# 弹性平板基础理论

西安公路学院
曹振熙译

# 弹性平板基础理论

L·G·耶格　著

曺振熙　译

一九八八年十月

# 内 容 提 要

本书论及均布弯矩作用下的矩形板，横向荷载作下的四边简支板和具有各种边界条件的矩形板，径向对称荷载作用下的园形板，反对称荷载作用下园板的计算，位能法的精确解及近似解。

该书可供高等院校土建专业师生及有关工程技术人员参考。

本书承蒙中国建筑科学研究院高级工程师陈静云审校谨敬谢意

封面设计 化工部第六设计院 曹普

Elementary Theory of Elastic Plates

L·G·Jaeger

西安公路学院

高级工程师 曹振熙 译

陕西省基本建设优化研究会 技术图书编辑部编辑

一九八八年十月 第一版

印刷工本费： 元

# 弹性平板基础理论

## 目　　录

## 绪　　言

本书是第一次平板理论会议的讲稿。论及矩形板和园板以及在荷载作用下产生微小变形的具有弹性约束的初始薄平板。

所论及的课题有均布弯矩作用下的矩形板，横向荷载作用下的四边简支板和具有各种边界条件的矩形板，径向对称荷载作用下的园形板，反对称荷载作用下的园板，在曲板中所积蓄的应变能，位能法，能量法的近似解，在板平面中力的效应，矩形板的弯曲。

## 第一章　矩形板的基本关系

### 第一节　弯矩与曲率

我们假定读者熟悉梁弹性弯曲的初等理论，梁的主轴在纯弯曲情况下的通式为：

$$\frac{\sigma}{y}=\frac{M}{J}=\frac{E}{R}$$

利用平截面保持平面的条件，在初等理论中已证明，在梁中性轴处的应力和应变皆等于零。如图 1所示，为具有（W、x）轴的等截面梁的情况，当梁向下弯曲时，其正

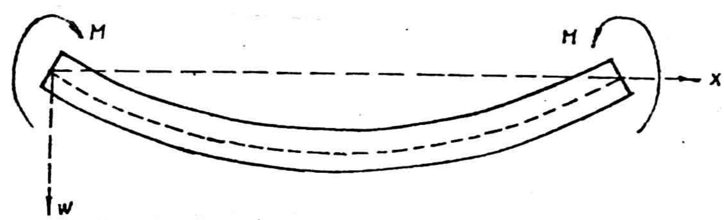


图　　1

弯矩为：

$$M=-EJ\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (1\cdot1)$$

首先考虑比较简单的承受均布弯矩的矩形板（图 2）的情况，取板中部中性面上一小块（图 3（a）），假定该小块的端面在弯曲之后，仍保持为平面（图 3（b）），如图所示，x方向的应变为 $\varepsilon_x$，y方向的应变为 $\varepsilon_y$，平面 ABCD与中性面的距离为 z。由弹性变形的特性可知，应力与离中性面的距离成正比。

