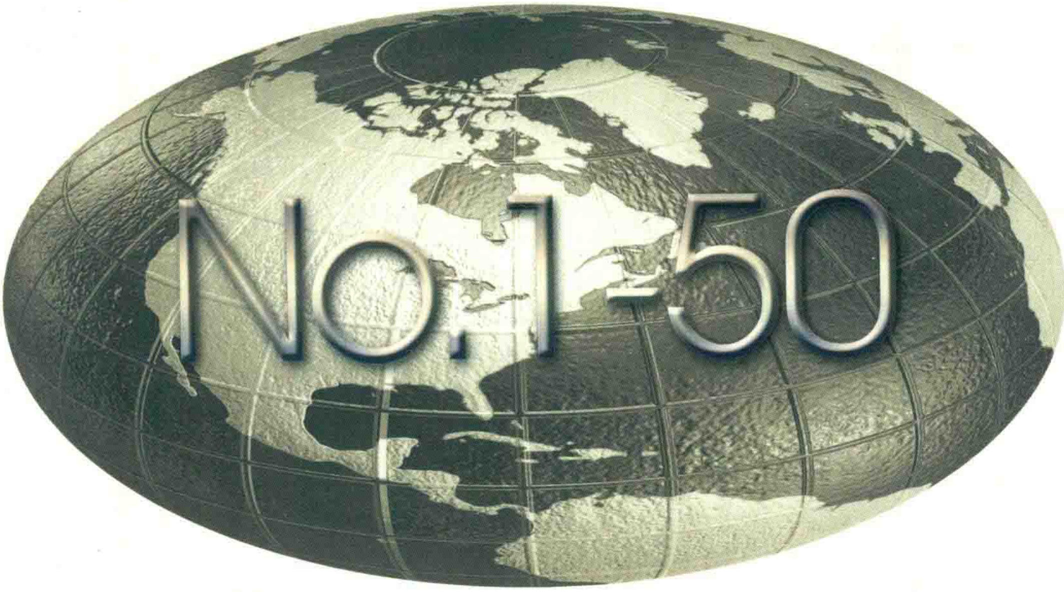
1-50 International Mathematical Olympiads

IMO



国际数学奥林匹克

试题 解答 成绩

主编 裘宗沪 冷岗松

开明出版社

1-50 International Mathematical Olympiads

IMO

国际数学奥林匹克

试题 解答 成绩

岗松

开明出版社

写在前面

IMO 五十周岁了.

第 50 届 IMO 在德国不来梅市举行. 中国队六名队员都获得了金牌并总分居第一位. 自 1989 年，亦是在德国，中国首次取得了总分第一以来，这是第十五次取得总分第一，第九次六名队员全金(俄罗斯二次，美国、保加利亚各一次). 说说成绩，主要表明业内人士辛劳之果. 我想起了林群院士为一次数学竞赛的题词“结果虽荣耀，过程更重要”.

“五十知天命”，50 年来 IMO 的过程是流畅的，从第一届只有七个国家参加，至今参赛的国家和地区已经过百. 应该说极大多数国家对它是欢迎的，因此自然有积极的教育意义，不仅对有数学才华的学生，而且对多数学生都是有特殊的意义. IMO 的试题，是各国领队讨论商定，我认为它有三个特点：一、与时俱进；二、适合多数国家，简明富有启迪；三、尊重教育规律. 我国从 1980 年中国数学会普及工作委员会成立起，大连会议是第一次全国来讨论数学竞赛，就确定中学生数学竞赛是面向群众性的课外活动，并确立了一个目的，要参加国际数学奥林匹克. 嗣后，业内人士一直认为它是很多人参加做一件普通事，因此常怀“平常心”. 可是现在数学奥林匹克似乎被异化，并且简称为“奥数”. 时有批评之声鹊起. 一项群众性活动总有这样那样的特点.

我们是欢迎批评的，而且努力改正.

最近有一位教育界的教授，说“奥数”是“黄、赌、毒”“海盗”，明白人自然知道他骂的不是我们从事的数学奥林匹克活动，但我还是要说一下，“黄、赌、毒”“海盗”是刑法要追究的，在改革开放的 30 年后，竟然还有人混淆两类不同性质的矛盾，而且谩骂也有失教授斯文. 要扩大影响，也不必如此耸人听闻，否则会影响社会和谐.

