高等数学自学丛书

多项式代数

李师正 编

山东教育出版社

高等数学自学丛书

多项式代数

李 师 正 编

山 东 教 育 出 版 社
一九八三年·济南

内 容 提 要

本书是高等数学自学丛书之一，内容包括复数、一元多项式、最大公因式、一元多项式的分解、一元n次方程、实系数方程、有理分式、多元多项式等。标*号处为选学内容。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生、工程技术人员阅读及青年自学，也可作为高等院校有关专业的教学参考书。

高等数学自学丛书

多 项 式 代 数

李 师 正 编

*

山 东 教 育 出 版 社 出 版

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 13.5印张 2插页 289千字

1983年1月新1版 1983年1月第1次印刷

印刷：1—5,000

书号13275·12 定价 1.15元

出 版 说 明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅。书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八二年七月

目　　录

第一章 复　数

本章首先简述数系的扩张过程，然后介绍复数的概念及复数的运算。最后，引入数环和数域的概念。

§1.1 数系的扩张

一、从自然数系到实数系

在人类社会的实践活动中，从生产到科学研究、军事活动以至日常生活，人们不仅需要定性地了解和讲述问题，同时更需要定量地剖析事物的数量特性，而只有后者才能更精确更完备地揭示事物的本质。社会发展到今天，可以说，没有一门科学（甚至是社会科学）不与数量关系有密切的联系。

数是用来表示量的，是量的一种抽象。然而，数并非一开始就是现在的样子，它的发展经历了一个漫长的过程。

最简单的数是自然数，即正整数。幼儿在咿呀学语时，就开始接受自然数方面的启蒙教育，比如“一只小白兔”、“两个大苹果”、“三块糖”等，这些问题看起来自然是十分简单的，但是，它与人类最初对于数与量的认识却很相似。远在人类的原始阶段，不仅没有文字，也没有数字符号，人们只用结绳、刻画等方法来表示人或物的个数。通过长期的实践活动，人们才渐渐具备了把具体事物的个数抽象为自然

数的能力，并且能对自然数进行运算。这里，我们不打算详细地讨论自然数的发展过程，但有一点应当肯定的是：人类对数的认识是先从自然数开始的。

1，2，3，4，……这无穷多个自然数所组成的数系，称为自然数系，我们用N表示。显然，任意两个自然数的和与积仍是自然数。形象地说，自然数系N关于加法与乘法是“封闭的”。即自然数相加或相乘，其结果不会“跑”出自然数系。

在自然数系内，虽然能进行乘法运算，但不能通行乘法的逆运算——除法。也就是说，对于任意的自然数a与b，方程$bx=a$在自然数范围内不一定有解。例如，方程$2x=3$在自然数系中就没有解。

同时，实践中对测量的要求不断提高，仅靠自然数已不能满足较高的要求，这就促使了正分数的产生。有了正分数，也就是正有理数，可以在其中通行加、乘、除三种运算。这是数系的第一次扩张。

扩张后的数系叫做正有理数系，记为Q^+。

在Q^+中虽然可以通行加法、乘法和除法，但加法的逆运算——减法，在Q^+中仍不能通行。也就是说，对于任意的正有理数a与b，方程$a+x=b$在Q^+中不一定有解。比如方程$2+x=\frac{3}{2}$在Q^+中就不存在解。为了使减法在Q^+中能够通行，还必须再次扩张数系。另外，实践中也常需要考虑带方向的测量以及负债等问题，因而导致负有理数及数零的出现。负数和零的引入，相对来说是较晚的。在五世纪的印度，虽有人用正负数来表示财产和负债，但像“+”、“-”

这样现在通行的记号，到1489年才由德国数学家维得曼(Widman)首次引进，直至十七世纪，关于负数才有较完整的理论和认识。

Q^+添上负有理数和零，得到了有理数系，记为Q，在Q中可以进行加、减、乘、除四种运算（但除法不允许零作除数），或者说，Q关于加、减、乘、除四种运算封闭。

随着生产的发展和测量的精确化，早在古希腊，已有人知道不可公度线段的存在。如一个边长为1的正方形，其对角线长就不可能等于任何一个有理数，也就是说，方程$x^2=2$在Q中没有解。此外，像圆周率π这样的数，也不能包含在有理数系Q内。这就需要进行数系的第三次扩张，即由有理数系扩张为实数系。历史上，在十七——十八世纪时，还只是利用数轴上的点表示实数，实数的理论直到十九世纪七十年代才由康托儿(Cantor)、狄特金(Dedekind)及维尔斯特拉斯(Weierstrass)等人注完成。

实数系用R表示。在R中不仅如同在Q中那样，通行四则运算，而且可进行非负数开方。

二、复数系的产生

实数系R建立之后，R关于四则运算及非负数开方都可进行，但负数开偶次方仍然不能进行。从方程上来说，最简单的方程$x^2+1=0$在实数范围内就没有解。实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$$

