新世纪应用型高等教育
基础类课程规划教材

微积分

新世纪应用型高等教育教材编审委员会 组编

主编 杜明银 屠凡超 赵 娜

大连理工大学出版社

新世纪应用型高等教育
基础类课程规划教材

新世纪

微积分

WEIJIFEN

新世纪应用型高等教育教材编审委员会 组编
主编 杜明银 屠凡超 赵 娜

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 杜明银，屠凡超，赵娜主编. — 大连 ：
大连理工大学出版社，2013.9
新世纪应用型高等教育基础类课程规划教材
ISBN 978-7-5611-8157-7

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杜… ②屠… ③赵… Ⅲ. ①微积分
—高等教育—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 196163 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：17.25　字数：399 千字
印数：1～2000
2013 年 9 月第 1 版　　2013 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：欧阳碧蕾　　责任校对：周双双
封面设计：张　莹

ISBN 978-7-5611-8157-7　　定　价：36.00 元

前 言

《微积分》是新世纪应用型高等教育教材编审委员会组编的基础类课程规划教材之一。

数学是科学的基本语言,是表达工程技术原理,进行复杂工程设计和计算必不可少的工具。随着计算机技术的快速发展,数学的社会化程度日益提高。现代化产业和经济的组织与管理离不开数学所提供的方法和技术。因此,微积分作为基础课程在大学教育中占有举足轻重的地位。

本教材是根据《经济管理类本科数学基础课程数学基本要求》,结合应用型本科微积分课程教学的实际情况,汲取全国同类课程其他教材的优点编写而成的。本教材注重适当渗透现代数学思想,理论联系实际,加强对学生应用数学知识和方法解决经济问题的能力的培养,以适应现代经济科学对经济人才数学素质的要求。本教材在具体内容的安排上具有以下特点:

1. 保持体系完整。全书结构严谨,强调科学性、系统性和准确性,内容由浅入深、循序渐进、通俗易懂,努力突出微积分的基本思想和基本方法:一方面使学生能够较好地了解各部分内容的内在联系,整体上把握微积分的思想和方法;另一方面,培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 追求简明实用。删去了一些繁琐的理论证明,直接从客观世界所提供的模型和原理中导出微积分的基本概念、法则和公式,使表达更加简明,突出数学的基本概念和基本方法,突出数学的基本思想和应用背景,尽量用数学概念、理论、方法去解释、说明经济学、管理学的相关概念、理论;培养学生用微积分的思想和方法分析、解决实际问题的能力,突出数学的应用性。

3.体现经济管理特色。较多地设置了经济管理方面的实例，突出微积分在经济管理科学中的应用，促进了微积分与经管专业课程的结合，为学生学习专业知识奠定了基础。

本教材是河南理工大学万方科技学院集体智慧的结晶，由杜明银、屠凡超、赵娜担任主编，贾秀玲、路莉娟、黄海松、李娜、吴秀才、蒋文丽参加了教材的编写工作。具体编写分工如下：第一章由屠凡超编写，第二章由吴秀才编写，第三章由蒋文丽编写，第四章由路莉娟编写，第五章由赵娜编写，第六章由贾秀玲编写，第七章由李娜编写，第八章由黄海松编写。全书由杜明银、屠凡超和赵娜统稿。

在本教材的编写过程中，黄锦斌教授、刘正帅教授提出了许多意见并给予了大力帮助，在此表示衷心感谢。

由于时间仓促，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请各位同行和读者不吝赐教。

编　者

2013年9月

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com

欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com

联系电话：0411-84708445　84708462

目　录

第一章

函数、极限与连续

微积分的主要研究对象是函数，所谓函数关系就是变量与变量之间的相互依存关系. 研究微积分的主要工具是极限，极限方法是研究变量的一种基本方法，极限的概念和运算从理论上贯穿于微积分的始终. 本章介绍函数、函数的极限和函数的连续性等基本概念，为全书的学习打好基础.

第一节 函 数

一、集合

(一)集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 在这里我们给出集合的描述性定义.

所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体，简称集. 组成这个集合的事物称为集合的元素，简称元.

集合一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，元素一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 元素 a 属于集合 M，记作 $a\in M$，元素 a 不属于集合 M，记作 $a\notin M$.

一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集；否则称为无限集. 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

集合有以下几种表示法.

列举法：把集合里的元素一一列举出来写在大括号里.

例如，由元素 1、2、3、4、5、6 所组成的集合，可表示为

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集，可表示为

$$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}.$$

对于数集，为了方便，有时用 A^* 表示由数集 A 内的非零元素组成的集合，用 A^+ 表示由数集 A 内的正数组成的集合.

