2.1.2　数列的极限 ……………… 19
2.1.3　数列极限的性质 ………… 20
习题 2.1 ……………………………… 21
2.2　函数的极限 ……………………… 21
2.2.1　函数极限的定义 ………… 21
2.2.2　函数极限的性质 ………… 25
习题 2.2 ……………………………… 25
2.3　无穷小与无穷大 ………………… 26
2.3.1　无穷小 …………………… 26
2.3.2　无穷大 …………………… 27
习题 2.3 ……………………………… 29
2.4　极限的运算法则 ………………… 29
2.4.1　极限的四则运算法则 …… 29
2.4.2　复合函数的极限运算法则 ……………………………… 31
习题 2.4 ……………………………… 32
2.5　极限存在准则　两个重要极限 ……………………………… 32
2.5.1　夹逼准则 ………………… 32
2.5.2　重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 33
2.5.3　单调有界准则 …………… 35
2.5.4　重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ ……………………………… 35
2.5.5　连续复利 ………………… 37
习题 2.5 ……………………………… 37
2.6　无穷小的比较 …………………… 38
习题 2.6 ……………………………… 39
2.7　函数的连续性 …………………… 40
2.7.1　函数的连续性 …………… 40
2.7.2　函数的间断点 …………… 41
2.7.3　连续函数的运算与初等函数的连续性 ………………… 43
习题 2.7 ……………………………… 45

2.8 闭区间上连续函数的性质 ········ 46
2.8.1 最大值和最小值定理与有界性 ········ 46
2.8.2 零点定理与介值定理 ········ 47
习题 2.8 ········ 48
总习题二 ········ 48

3 导数与微分 ········ 50
3.1 导数的概念 ········ 50
3.1.1 两个引例 ········ 50
3.1.2 导数的定义 ········ 51
3.1.3 导数的几何意义 ········ 55
3.1.4 函数的可导性与连续性的关系 ········ 55
习题 3.1 ········ 56
3.2 函数的求导法则与求导公式 ········ 57
3.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 ········ 57
3.2.2 反函数的求导法则 ········ 59
3.2.3 复合函数的求导法则 ········ 60
3.2.4 基本求导法则与导数公式 ········ 61
习题 3.2 ········ 63
3.3 高阶导数 ········ 64
习题 3.3 ········ 67
3.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 ········ 67
3.4.1 隐函数的导数 ········ 67
3.4.2 由参数方程所确定的函数的导数 ········ 69
习题 3.4 ········ 71
3.5 函数的微分 ········ 72
3.5.1 微分的定义 ········ 72
3.5.2 微分的几何意义 ········ 74
3.5.3 基本初等函数的微分公式与微分的运算法则 ········ 75
3.5.4 微分在近似计算中的应用 ········ 76
习题 3.5 ········ 78
总习题三 ········ 79

4 中值定理及导数应用 ········ 81
4.1 中值定理 ········ 81
4.1.1 罗尔定理 ········ 81
4.1.2 拉格朗日中值定理 ········ 82
4.1.3 柯西中值定理 ········ 85
习题 4.1 ········ 86
4.2 洛必达法则 ········ 87
4.2.1 $\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$未定式的极限 ········ 87
4.2.2 其他未定式的极限 ········ 89
习题 4.2 ········ 91
4.3 函数的单调性与极值 ········ 91
4.3.1 函数单调性的判别法 ········ 91
4.3.2 函数的极值 ········ 93
习题 4.3 ········ 97
4.4 函数的最大值与最小值 ········ 98
习题 4.4 ········ 99
4.5 曲线的凹凸性及函数图形的描绘 ········ 100
4.5.1 曲线的凹凸性及拐点 ········ 100
4.5.2 曲线的渐近线 ········ 103
4.5.3 函数图形的描绘 ········ 104
习题 4.5 ········ 106
4.6 泰勒公式 ········ 107
习题 4.6 ········ 110
4.7 弧微分 曲率 ········ 110
4.7.1 弧微分 ········ 110
4.7.2 曲率 ········ 111
习题 4.7 ········ 115
总习题四 ········ 115