注　G.Cantor（1845—1918），R.Dedekind（1831—1916）和K.Weierstrass (1815--1897) 都是德国数学家。

当$b^2-4ac<0$时，就出现无实根的情况。在古代，数学家解二次方程遇到这种情况，就认为没有意义，是虚无的。“虚数”之名，正反映了人们起初时对它的认识。

1747年，达朗贝尔(D' Alembert)对于虚数给出了类似于实数的运算法则，提出$a+b\sqrt{-1}$的形式，但他还未给出“复数的概念。“复数”的名称是十九世纪高斯(Gauss)引进的。但最早对复数作出系统论述的，要算欧拉(Euler)了，[注]他创造并运用了符号“i”。欧拉之后，外塞尔(Wessel)和阿拉贡(Argand)在十八世纪末和十九世纪初首先提出复数的几何解释；1811年高斯在数学上正式用平面上的点来表示复数。复数的几何解释一俟出现，复数的研究便突飞猛进。十九世纪，由于柯西(Cauchy)、黎曼(Riemann)[注]和维尔斯特拉斯的大量工作，在复数的基础上建立和发展了一门完整的数学分支——复变函数论。这一门学科在力学、理论物理、工程等方面有着广泛的应用，并且早已渗透到数学的各个分支，成为极其重要的理论和方法。

实数系增加上全部虚数后，构成复数系，用C表示。C不仅对四则运算通行无阻，而且可在其中进行任意次的开方运算。特别重要的是，正如以后将要看到的那样，任意次的代数方程在C中都有解。

三、扩张的原则

从自然数系到复数系，大体上经历了四个扩张过程。每

注　J.R.D' Alembert（1717—1783），法国数学家。C.F.Gauss（1777—1855），著名德国数学家。L.Euler（1707—1783），瑞士数学家。

注　A.L.Cauchy（1789—1857），法国数学家。G.F.B.Riemann（1826—1866），德国数学家。

次扩张，一方面是客观实践的需要，另一方面，在数学上都是为着解决施行某种运算的问题而引起的。

综合各次扩张过程，可归纳为以下几点：

第一，每次扩张总是从一个较小的旧数系扩充为一个较大的新数系，使旧数系成为新数系的一部分。

第二，旧数系中所有能够进行的运算，在新数系中仍然有意义。而且，旧数系中的数，在看作新数系中的数进行运算时，其运算结果与它们在旧数系中完全相同。

第三，旧数系中不能通行的某种运算（如自然数系中的除法，正有理数系中的减法等），在新数系中能够通行。

第四，新数系是旧数系满足以上三个要求的最小扩张，而且由旧数系所唯一决定。

注意：前两条说明，数系的扩张不仅使数的范围扩大了，而且使旧数仍保持原有的运算；第三条说明扩张的主要目的；第四条说明扩张的最小性和唯一性，如N扩张到Q^+，是为了能进行除法运算，所以只扩张到正有理数系，而不是扩张到Q、R或C。关于扩张的最小性和唯一性，这里还没有条件严格论证，读者暂时只能体会它的含意。

上述扩张过程可表示如下：

自然数系$N \longrightarrow$正有理数系$Q^+ \longrightarrow$有理数系$Q \longrightarrow$实数系$R \longrightarrow$复数系C。

从小学到中学在学习数的概念时，也基本上按照这一顺序进行。

§1.2 复数的基本概念

数的概念由自然数扩张到实数，也可以借助于数轴作直

观的几何解释。每个数在数轴上对应于一个唯一的点，这点的坐标等于该数。自然数对应于右半轴的整点，整数对应于整个数轴的整点，有理数则对应于坐标为有理数的点。这时，数轴上还有许多点没有数与之对应。直到数系扩张到实数系后，数轴上的全部点才都有唯一对应的数，而且任何实数在数轴上都有唯一的对应点。

现在，我们把点从数轴扩大到整个平面上来。平面上的点显然不能用一个实数表示出来，而必须用一对有次序的实数来表示。我们让平面上的点，或者让一对有次序的实数来代表一个复数。基于这个想法，可把复数的最基本的概念归纳为下面五条基本定义，从这五条出发，又可以建立复数系的代数理论。

一、基本定义

基本定义1 由一对有次序的实数a和b唯一确定的新元素，记为(a,b)，称为复数。

注意：用(a,b)记复数与通常复数的记号$a+bi$看来有所不同，但下面还要讲到，它们是一致的。我们这样来定义复数，目的是使复数理论建立在比较严格的基础上。因为在定义复数加法之前，使用$a+bi$来定义复数，会与加法概念发生混淆。

基本定义2 两个复数(a_1,b_1)和(a_2,b_2)，当$a_1=a_2$且$b_1=b_2$时，规定为相等，并且只有这时，它们才相等，记为$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$。

或者说，$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$当且仅当$a_1=a_2$及$b_1=b_2$时成立。

基本定义3 形如$(a,0)$的复数，规定等于实数a，即$(a,0)=a$。

基本定义4 复数(a_1+a_2,b_1+b_2)称为复数(a_1,b_1)与(a_2,b_2)的和。即

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)。\qquad (1)$$

基本定义5 复数$(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$称为复数$(a_1,b_1)$和$(a_2,b_2)$的乘积。即