常用数集有：

自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

整数集 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

有理数集 $\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q},p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}$，且 p 与 q 互质$\}$；

实数集 $\mathbf{R}$.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，那么 A 就是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等. 记为 $A=B$.

例如，设

$$A=\{1,2\},B=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $A\subset B$. 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

规定：空集 $\varnothing$ 是任何集合 B 的子集，即 $\varnothing\subseteq B$.

（二）集合的运算

集合的基本运算有以下几种：

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集（简称并）. 记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交）. 记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{2,4,6,8,10\}$. 则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\},$$
$$A\cap B=\{2,4,6\},$$
$$A-B=\{1,3,5\}.$$

有时，我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时，我们称集合 I 是全集或基本集，称 $I-A$ 是 A 的余集或补集，记作 A^{C}.

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的补集就是

$$A^{C}=\{x\mid x<0\text{ 或 }x>1\}.$$

集合运算有如下性质：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4)对偶律：$(A \cup B)^{C} = A^{C} \cap B^{C}$；$(A \cap B)^{C} = A^{C} \cup B^{C}$.

(三)区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，我们定义

开区间(如图 1-1(a)所示) $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；

闭区间(如图 1-1(b)所示) $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

半开半闭区间(如图 1-1(c)(d)所示) $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$.

无限区间(如图 1-1(e)(f)所示) $(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$.

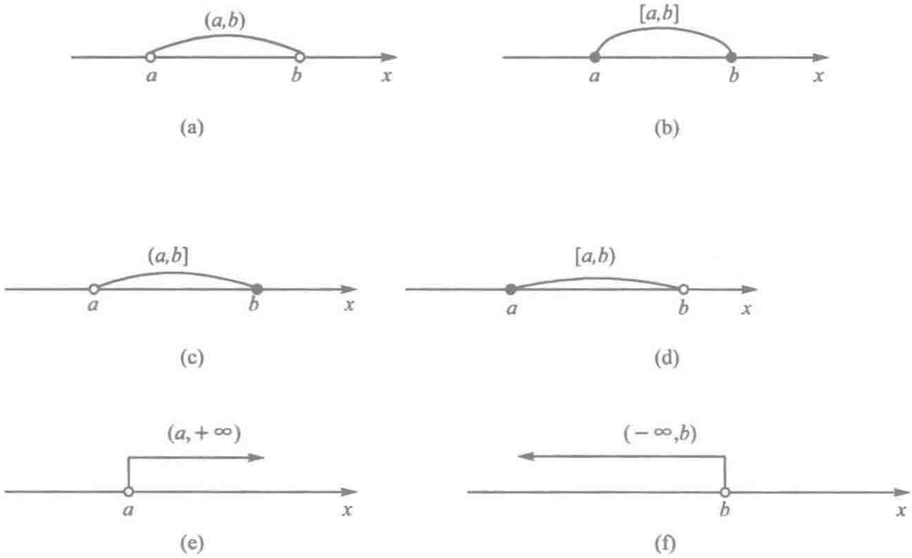

图 1-1

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$.

以后在不需要辨明区间种类的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域(如图 1-2 所示)，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径.

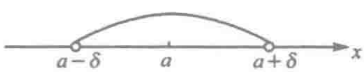

图 1-2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的去心 δ 邻域(如图 1-3 所示)，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0 < |x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

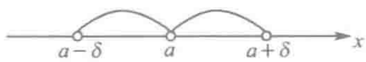

图 1-3

二、函数的概念

在研究实际问题时,往往要讨论在某个变化过程中多个变量之间的相互关系,这就是我们要研究的函数关系.

【例 1】 根据国家统计局公布的统计数据,我国 2000—2005 年的国内生产总值(GDP)如表 1-1 所示.

表 1-1

t(年份)	2000	2001	2002	2003	2004	2005
GDP(亿元)	99214.6	109665.2	120332.7	135822.8	159878.3	183084.8

由表 1-1 可以看出如下规律:随着年份 t 的增加,我国 GDP 在不断增长. 对任何年份 $t \in \{2000,2001,2002,2003,2004,2005\}$,由表 1-1 所示的对应法则可唯一确定该年的 GDP.

【例 2】 设某商店购进猪肉 400 kg,进货价为每千克 9 元,销售价为每千克 12 元,当售出的数量为 x kg 时,其销售的利润 L 可按公式

$$L=12x-9x=3x,\ x \in [0,400]$$

算出唯一确定的值.

上面两个例子的实际意义虽然不同,但它们都是通过一定的对应法则来反映两个变量之间的相互依赖关系,由此引出函数的定义.