5 不定积分 ········ 117
5.1 不定积分的概念和性质 ········ 117
5.1.1 原函数与不定积分的概念 ········ 117
5.1.2 不定积分的几何意义 ········ 118
5.1.3 基本积分表 ········ 118

5.1.4　不定积分的性质 ………… 119
习题 5.1 ………………………… 121
5.2　换元积分法 ………………… 121
5.2.1　第一换元积分法(凑微分法)……………………… 121
5.2.2　第二换元积分法 ………… 125
习题 5.2 ………………………… 129
5.3　分部积分法 ………………… 129
习题 5.3 ………………………… 132
5.4　有理函数的不定积分 ……… 133
5.4.1　有理函数与有理函数的不定积分 ………………… 133
5.4.2　三角函数有理式的不定积分 ……………………… 135
习题 5.4 ………………………… 136
总习题五……………………… 136

6　定积分 ………………………… 138
6.1　定积分的概念 ……………… 138
6.1.1　定积分概念产生的背景 … 138
6.1.2　定积分的定义 …………… 139
6.1.3　定积分的几何意义 ……… 141
习题 6.1 ………………………… 141
6.2　定积分的性质 ……………… 142
习题 6.2 ………………………… 144
6.3　微积分基本公式 …………… 144
6.3.1　积分上限的函数及其导数 ……………………………… 145
6.3.2　微积分基本公式 ………… 146
习题 6.3 ………………………… 147
6.4　定积分的计算 ……………… 148
6.4.1　定积分的换元积分法 …… 148
6.4.2　定积分的分部积分法 …… 151
习题 6.4 ………………………… 153
6.5　广义积分与 Γ 函数 ……… 153
6.5.1　无穷限的广义积分 ……… 153
6.5.2　无界函数的广义积分 …… 155
6.5.3　Γ 函数 ………………… 156
习题 6.5 ………………………… 157
6.6　定积分的应用 ……………… 157
6.6.1　定积分的元素法 ………… 158
6.6.2　平面图形的面积 ………… 159
6.6.3　平面曲线的弧长 ………… 162
6.6.4　旋转体的体积与侧面积 … 163
6.6.5　平行截面面积为已知的立体的体积 ……………………… 164
6.6.6　定积分在物理上的应用 … 165
习题 6.6 ………………………… 167
总习题六……………………… 168

7　多元函数微分学 …………… 171
7.1　空间解析几何简介 ………… 171
7.1.1　空间直角坐标系 ………… 171
7.1.2　空间两点间的距离 ……… 172
7.1.3　n 维空间 ……………… 172
7.1.4　空间曲面及其方程 ……… 173
习题 7.1 ………………………… 176
7.2　多元函数的基本概念 ……… 176
7.2.1　平面点集 ………………… 176
7.2.2　二元函数的概念 ………… 177
7.2.3　二元函数的极限与连续 … 178
7.2.4　n 元函数的概念 ……… 180
习题 7.2 ………………………… 180
7.3　偏导数 ……………………… 180
7.3.1　偏导数的定义 …………… 180
7.3.2　偏导数的几何意义及函数连续性与可偏导性的关系 ……………………………… 182
7.3.3　高阶偏导数 ……………… 183
习题 7.3 ………………………… 183
7.4　全微分 ……………………… 184
7.4.1　全微分的定义 …………… 184
7.4.2　函数可微分的条件 ……… 184
7.4.3　微分在近似计算中的应用 ……………………………… 186
习题 7.4 ………………………… 187
7.5　复合函数与隐函数微分法 … 187
7.5.1　复合函数的微分法 ……… 187

7.5.2 隐函数的微分法 ………… 190
习题 7.5 ………………………… 191
7.6 多元函数的极值问题 ………… 191
7.6.1 多元函数极值 ………… 192
7.6.2 条件极值与拉格朗日乘数法 ………… 194
习题 7.6 ………………………… 197
总习题七 ………………………… 198