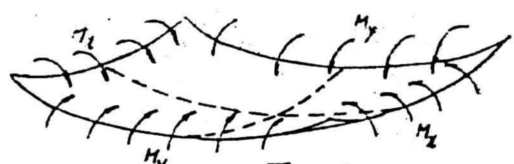


图　2

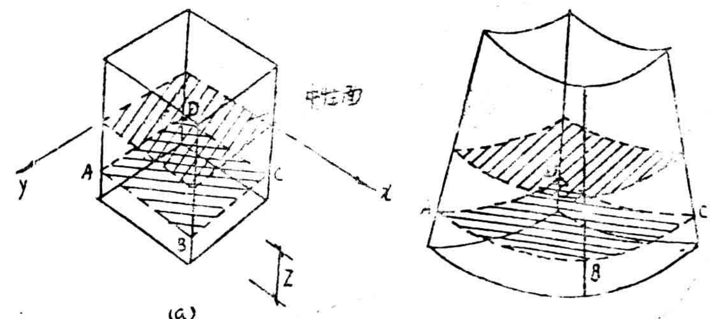


图 3

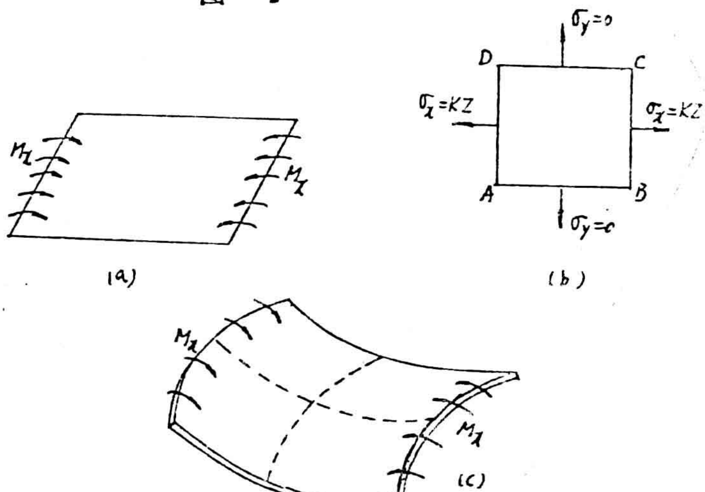


图 4

考虑在单位长度内的弯矩 $M_x$ 作用下的板（图 4(a)），平面 ABCD 上的应力图（4(b)）为：

$$\sigma_x = KZ$$

$$\sigma_y = 0$$

式中：K——系数。

系数 K，可由所作用的单位长度上的弯矩 $M_x$ 等于单位长度上的反力（KZdz）所产生的弯矩求得，即

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} KZ^2 dz = \frac{kt^3}{12}$$

则 $$k = \frac{12M_x}{t^3}$$

平面 ABCD的应变为：

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{v\sigma_x}{E} \qquad (1.3)$$

由此，曲率（注：曲率$=\dfrac{1}{\text{曲率半径}}$）是：

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon_x}{Z} = \frac{\sigma_x}{EZ} = \frac{k}{E} = \frac{12M_x}{Et^3}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon_y}{Z} = \frac{-v\sigma_x}{EZ} = \frac{-vk}{E} = \frac{-v12M_x}{Et^3} \qquad (1.4)$$

式（1.4）左边负号是由于向下弯曲为正所产生的。方程（1.4）乍看起来是不熟悉的，但以后会逐步熟意这一概念。

方程（1.4）中的第一式可改写为：

$$M_x = -\frac{Et^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1.4a)$$

式中 $M_x$——单位长度的弯矩

$\dfrac{t^3}{12}$——单位长度的面积二次矩

可见式（1.4a）与式（1.1）是一致的。

方程（1.4）中的第二式，表明板在弯矩 $M_x$ 作用下，不仅 xw 面而且与其垂直的 yw 面亦产生挠曲。后者曲率为 xw 面曲率的 v 倍，且符号相反。因此，在向下的单位长度弯矩 $M_x$ 作用下，xw 面产生向下的挠曲，而 yw 面向上凸起，如图（4(c)）所示。显然，方程（1.3）表明，应力 $\sigma_x$ 不仅使平面 ABCD 中的 AB 边伸长，而且使 CD 边缩短（这是由于泊桑比效应）。

应当注意到，梁弯曲时将获得同样的结果。图 5表明矩形梁在弯矩 M作用下的情况，可认为仅仅是梁在纵向垂直面的弯曲，而该梁的横截面，在某种程度上可以视为很窄的板条。

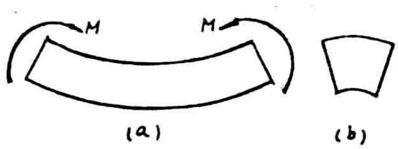


图 5

利用迭加原理，可以得出单位长度的弯矩 $M_x$ 与 $M_y$（图 2）同时作用下的结果。

xw 面的挠曲作用，可利用方程（1.4）中 $M_x$ 与 $\frac{12M_x}{Et^3}$ 的对应关系，同样可得到 $M_y$ 与 $\frac{-\nu 12M_y}{Et^3}$ 的对应关系。