感谢开明出版社及时替我们出版这份资料，感谢国内外所有支持和帮助过我们活动的人们！

裘宗沪

2006 版前言

这是一本资料集，简明地反映了国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad，简称 IMO)的成长与发展. IMO 最初仅有 7 个参赛国，今年已有九十多个国家和地区参加，共举行了 46 届. 这份资料系统地介绍了第 1 至 46 届 IMO 的试题、解答和成绩，因此是一份有意义的历史资料. 它的题目，从某一个侧面反映出数学教学内容的时代演变. 早期的题目中，有些方程的求解、尺规作图等自然地消失，这是数学教师认知上的不断进步. 今天的参赛者更需要机智. 几十年来，有些国家提出要扩大 IMO 试题的范围，例如增加微积分，但是大多数国家始终没有认同，坚持"微积分之前"的界线. 这样一来，从深度和广度的发掘，出题似乎越来越困难. 但是迄今为止，每年各国提供的试题总有一百多道题，从中又能选出 25～30 道比较有意思的题目供领队会议上选择，精彩的题目时有出现，穷神观化.

IMO 在遵循教学的自然规律下，不断地进步. 这给我们一个启示，几十年来，许多国家都出现了数学教学改革和课程改革，但能称道者寥寥无几. 借鉴 IMO 的历史进程，让我们感到，改革者是否是"欲速而不达"?

IMO 的早期是有立体几何题目，为什么后来没有了? 实际上各国提供的题目中是有的. 中国第一次参加的 1985 年就有立体几何，题目是很不错的. 但是许多国家的领队认为，没有向量做工具，是做不好立体几何题目的，而目前各国教材中向量的内容是很少的，因此极大多数的国家不太赞成立体几何题. IMO 中平面几何受到额外青睐，几乎每年都有两道题，因为电脑无论多么进步，几何直观还是需要的. 另外，平面几何的难易程度比较适中，是适合中学生掌握的. 目前，有些国家在教材中过分淡化平面几何是要慎重考虑的，而且有的国家已经为此后悔了.

这不是一本题解集，否则应从教学的角度好好讲讲解题的思路、方法、技巧. 这里，只是就题说解，有些题目的巧妙解答未必收集在内(例如，一些获得特别奖的解法)，也许平铺直述的解答给老师们、同学们和其他读者思考的空间更大一点.

国内在各层次为参加 IMO 作准备时，出现了很多题目，题海无边，是很难畅游的. 我们首先应该从 IMO 题目得到借鉴，毕竟是多数国家的领队们选出来的，这也是出这本书的目的之一. 我国在 IMO 中已获得了骄人的成绩，但是从数学竞赛试题的提出，与一些国家还存在差距，IMO 的试题可做参考的样本. IMO 所选的试题解答是很简明的，因此国内流行数学题以繁琐步骤作为难度的增添似乎是不可取的. 数学竞赛中什么样的题目是好题，也许从 IMO 中可以得到有益的启发.

本书由裘宗沪、冷岗松主编.参加本书编纂工作的有：

熊　斌(中国数学会奥林匹克委员会委员,华东师范大学教授)

唐立华(华东师范大学二附中特级教师)

冯志刚(上海中学特级教师)

司　林(上海大学冷岗松教授的博士生)

袁　俊(上海大学冷岗松教授的博士生)

我们在编集中参考了国内外许多资料,这里我们就不一一列出致谢.在搜集材料过程中,中国数学会奥林匹克委员会副主席吴建平先生给了我们很大帮助,谨致谢意.最后审定成稿时,浙江温州中学给予很大支持和帮助,深表感谢.

我们做得很匆忙,错误能免,请读者多多指正.打算在2009年,IMO的50周年时,在此基础上修正出一个更完善的版本.

编　者

2005年11月

目录

Contents

1959 第一届国际数学奥林匹克

7月23日至7月31日，罗马尼亚

试　题

Day 1

1. Prove that the fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ is irreducible for every natural number n. (POL)

2. For what real values of x is $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=A$ given

   (a) $A=\sqrt{2}$;

   (b) $A=1$;

   (c) $A=2$,

   where only non-negative real numbers are admitted for square roots? (ROU)

3. Let a, b, c be real numbers. Consider the quadratic equation in $\cos x$:

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0.$$

Using the numbers a, b, c form a quadratic equation in $\cos 2x$ whose roots are the same as those of the original equation. Compare the equation in $\cos x$ and $\cos 2x$ for $a=4$, $b=2$, $c=-1$.