8 二重积分 ………………………… 200
8.1 二重积分的概念与性质 ……… 200
8.1.1 二重积分的概念 ………… 200
8.1.2 二重积分的性质 ………… 202
习题 8.1 ………………………… 203
8.2 二重积分的计算 ……………… 203
8.2.1 在直角坐标系下计算二重积分 ………… 203
8.2.2 在极坐标系下计算二重积分 ………… 207
8.2.3 广义二重积分 ………… 210
习题 8.2 ………………………… 211
总习题八 ………………………… 212

9 无穷级数 ………………………… 215
9.1 常数项级数的概念和性质 …… 215
9.1.1 常数项级数的概念 ……… 215
9.1.2 级数的基本性质 ………… 218
习题 9.1 ………………………… 221
9.2 正项级数的审敛法 …………… 221
习题 9.2 ………………………… 227
9.3 任意项级数及其审敛法 ……… 228
9.3.1 交错级数的收敛性 ……… 228
9.3.2 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 ………… 229
习题 9.3 ………………………… 231
9.4 幂级数 ………………………… 231
9.4.1 函数项级数的一般概念 … 231
9.4.2 幂级数及其收敛性 ……… 232
9.4.3 幂级数的运算性质 ……… 237
习题 9.4 ………………………… 238
9.5 函数展开成幂级数 …………… 239
9.5.1 泰勒(Taylor)级数 ……… 239
9.5.2 函数展开成幂级数的方法 ………… 241
习题 9.5 ………………………… 246
9.6 函数的幂级数展开式的应用 ………… 246
9.6.1 函数值的近似计算 ……… 246
9.6.2 欧拉公式 ………………… 248
习题 9.6 ………………………… 249
总习题九 ………………………… 249

10 常微分方程 ………………………… 252
10.1 常微分方程的基本概念 ……… 252
习题 10.1 ………………………… 254
10.2 一阶微分方程 ………………… 255
10.2.1 可分离变量的微分方程 ………… 255
10.2.2 齐次方程 ………………… 256
10.2.3 一阶线性微分方程 ……… 258
10.2.4* 贝努利方程 ……………… 260
习题 10.2 ………………………… 261
10.3 可降阶的二阶微分方程 ……… 262
10.3.1 $y''=f(x)$ 型的微分方程 ………… 262
10.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 ………… 262
10.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 ………… 263
习题 10.3 ………………………… 264
10.4 二阶线性微分方程解的结构 ………… 264
习题 10.4 ………………………… 267
10.5 二阶常系数线性微分方程 ………… 267
10.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程及其解法 ………… 267
10.5.2 二阶常系数非齐次线性微

分方程及其解法 ………… 269
习题 10.5 ………………………… 275
10.6 微分方程的应用举例 ………… 275
习题 10.6 ………………………… 279
总习题十 ……………………………… 279

附录　习题参考答案与提示 …………… 281
参考文献 ………………………………… 297

1 函　数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象．中学时，我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解．在本章中，我们将进一步阐明函数的一般定义，介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念，这些都是学习本课程的基础．

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念．例如某校一年级的全体学生构成一个集合，某个书柜的全部藏书构成一个集合，全体实数构成一个集合等．

一般地，我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做**集合**．把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的**元素**．

习惯上，用大写拉丁字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示集合的元素．对于给定的集合来说，它的元素是确定的．如果 a 是集合 A 中的元素，则用 $a\in A$ 来表示；如果 a 不是集合 A 中的元素，则用 $a\notin A$ 来表示．

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限多个元素的集合称为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$．

表示集合的方法主要有两种，一种是列举法，就是把集合的所有元素一一列举出来，写在花括号内．例如，方程 $x^2-4=0$ 的解构成的集合可表示为 $A=\{-2,2\}$．另一种是描述法，就是指出集合的元素所具有的性质．一般地，将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有某种性质}\}.$$