因此，

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{12}{Et^3}(M_x-\nu M_y) \tag{1.5a}$$

与此相似得

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{12}{Et^3}(M_y-\nu M_x) \tag{1.5b}$$

用曲率来表示弯矩，在方程（1.5a）和（1.5b）中先消去 $M_y$，后消去 $M_x$ 得到

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{1.6a}$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.6b}$$

式中：$D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

方程（1.6a）和（1.6b）在板理论中是很重要的。显然，系数 D称为板的刚度，即单位长度的 EJ，其区别在于分母中的乘数 $(1-\nu^2)$。应当注意到，乘数 $(1-\nu^2)$ 是由于矩形板的对边在单位长度的弯矩作用下出现的，该弯矩作用下同一个平面的曲率为 $\frac{M}{EJ}$，其中 $J=\frac{t^3}{12}$= 单位长度面积的二次矩。与其正交的平面曲率为 $\frac{-\nu M}{EJ}$（图 6(a)）。假设此时不考虑第二个曲率，那应另外两个边（图 6(b)）在弯矩 $\nu M$ 作用下，该弯矩所产生的曲率为同一方向原曲率的 $-\nu^2$ 倍。此曲率为 $\frac{M(1-\nu^2)}{EJ}$ 或 $\frac{M}{D}$。

由上所述，可以推断，单位长度的弯矩 M作用下产生曲率 $\frac{M}{D}$，那么在与该平面正交的平面在单位长度弯矩 $\nu M$ 作用下，板的曲率等于零。

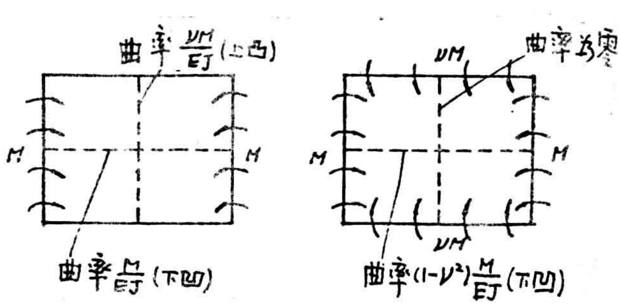


图 6

## 第二节 在任一方向弯矩和扭矩作用下单元板的平衡

在互相垂直的两个平面上作用有单位长度的弯矩 $M_x$ 和 $M_y$，其在任一平面上产生弯矩与扭矩。该平面与 y 轴的夹角为 $\alpha$，假设 n 与 t 为任一平面上互相垂直的两个轴，考虑板的楔形单元的平衡，如图 7所示。单位长度的弯矩 $M_n$ 和单位长度扭矩，采用右手螺旋定则，分别按 t 和 n 各自的方向逆时针转动为正。

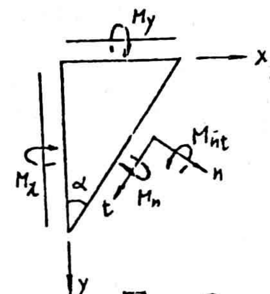


图 7

绕 t 轴转动的弯矩为：

$$M_n = M_x\cos^2\alpha + M_y\sin^2\alpha = \left(\frac{M_x + M_y}{2}\right) + \left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)\cos 2\alpha \tag{1.7a}$$

绕 n 轴转动的弯矩为：

$$M_{nt} = M_x\cos\alpha\cdot\sin\alpha - M_y\cos\alpha\sin\alpha = \left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)\sin 2\alpha \tag{1.7b}$$