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)。\qquad (2)$$

注意：基本定义1给出复数的定义，第2给出复数相等的定义，第3说明实数与复数之间的关系，第4、5规定了复数的加法和乘法。

首先，我们来看实数系和复数系的关系。

由基本定义3，对于任意的实数a，都有一个复数$(a,0)$和它相等。而且由基本定义2知，不同的实数所对应的复数也不相同。同时，两个实数a_1及a_2在实数系中作加法、乘法运算，与将其看作$(a_1,0)$及$(a_2,0)$时在复数系中作相应运算的结果完全一致。事实上，

$$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0+0)=(a_1+a_2,0),$$

$$\begin{aligned}(a_1,0)\cdot(a_2,0)&=(a_1\cdot a_2-0\cdot 0,a_1\cdot 0+a_2\cdot 0)\\&=(a_1a_2,0)。\end{aligned}$$

这样，我们可以把形如$(a,0)$的全体复数就看作是实数系。因而，复数系包含实数系，并且保持实数系原来的运算。

定义1 $i=(0,1)$称为虚数单位。

推论1 $i^2=-1$,

证明： 由基本定义5，

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1)$$

$$= (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

推论2 $(a,b) = a + bi$。

证明： $a + bi = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1)$

$$= (a,0) + (b\cdot 0 - 0\cdot 1, b\cdot 1 + 0\cdot 0)$$

$$= (a,0) + (0,b) = (a,b).$$

证毕。

推论2把复数(a,b)与常见的形式$a+bi$统一起来了。今后我们就用$a+bi$表示复数，而不用(a,b)的形式。

根据复数的基本定义4与5知，复数$a+bi$的加法和乘法规则如下：

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

定理1 复数的加法与乘法都满足交换律与结合律；复数的乘法关于加法满足分配律。即对于任意的复数$z_1 = a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，$z_3=a_3+b_3i$，以下等式成立：

$z_1+z_2=z_2+z_1$；（加法交换律）； (3)

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；（乘法交换律）； (4)

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$；（加法结合律） (5)

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$；（乘法结合律） (6)

$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.（分配律） (7)

证明：（3）至（7）根据基本定义均可直接证出。下面我们以（7）式为例加以证明，其余各式，读者可作为练习。

（7）式左端：$z_1\cdot(z_2+z_3)$

$$=(a_1+b_1i)[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i]$$

$$=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+[a_1(b_2+b_3)$$
$$+(a_2+a_3)b_1]i$$
$$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1$$
$$+a_3b_1)i.$$

(7)式右端：$z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

$$=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)$$
$$=[(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i]+[(a_1a_3-b_1b_3)$$
$$+(a_1b_3+a_3b_1)i]$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3$$
$$+a_3b_1)i.$$

证毕。

由于复数的加法和乘法满足通常所熟知的运算规则，因此，它与通常多项式加法和乘法的运算规则是完全一致的。这样，在复数运算中只要记住$i^2=-1$，即可按多项式的加法和乘法进行计算。例如，

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_2b_1i+a_1b_2i+b_1b_2i^2$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

二、复数的分类

定义2 复数$z=a+bi$中，a称为z的实部，bi称为z的虚部，b称为虚部系数。

如$2+3i$的实部为2，虚部为$3i$，虚部系数为3。

定义3 不是实数的复数称为虚数。即形如$z=a+bi$ ($b\neq0$)的复数是虚数。

注意：许多读者往往把复数同虚数混为一谈，在此，再次提请读者注意。

定义4 实部为零的虚数称为纯虚数。即形如 $0+bi$（$b\neq 0$）的复数是纯虚数。

如 $2+3i$ 是一个虚数，但不是纯虚数；$0+3i$ 是纯虚数，$0+0i$ 是一个实数，而不是虚数。

因而复数可作如下分类：

$$
\begin{array}{l}\text{复数}\\(a+bi)\end{array}
\begin{cases}
\begin{array}{l}\text{实数}\\(a+0i)\end{array}
\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\
\text{无理数}
\end{cases}\\
\begin{array}{l}\text{虚数}\\(a+bi,\ b\neq 0)\end{array}
\begin{cases}
\begin{array}{l}\text{纯虚数}\\(0+bi,\ b\neq 0)\end{array}\\
\begin{array}{l}\text{非纯虚数}\\(a+bi,\ a\neq 0,\ b\neq 0)\end{array}
\end{cases}
\end{cases}
$$

三、例题

例1 计算 $(2+3i)[(4-2i)+(2+i)]$。

解： $(2+3i)[(4-2i)+(2+i)]$

$=(2+3i)(6-i)=15+16i$。

例2 解方程 $(2+i)x+(-3+3i)y=1-4i$，其中 x，y 为实数。

解：由复数相等的定义，可将方程化为实数系中的两个方程

$$
\begin{cases}2x-3y=1,\\ x+3y=-4.\end{cases}
$$

解得 $x=-1$，$y=-1$。

例3 计算 i^n（n 为自然数）。