例如，方程 $x^2-4=0$ 的解集也可以表示为 $A=\{x\mid x^2-4=0\}$．

元素为数的集合称为数集，通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集．有时在表示数集的字母右上角添“＋”、“－”等上标，来表示该数集的几个特定子集．以实数为例，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集；$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数集，其他数集的情况类似，不再赘述．

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．

若集合 A 与 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

1.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算，即并、交、差．

设有集合 A 与 B，它们的并集记作 $A\cup B$，定义为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的交集记作 $A\cap B$,定义为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的差集记作 $A\backslash B$,定义为

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

有时,我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**,并用 $\boldsymbol{I}$ 表示,把差集 $I\backslash A$ 特别称为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^c. 例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x \mid |x|<1\}$ 的余集为 $A^c=\{x\mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律　$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

　　　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

　　　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿(Descartes)乘积**. 设 A,B 是任意的两个集合,则 A 与 B 的直积记作 $A\times B$,定义为如下的由有序对 (a, b) 组成的集合:

$$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$,即为 xOy 平面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

1.1.3　区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为**开区间**,记作 (a, b),即

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点. 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点. 类似地有

$$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},\ [a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$(a, b]$, $[a, b)$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**,$b-a$ 的值称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限值的线段. 闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上表示方法分别如图 1-1(a)和(b)所示. 此外还有无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可用类似的记号表示无限区间. 例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},\ (-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1 - 1(c)和(d)所示.

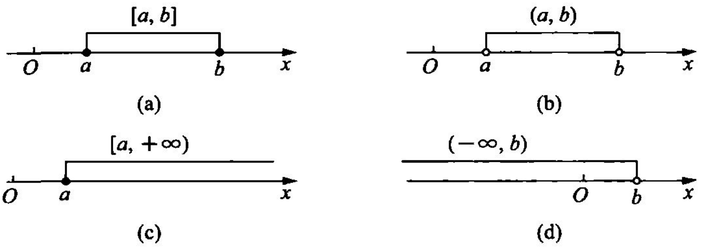

图 1 - 1

实数集$\{x\,\big|\,|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$称为**点 a 的 δ 邻域**,记为$U(a,\delta)$,点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径,它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1 - 2 所示.

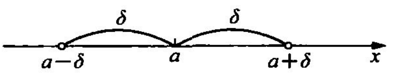

图 1 - 2

实数集$\{x\,\big|\,0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的去心 δ 邻域,记作$\mathring{U}(a,\delta)$. 为了方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的左 δ 邻域,开区间$(a,a+\delta)$称为点 a 的右 δ 邻域. 当不需要强调邻域的半径时,可用 $U(a)$和$\mathring{U}(a)$分别表示点 a 的某个邻域和某个去心邻域.

习题 1.1

1. 如果 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2\}$,下列各种写法哪些是对的? 哪些是不对的?

$1\in A$; $0\notin B$; $\{1\}\in A$; $1\subset A$; $\{1\}\subset A$; $0\subset A$; $\{0\}\subset A$; $\{0\}\subset B$; $A=B$; $A\supset B$; $\varnothing\subset A$; $A\subset A$.

2. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$,求:

(1) $A\cup B$;　(2) $A\cap B$;　(3) $A\cup B\cup C$;

(4) $A\cap B\cap C$;　(5) $A\setminus B$.

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x|\leqslant 3$;　(2) $|x-2|\leqslant 1$;　(3) $|x-a|<\varepsilon$(a 为常数,$\varepsilon>0$);

(4) $|x|\geqslant 5$;　(5) $|x+1|>2$.

4. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

(1) $A=\{x\,\big|\,|x+2|<2\}$;　(2) $B=\{x\,\big|\,1<|x-2|<3\}$.

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

函数是变量之间满足一定条件的一种对应关系. 在中学数学中也学习过函数,现在我们把函数的概念叙述如下.