当考虑一点的应力即任意方向的剪应力时，可直接得到方程（1.7）相同的结果。平板上任一点的弯矩和扭矩，如前所述，可用图 8的莫尔园表示。园的中心为从原点至 $\frac{M_x+M_y}{2}$ 的距离，园的半径为 $\frac{M_x-M_y}{2}$。此外，由方程（1.7）可见，园心角为板上所量的角度（楔块夹角 $\alpha$）的两倍。如图 8所示，A点给出 $M_n$ 和 $M_{nt}$ 值。如果方程（1.7）中的 $\alpha$ 角写为（$\frac{1}{2}\pi+\alpha$），如前所述，莫尔园中直径上相对应的 B点给出 $M_t$ 和 $M_{tn}$ 的值。特别要注意，$M_n + M_t = M_x + M_y$，同时 $M_{nt}$ 和 $M_{tn}$ 的数值亦相等。

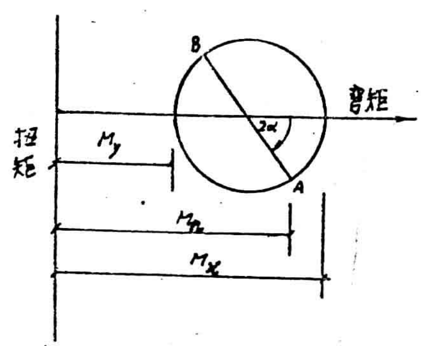


图 8

## 第三节 几何曲率和扭转

下面将讨论单元板在弯矩作用下的平衡，并研究板中任意方向的扭转和曲率。首先讨论"扭转"。读者可设想取一把铁耙的尖齿部分，其端部在一对相反的扭力偶作

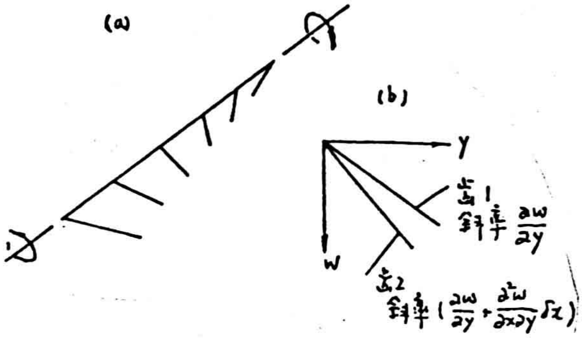


图 9

用下扭转（图9(a)）。这些齿不再保持在同一平面上，而相对于另一根轴转动。此外假设这些齿间隙很小，而形成一个齿面。研究沿耙尖旋转。并固定相邻两个耙齿的一端，得到的图象，如图（9b）所示。耙尖的转动轴取 x 轴，而 y，w 轴为本页所示的平面，齿间距为 $\delta x$ 。

齿 1的斜率是 $\frac{\partial w}{\partial y}$，该斜率是很微小的。从齿 1转动到齿 2，斜率 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 的改变仅仅是在 x方向改变的结果； $\frac{\partial w}{\partial y}$ 的改变率是 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial w}{\partial y})$ 或 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ 。齿 2的斜率为（$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\delta x$）。$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ 为表示该面“扭转程度”的一个量称为（x、y）方向的“扭转”。显然，对于连续的平面

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$$ 。

如果在此方向上仅作用能弯矩 $M_x$ 和 $M_y$ 而没有扭矩，由于对称性可得出 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$。因此，按所考虑的情况，仅有曲率 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 而 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$ 。现在来研究其他方向的曲率和扭转。

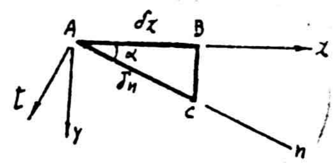


图 10

如图 10所示，考虑单元三角形 ABC中（x、y）与（n、t）方向，假设 A关的变位是 w，c点的变位是 w + δw，则沿 AB与 BC方向可得出：

$$\delta w=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\partial y \qquad (1.8)$$