(HUN)

Day 2

4. Construct a right triangle with given hypotenuse c such that the median drawn to the hypotenuse is the geometric mean of the two legs of the triangle. (HUN)

5. An arbitrary point M is selected in the interior of the segment AB. The squares $AMCD$ and $MBEF$ are constructed on the same side of AB, with segments AM and MB as their respective bases. The circles circumscribed about these squares, with centers P and Q, intersect at M and also at another point N. Let N' denote the point of intersection of the straight lines AF and BC.

   (a) Prove that N and N' coincide;

   (b) Prove that the straight lines MN pass through a fixed point S independent of the choice of M;

   (c) Find the locus of the midpoints of the segments PQ as M varies between A and B.

(ROU)

6. Two planes P and Q, intersect along the line l. The point A is given in the plane P, and the point C in the plane Q; neither of these points lies on the straight line l. Construct an isosceles trapezoid $ABCD$ (with $AB /\!/ CD$) in which a circle can be inscribed, and with vertices B and D lying in planes P and Q respectively. (CZS)

译　文

YIWEN

第一天

1. 对所有的正整数 n 证明：分数

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

不可约.

（波兰）

2. 在实数范围内，分别求解下面的三个方程：

$$\text{(a)}\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2};$$

$$\text{(b)}\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1;$$

$$\text{(c)}\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2.$$

（罗马尼亚）

3. 设实数 a，b，c，x 满足

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0.$$

试用 a，b，c 给出一个 $\cos 2x$ 满足的二次方程，在 $a=4$，$b=2$，$c=-1$ 的情况下比较这两个方程.

（匈牙利）

第二天

4. 直角三角形 ABC 的斜边 BC 长为 a，顶点 C 所对应的中线长为 AC 和 BC 长度的几何平均，试用直尺和圆规作出三角形 ABC.

（匈牙利）

5. 给定线段 AB 及 AB 上的一点 M. 在线段 AB 的同侧给定两个正方形 $AMCD$ 与 $MBEF$. 这两个正方形外接圆的圆心分别为 P 和 Q 并且它们相交于点 M，N.

(a)证明：直线 AF 和 BC 相交于点 N.

(b)对任意的点 M，证明：直线 MN 包含一个定点 S.

(c)当点 M 在线段 AB 上变化时，试找出线段 PQ 中点的轨迹.

（罗马尼亚）

6. 平面 P，Q 相交于直线 l. A，C 分别是 P，Q 上给定的两点，但 A，C 不在直线 l 上. 试在 P，Q 上分别找点 B，D 使得 $ABCD$ 是一个有内切圆的等腰梯形($AB/\!/CD$).

（捷克斯洛伐克）

解 答

JIEDA

1. 解法一 由下面的等式

$$2(21n+4)-3(14n+3)=-1,$$

可知 $21n+4$ 和 $14n+3$ 互素.

解法二 用反证法. 设分数$\frac{21n+4}{14n+3}$可约，$21n+4$ 与 $14n+3$ 的公因数为 d，d 为大于 1 的自然数，即 $21n+4$ 与 $14n+3$ 都能被 d 整除. 因为

$$21n+4=(14n+3)+(7n+1),$$

所以 $7n+1$ 能被 d 整除. 又因

$$14n+3=2(7n+1)+1,$$

所以 1 能被 d 整除，这与假设 d 为大于 1 的自然数相矛盾. 因此$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约.

2. 方程 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$的定义域为 $x\geqslant\frac{1}{2}$，且它的取值为正数. 因此方程 $f(x)=c$，$c>0$ 等价于$(f(x))^2=c^2$，对

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

两边取平方，我们可得

$$\begin{aligned}(f(x))^2&=x+\sqrt{2x-1}+x-\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2-(2x-1)}\\&=2x+2\sqrt{(x-1)^2}\\&=2(x+|x-1|).\end{aligned}$$

分情况讨论可得：

(a)$(f(x))^2=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

(b)$(f(x))^2=1$ 无解，当 $x\geqslant\frac{1}{2}$.

(c)$(f(x))^2=4\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

3. 将方程 $a\cos^2 x+c=-b\cos x$ 两边平方可得

$$a^2\cos^4 x+(2ac-b^2)\cos^2 x+c^2=0$$

将恒等式

$$\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$$

两边平方可得

$$\cos^4 x=\frac{1}{4}(\cos^2 2x+2\cos 2x+1).$$

由上面的三个等式，我们可得二次方程

$$a^2\cos^2 2x+2(a^2+2ac-b^2)\cos 2x+(a+2c)^2-2b^2=0.$$

当 $a=4$，$b=2$，$c=-1$ 时，已知方程为

$$4\cos^2 x+2\cos x-1=0,$$

$$a^2=16,\ 2(a^2+2ac-b^2)=8,\ (a+2c)^2-2b^2=-4,$$

我们得到关于 $\cos 2x$ 的方程：

$$4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0.$$

它与已知方程的系数相同.