定义 1 设有两个变量 x 与 y, D 为一个非空实数集. 如果存在一个确定的法则(或称对应法则)f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**一元函数**,简称**函数**,记为 $y=f(x)$, D 称为 $f(x)$的**定义域**. 函

数 $f(x)$的定义域 D 通常记为 $D(f)$.

对于 $x_0\in D(f)$，由法则 f 所对应的实数值 y 称为 $f(x)$在点 x_0 处的函数值，通常记为 $f(x_0)$，有时也记为 $y|_{x=x_0}$，此时也称函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义. 全体函数值组成的集合称为函数 $f(x)$的**值域**，通常记为 $R(f)$，即

$$R(f)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D(f)\}.$$

从函数的定义来看，当定义域与对应法则确定后，函数就完全确定了. 可见定义域与对应法则是确定函数的两个要素，因此，对于函数 $f(x)$、$g(x)$，如果它们有相同的定义域和对应法则，它们就是同一个函数.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法(公式法). 其中，图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,\ y)\,|\,y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$的图形如图 1-3 所示.

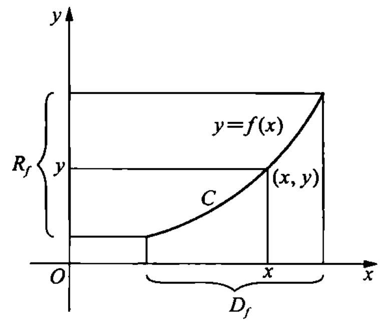

图 1-3

对于由解析式表示的函数，其定义域一般是指使得函数表达式有意义的自变量取值的全体，这种定义域也称为函数的**自然定义域**.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域.

解　当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$，即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$ 时，函数$\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$才有意义，因此，$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域为

$$D(f)=\left(\frac{2}{3},\ 1\right)\cup(1,\ +\infty).$$

例 2　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域.

解　当 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$，即 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$ 时，函数 $\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$才有意义，因此函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域为

$$D(f)=[-4,\ 5).$$

在用解析法表示函数时，有一种特别的情形：函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数称为**分段函数**.

例如，函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义域为 $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $R(f)=[0,\ +\infty)$的一个函数，它的图形如图 1-4 所示. 当自变量 x 取$(-\infty,\ 0)$内的数值时，函数值由 $y=-x$ 确定；而当自变量 x 取$[0,\ +\infty)$内的数值时，函数值由 $y=x$ 确定，所以是一个分段函数.

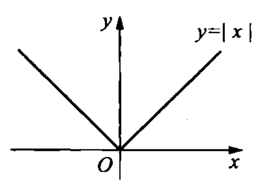

图 1-4

函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

也是分段函数，它的定义域为 $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $R(f)=\{-1,\ 0,\ 1\}$，图形如图 1-5 所示. 此函数也称为符号函数.

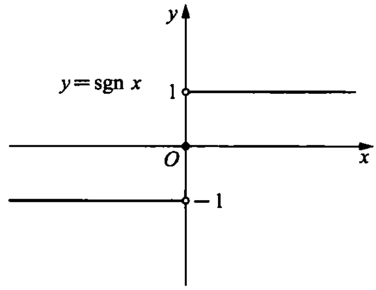

图 1-5

1.2.2 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D(f)$，值域是 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有唯一确定的 $x\in D(f)$ 与之对应，且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x=f^{-1}(y),\ y\in R(f),$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

显见 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是因变量. 但是习惯上，常用 x 作为自变量，y 作为因变量. 因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in R(f).$$

在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-6 所示.

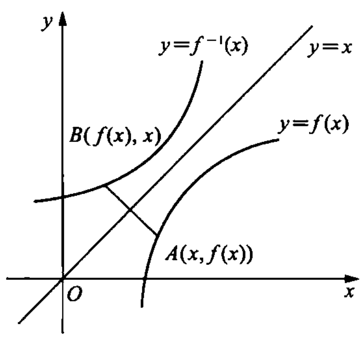

图 1-6

什么样的函数才有反函数呢？由定义可知，函数 $y=f(x)$ 具有反函数的充分必要条件是对应法则 f 使得定义域中的点与值域中的点是一个对一个的（简称一一对应）. 因为单调函数具有这种性质，所以单调函数必有反函数.