由于 $\delta x=\delta n\cos\alpha$，$\delta_y=\delta_n\sin\alpha$，则方程（1.8）可写为：

$$\delta_w=[\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial w}{\partial y}]\delta_n$$

因此，从 A点移动到 c 点时，仅 n 方向有变化，而 t 方向保持不变，由此得出：

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.9a)$$

谈者可能不熟悉偏微分法，那么可考虑具有斜边的另一个单元三角形，在 t 方向可证明有，

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\sin\alpha\frac{\partial w}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.9b)$$

从方程（1.9）可得到算子 $\frac{\partial}{\partial n}=(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y})$，同样可得：

$$\frac{\partial}{\partial t}=(-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y})$$

因此：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=\frac{\partial}{\partial n}(\frac{\partial w}{\partial n})=(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y})(\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial w}{\partial y})=\cos^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+\sin^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

则 $$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 n}=\cos^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sin^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (1.10a)$$

因为 $$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

同样得： $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sin^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\cos^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (1.10b)$$

由方程（1.10）可得出： $$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

最后得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial t}=\frac{\partial}{\partial n}(\frac{\partial w}{\partial t})=(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x})(-\sin\alpha\frac{\partial w}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial y})=\sin\alpha\cos\alpha(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

则 $$\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial t}=\sin\alpha\cos\alpha(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \qquad (1.11)$$

因为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0$

引用 $2\alpha$ 项改写方程（1.10）和（1.11），得到：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos 2\alpha$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos 2\alpha \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin 2\alpha$$

由方程（1.12）可看出，曲率和扭转可用如图 11 所示的莫尔园表示。该园的园心是 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$，园的半径是 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$。

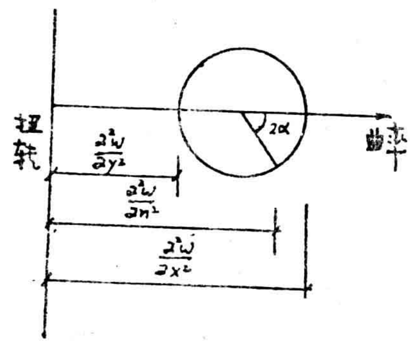


图 11

如果要用 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial n^2}$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$ 项表示 $M_n$、$M_t$ 和 $M_{nt}$，可利用方程（1.6）和（1.12）。方程（1.6）相加和相减，可求得：

$$M_x+M_y=-D(1+\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$M_x-M_y=-D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

这些值可代入方程（1.7）。同样利用方程（1.12）的第一式与第二式相加和相减，则有：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

和 $$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos 2\alpha$$

由方程（1.7a）可得：

$$M_n = -\frac{D(1+\nu)}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]-\frac{D(1-\nu)}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]$$

即

$$M_n = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \tag{1.13a}$$

同样

$$M_t = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right] \tag{1.13b}$$

利用方程（1.12）中的第三式，并代入方程（1.7b）得

$$M_{nt} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial t} \tag{1.13c}$$

## 第四节 主弯矩和主曲率

在 x和 y两个方向的弯矩（没有扭矩）作用下，已经得到方程（1.13）。从莫尔园的图中可看出，该两个弯矩分别表示最大值和最小值（代数值）。采用类似的方法，可以得到通过任意点的正截面在对应方向上的曲率。分别表示最大值和最小值（代数值）。

所遗留问题的答案，无论是近似值或者是具有“特殊情况”性质的初始的原点值（正交的两个方向上扭矩等于零）总是有效的。原点的全体如图 12所示，图中所表示的扭矩数值相等（由于互补剪应力相等）。谈者应考虑板的楔形部分的平衡，可以证明互相垂直的两个方向上所作用的扭矩等于零，在此方向上的弯矩一种情况下为最大值，另一种情况下为最小值。