这时已知方程的解为 $\cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，即有

$$x_1=k\cdot 360^\circ\pm 72^\circ,\ x_2=k\cdot 360^\circ\pm 144^\circ,$$

其中 k 为整数.

$$2x_1=2k\cdot 360^\circ\pm 144^\circ,\ 2x_2=2k\cdot 360^\circ\pm 288^\circ.$$

$$\cos 2x_1=\frac{-\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 2x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

显然满足作出的新方程.

4. 如图 1-1，三角形内接于直径为 $AB=c$ 的圆. 记外心为 O，那么中线 OC 长为$\frac{c}{2}$. 已知 $ab=\frac{c^2}{4}$，三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch,$$

其中 h 是从顶点 C 出发的高. 因此 $h=\frac{c}{4}$.

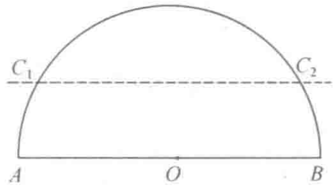


图 1-1

为了构造 C 点，只需作一条与 AB 平行且间距为$\frac{c}{4}$的平行线，该平行线交半圆于 C_1，C_2.

5. **解法一** 我们将在图中略去正方形的外接圆. 设 AF 与 BC 交于点 N，我们将证明 N 同时位于两个外接圆上，为此，只需证明 AN 与 BN 垂直.

记 $AB=a$，$AM=x$，$\angle FAM=\alpha$，$\angle MBN=\beta$，那么 $MB=MF=a-x$，$\tan\alpha=\dfrac{a-x}{x}$，$\tan\beta=\dfrac{x}{a-x}$，所以 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$，这样我们便得 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，因此$\angle ANB=\frac{\pi}{2}$.

设 S 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线交 MN 于点 T.

MN 与 AB 所成的角为

$$\angle SMT=\angle BMN=\angle MAN+\angle ANM=\alpha+\frac{\pi}{4},$$

所以 $\tan\angle SMT=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{2x-a}$. 另一方面

$$\tan\angle SMT=\frac{ST}{SM}=\frac{ST}{AM-AS}=\frac{ST}{x-\frac{a}{2}}=\frac{2ST}{2x-a}.$$

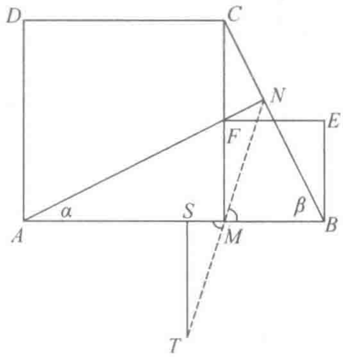


图 1-2

这样我们便得 $ST=\frac{a}{2}$，因此 T 是一个定点(如图 1-2).

题目的(c)部分与(a)(b)两部分无关. 设 G 是线段 PQ 的中点，如图 1-3，P'，Q'，G'分别是 P，Q，G 在线段 AB 上的垂直投影. 显然 GG'是梯形 $PQQ'P'$的中线，所以 $GG'=\frac{a}{4}$，因此

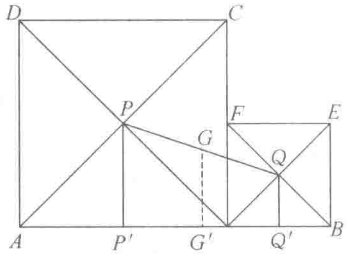


图 1-3

线段 PQ 中点的轨迹是与 AB 平行且相距 $\frac{a}{4}$ 的线段.

解法二　以 A 为原点，AB 为 x 轴建立直角坐标系.

设 $AB=a$，$AM=m(0<m<a)$ 则 A，B，M，C，F 各点的坐标分别为：

$A(0,\ 0)$，$B(a,\ 0)$，$M(m,\ 0)$，$C(m,\ m)$，$F(m,\ a-m)$.