对于单调函数，求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，然后将 x 与 y 互换，便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

习题 1.2

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2,\ g(x)=2\ln x$； (2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\ g(x)=x-1$；

(3) $f(x)=x,\ g(x)=\sin(\arcsin x)$； (4) $f(x)=x,\ g(x)=e^{\ln x}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$； (2) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$； (3) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin(\ln\sqrt{1-x})$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$； (5) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$； (6) $y=1-e^{1-x^2}$.

3. 求下列分段函数的定义域,并画出函数的图形:

(1) $y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|<2\\ x^2-1, & 2\leqslant|x|<4\end{cases}$;　　(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x-3, & 0\leqslant x<1\\ -2x+1, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\leqslant1\\ x^2+1, & |x|>1\end{cases}$,求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1.5)$, $f(1+h)-f(1)$.

5. 求下列函数的反函数:

(1) $y=2x+1$;　(2) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$;　(3) $y=x^3+2$;　(4) $y=1+\ln(x+2)$.

1.3 函数的基本性质

1.3.1 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 $D(f)$关于原点对称.如果对于任何 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为**偶函数**;如果对于任何 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为**奇函数**.不是偶函数也不是奇函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

由定义知:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称,如图 1-7(a)和(b)所示.

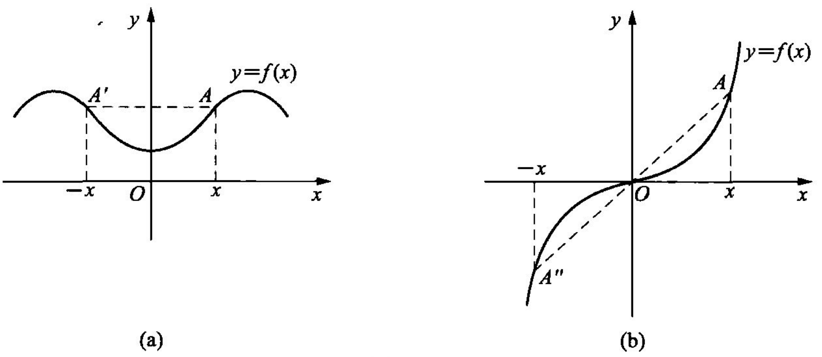

图 1-7

例如,$y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数;$y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数;而 $y=x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

1.3.2 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D(f)$,如果存在一个正数 l,使得对于任意 $x\in D(f)$,都有$(x\pm l)\in D(f)$,且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立,则称 $y=f(x)$为**周期函数**,l 称为 $f(x)$的**周期**,周期函数的周期通常是指**最小正周期**.

周期为 l 的函数,在其定义域内长度为 l 的区间上,函数图形具有相同的形状,如图 1-8所示.

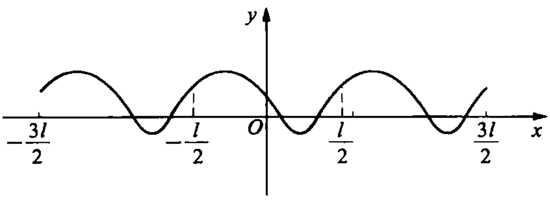

图 1－8

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

1.3.3　函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调增加**；当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调减少**.

例如，函数 $y=x^2$ 在$[0,\ +\infty)$内单调增加，在$(-\infty,\ 0]$内单调减少. 又如 $y=x^3$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内是单调增加的.

函数单调增加、单调减少统称**函数是单调的**. 从函数图形上看，单调增加的函数当 x 自左向右变化时，函数的图形逐渐上升；单调减少的函数当 x 自左向右变化时，函数的图形逐渐下降，如图 1－9 所示.