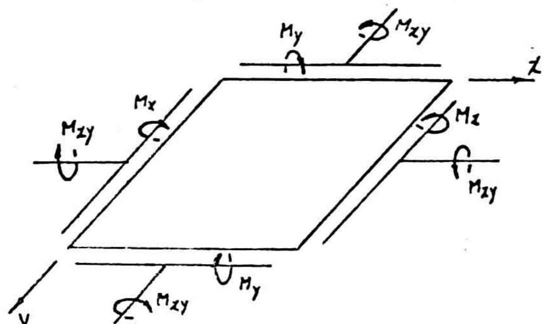


图 12

由上所述，可知莫尔园与各种情况有关，方程（1.14）总是适用的。至此，在 x、y 方向上所作用的扭矩可以认为等于零（“主”方向），今后 x、y 方向是完全通用的，因此得到

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (1.14)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

主方向的弯矩，早已得出，其最大值与最小值是存在的。与此有关的曲率是主曲率。假如主曲率是同号（"凸面向下"或者"凸面向上"），板的变形是同方向的；如果是反号，板的变形是反方向的。这样的例子如图 4c所示，板的弯曲其曲率是反方向的。

谈者可以细心比较与弯矩和曲率有关的莫尔园，其与平面应力状态所考虑的任意点应力与应变得出的莫尔园是一致的，在后者情况下，应力与应变的莫尔园可得到与主方向相应的应力最大值和最小值，同样亦是应变的最大值和最小值，主方向的剪应力等于零。

## 第五节　扭矩的方向

一般情况下所出现的困难是判断扭矩的方向，亦就是说是 $M_{xy}$ 还是 $M_{yx}$。如图 13（a）所示，这些弯矩的方向是正的。由此可见，凡是围绕法线轴顺时针转动的扭矩是正的。此外，下标的第一个字母表示转动的轴，如 $M_{xy}$ 是围绕与 x 轴平行的轴转动，而 $M_{yx}$ 为围绕与 y 轴平行的轴转动。

如图 13（a）所示，可选择另一种方法判别，可获得同样的结果，即剪应力互补，亦得出 $M_{yx} = -M_{xy}$。在图 13（b）中所给出的结果，仅对于 $M_{xy}$ 是正确的。