定义 1 设 D 是一个非空的实数集合,如果存在一个对应法则 f,使得对任意的 $x \in D$,按照法则 f,都能唯一地确定一个实数 y,则称法则 f 为定义在 D 上的函数. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量. D 称为函数 f 的定义域.

对于给定的 $x_0 \in D$,称因变量 y 的对应值 y_0 为 x_0 所对应的函数值,记为 $y_0 = f(x_0)$,因此,对任意的自变量 $x \in D$ 所对应的函数值 y 可记为

$$y = f(x), x \in D.$$

全体函数值构成的集合,称为函数的值域. 记为

$$R = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

注意:按定义,函数是指定义域 D 上的对应法则 f,而 $f(x)$ 为函数值. 但为了方便起见,习惯上称 $f(x)$ 为 x 的函数或 y 是 x 的函数.

从上述定义可以看到,定义域和对应法则是函数的两个要素,如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的;否则,就是不同的. 例如,函数 $y =$

$1+x^2$ 与 $x=1+y^2$ 的定义域都是 $D=\mathbf{R}$，且对任意 $a\in\mathbf{R}$，两个函数都有相同的实数 $1+a^2$ 与之对应，即有相同的对应法则，故是两个相同的函数. 但函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$ 与 $y=\dfrac{x}{(1+x)x}$，由于定义域不同，故是两个不同的函数. 对函数 $y=\sqrt{1-\sin^2x}=|\cos x|$ 与 $y=\cos x$，由于对应法则不同，故是两个不同的函数.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据变量的实际背景确定. 如：例 2 中函数 $L=3x$ 的定义域为$[0,400]$，这种定义域称为函数的实际定义域；另一种是对抽象的用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域为使算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 如：函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为闭区间$[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,1)$.

常用的函数表示法有三种：图示法，表格法与公式法(解析法).

图示法使函数的变化特征直观明了；表格法(如经济统计表等)便于求函数值；而公式法便于分析与运算，是用得最多的一种方法. 这三种函数表示法各有优缺点，在研究实际问题时，常将它们结合起来使用.

在平面直角坐标系中，点集

$$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

例如，函数 $y=x^2,x\in(-\infty,+\infty),y\in[0,+\infty)$ 和函数 $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的图形如图 1-4(a)(b)所示.

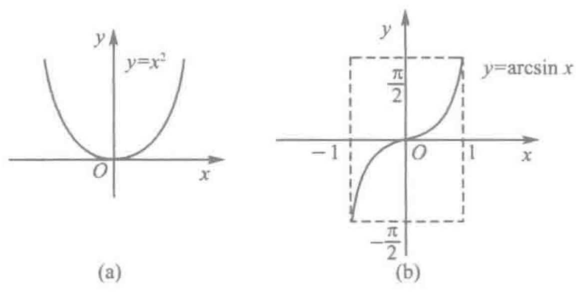

图 1-4

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$，如果存在一个正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对于任意的 $x\in I$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 否则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，$y=\sin x$ 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,2)$ 内有界(如图 1-5 所示).

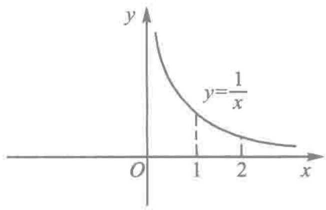

图 1-5

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(如图 1-6(a)所示).

如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(如图 1-6(b)所示).

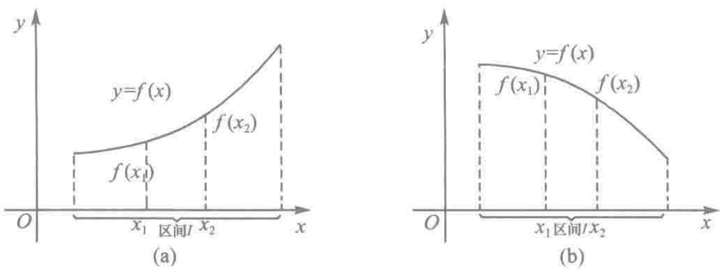

图 1-6

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加；在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调减少；在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x \in D$，

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任意 $x \in D$，

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$f(x) = x^2$，$f(x) = \cos x$ 是偶函数；$f(x) = x^3$，$f(x) = \sin x$ 是奇函数；$f(x) = \sin x + \cos x$ 既非奇函数，也非偶函数；$f(x) = 0$ 既是奇函数，也是偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-7(a)所示)；奇函数的图形关于原点对称(如图 1-7(b)所示).