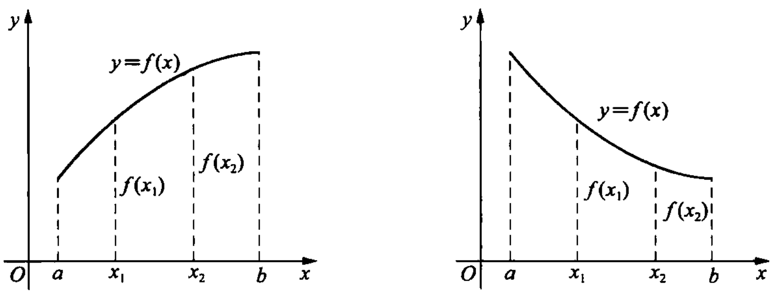

图 1－9

1.3.4　函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，当 $x\in I$ 时，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$为区间 I 上的**有界函数**，如图 1－10 所示；否则称函数 $f(x)$为区间 I 上的**无界函数**.

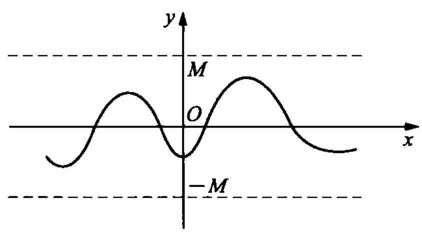

图 1－10

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内为有界函数，因为$|\sin x|\leqslant 1$ 对任何 $x\in(-\infty,\ +\infty)$都成立；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,\ 1)$内为无界函数，因为不存在正数 M，使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$

对于(0, 1)内的一切 x 都成立.

有的函数可能在定义域的某一部分内为有界函数，而在另一部分内为无界函数. 例如，函数 $y=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上为有界函数，而在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内为无界函数. 因此，我们说一个函数是有界函数或无界函数，应同时指出自变量的变化范围.

习题 1.3

1. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x$； (2) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}+\tan x$； (3) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(4) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$； (5) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$； (6) $f(x)=\cos(\ln x)$；

(7) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$； (8) $f(x)=x^2-x+1$.

2. 判断下列函数是否为周期函数，如果是周期函数，求其周期：

(1) $f(x)=\sin(2x+3)$； (2) $f(x)=x\cos x$；

(3) $f(x)=\sin^2 x$； (4) $f(x)=1+|\sin 2x|$.

3. 讨论下列函数的单调性(指出其单调增加区间和单调减少区间)：

(1) $y=e^{ax}\ (a\neq 0)$； (2) $y=\sqrt{4x-x^2}$；

(3) $y=x^3+1$； (4) $y=x+\frac{1}{x}$.

4. 判断下列函数的有界性：

(1) $y=\frac{x}{1+x^2}$； (2) $y=\sin\frac{1}{x}$； (3) $y=x\cos x$.

1.4 初等函数

1.4.1 基本初等函数

我们把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数称为**基本初等函数**. 下面分别介绍这些函数的表达式、定义域及图形.

1. 常数函数

函数
$$y=C\quad (C\text{ 为常数})$$
称为**常数函数**，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，图形如图 1-11 所示，是一条平行于 x 轴的直线.

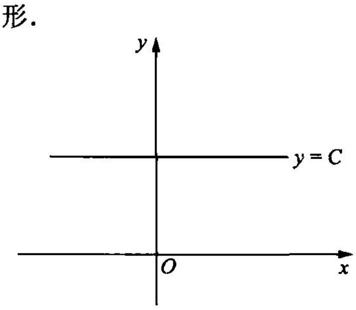

图 1-11

2. 幂函数

函数
$$y=x^{\mu}\quad (\mu\text{ 是常数})$$
称为**幂函数**. 其定义域随 μ 的不同而相异，但不论 μ 取何值，$y=x^{\mu}$ 在$(0, +\infty)$内总有定义，并且图形都经过点(1, 1). 图 1-12(a)和(b)为几个不同的幂函数在$(0, +\infty)$内的图形，图 1-12(c)为幂函数 $y=x^{-1}$ 的图形.