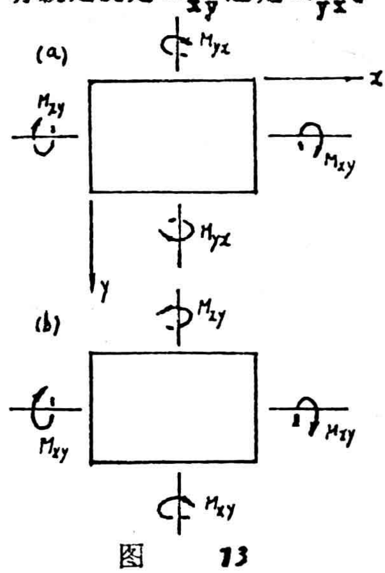


图　13

## 摘　　要

1、假设平截保持为平面，且板是弹性的，即应力与应变与中性面的距离成线性变化。

2。由于泊桑效应，挠曲产生的简支边的弯矩，不仅用于一般平面，而且用于与其成直角的平面（符号相反）。

3。不同方向的弯矩和扭矩可由莫尔园的关系互相联系在一起，其由平衡条件可得出。

4。不同方向的平面曲率与扭转，由莫尔园的关系相互联系在一起，其由几何条件得出。

5。弯矩和扭矩与方程（1。13）所表示的板的位移联系在一起，与简支梁中弯矩与曲率的关系相对应。

## 第二章　在横向荷载作用下的矩形板·纳维法

本章中进一步讨论前述概念，这与读者早已熟悉的，在横向荷载作用下的梁是很相似的。首先扼要叙述梁在横向荷载作用下的位移。

如图14所示，取梁长的一部分为 $\delta_x$，其上作用有荷载 $q\delta_x$，弯矩M和剪力Q。

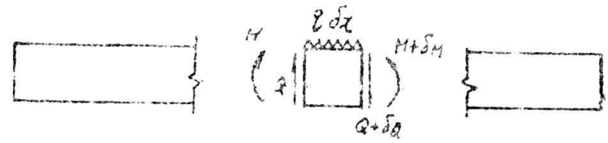


图　14

我们开始分析垂直方向的投影，

$$\frac{dQ}{dx}=-q \qquad (2。1)$$

对矩形平面单元的中心轴取矩，并忽略二次微量，得

$$\frac{dM}{dx}=Q \qquad (2。2)$$

方程（2。2）对x微分，并利用方程（2。1），可很容易地获得平衡方程

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-q \qquad (2。3)$$

如果假设弯矩与曲率之间的关系，与纯弯曲情况下（见方程1。1）所得到的结果是很接近的，在方程（2。3）中代入M即得

$$\frac{d^4w}{dx^4}=\frac{q}{EJ} \qquad (2。4)$$

在同样的线性横向荷载作用下的板，实质上与上述情况一致的。其步骤是，

（1） 分析垂直直截面。建立荷载作用下的集度与剪力之间的联系。

（2） 对相应的轴取矩。建立弯矩、扭矩和剪应力之间的联系。

（3） 设想建立平面的曲率和扭转与弯矩和扭矩之间的联系。

（4） 消去弯矩和剪力之间的各个方程。因此获得联系所作用的荷载与位移间关系的方程。

## 第一节 控制方程

如图 15（a）所示。平板单元 $\delta_x \delta_y$ 承受单位长度的剪力 $Q_x$、$Q_y$。在图 15 中亦表示了弯矩和扭矩作用的方向。为了避免图 15（a）过分拥挤。在图 15（b）中分别表示各个方向的单位长度的弯矩。板单元为刚观平面。在图 15（b）中单位长度弯矩的轴的方向。用双箭头的直线表示。该弯矩箭头的指向，由“右手螺旋”定则确定。应注意。图 15 中所有的量。均为“单位长度”的弯矩或“单位长度”的剪力。

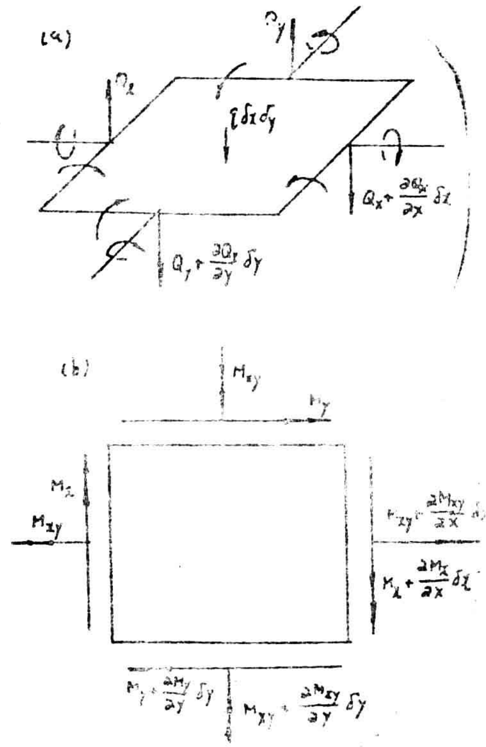


图 15

各个力在垂直方向的投影得。

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}\cdot\delta_x\right)\delta_y+\left(\frac{\partial Q_y}{\partial y}\cdot\delta_y\right)\delta_y$$

$$+q\delta_x\delta_y=0$$

即
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0 \qquad (2.5)$$

（该方程在本质上与方程（2.1）相似）。

对与 x 轴平行的轴取矩。并忽略二次项得。

$$(Q_y\delta_x)\ \delta_y-\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\cdot\delta_y\right)\delta_x+\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\cdot\delta_x\right)\delta_y=0$$

即
$$\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0 \qquad (2.6a)$$