正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$ 的中心 O_1，O_2 的坐标分别为

$$O_1\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right),\ O_2\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right).$$

正方形 $AMCD$ 的外接圆$\odot O_1$ 的方程为

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2,$$

即

$$x^2-mx+y^2-my=0. \tag{1}$$

正方形 $MBEF$ 的外接圆$\odot O_2$ 的方程为

$$\left(x-\frac{a+m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-m}{2}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-m)\right]^2,$$

即

$$x^2-(a+m)x+y^2-(a-m)y+am=0. \tag{2}$$

点 M，N 是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的两个交点，它们的坐标是方程(1)(2)组成的方程组的解. 因此，两圆的交点除 $M(m,\ 0)$外，还有

$$N\left(\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},\ \frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}\right).$$

(a)直线 AF 过点 $A(0,\ 0)$与 $E(m,\ a-m)$，其方程为

$$(a-m)x-my=0. \tag{3}$$

直线 BC 过点 $B(a,\ 0)$与 $C(m,\ m)$，其方程为

$$mx+(a-m)y-am=0. \tag{4}$$

不难验证 N 点的坐标既满足(3)又满足(4)，即直线 AF 与 BC 相交于点 N.

(b)直线 MN 过点 $M(m,\ 0)$与 $N\left(\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},\ \frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}\right)$，其方程为

$$a(x+y)=m(2y+a). \tag{5}$$

显然，对于 m 的任意取值，$x=\frac{a}{2}$，$y=-\frac{a}{2}$ 均满足方程(5)，即不论点 M 在线段 AB 上的位置怎样，点$\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$总在直线 MN 上，因此，直线 MN 总通过同一点$\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$.

(c)由于两个正方形的中心 O_1，O_2 的坐标分别为

$$O_1\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right),\ O_2\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right),$$

所以线段 O_1O_2 的中点 $S(x',\ y')$的坐标为

$$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a+m}{2}\right)=\frac{a+2m}{4},\ y'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a-m}{2}\right)=\frac{a}{4},$$

即中点的坐标为 $S\left(\frac{a+2m}{4},\ \frac{a}{4}\right)$.

由此可见，对于任意的 m 值，O_1O_2 的中点 S 的纵坐标恒为定值 $\frac{a}{4}$，即点 S 总在直线 $y=\frac{a}{4}$ 上. 由于点 M 在线段 AB 上，即 $0<m<a$，这时 $\frac{a}{4}<\frac{a+2m}{4}<\frac{3a}{4}$，即 $\frac{a}{4}<x'<\frac{3a}{4}$. 当 M 从点 A 连续运动到点 B 时，m 的值就从 0 连续增大到 a，$x'=\frac{a+2m}{4}$ 的值则从 $\frac{a}{4}$ 连续增大到 $\frac{3a}{4}$，由此可见，当点 M 在线段 AB 上运动时，两个正方形中心连线的中点的轨迹是一条平行于 AB 的线段，它们两个端点是 $G\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$,$K\left(\frac{3a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$.

6. 设直线 l_1，l_2 分别位于平面 P，Q 内且与直线 l 平行，而且 $A\in l_1$，$C\in l_2$，所以 $B\in l_1$，$D\in l_2$. 梯形 $ABCD$ 位于直线 l_1，l_2 所决定的平面内，如图 1-4.

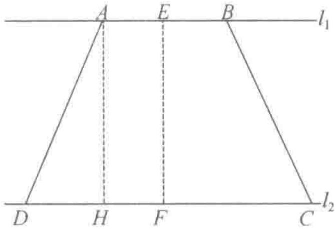


图 1-4

一个圆内切于 $ABCD$ 当且仅当

$$AB+CD=BC+AD=2AD\Leftrightarrow\frac{AB}{2}+\frac{CD}{2}=AD=BC.$$

设 H 是点 A 在 l_2 上的投影，EF 是线段 AB 与 CD 的垂直平分线，那么上面的条件等价于

$$AE+CF=CH=AD=BC.$$

因此点 B 和点 D 都位于以 C 为圆心，CH 为半径的圆上. 问题的解存在当且仅当 $CB>EF$ 或 $CH>AH$ 或 $\angle ACH\leqslant 45^\circ$. 当 $\angle ACH=45^\circ$时，梯形变为正方形.

成　绩

CHENGJI

名次	国家(地区)	团体总分(满分 320)	奖牌			参赛队人数
			金牌	银牌	铜牌	
1	罗马尼亚	249	1	2	2	8
2	匈牙利	233	1	1	2	8
3	捷克斯洛伐克	192	1	—	—	8
4	保加利亚	131	—	—	—	8
5	波兰	122	—	—	—	8
6	苏联	111	—	—	1	4
7	东德	40	—	—	—	8