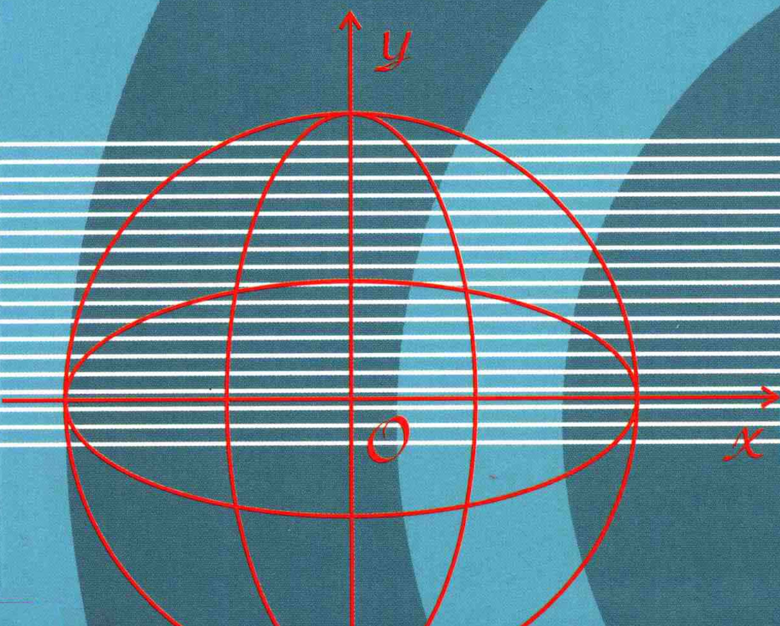
普通高等教育“十二五”规划教材

“211”大学数学创新课改教材

复变函数与积分变换

成立社　李梦如　主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
“211”大学数学创新课改教材

复变函数与积分变换

成立社 李梦如 主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容包括复变函数和积分变换的基本内容:复数与复变函数,解析函数,解析函数的积分表示、级数表示,留数定理及其应用,保形映射,傅里叶变换和拉普拉斯变换.此外用一章篇幅介绍了一些重要的概念、重要定理的证明以及典型的应用,全书共9章.

本书编写注重基础概念和基本方法的讲解,知识结构清晰.复变函数部分以四个等价条件为线索,突出了解析函数的柯西-黎曼条件、积分表示、级数表示和保角性,此外强调了刻画具有孤立奇点的解析函数的重要特性的留数定理及其应用.积分变换部分以傅氏变换和拉氏变换的原理和方法为主线,介绍它们的简单应用.阐述力求条理清晰,深入浅出.重要的概念和定理都着重讲清产生的背景和内涵的本质以及与相关内容的联系,易于使用和阅读.本书可作为高等学校非数学专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/成立社,李梦如主编. —北京：科学出版社,2011.5

普通高等教育"十二五"规划教材."211"大学数学创新课改教材

ISBN 978-7-03-030704-0

Ⅰ.①复… Ⅱ.①成…②李… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第056726号

责任编辑：曾 莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年6月第 一 版 开本：B5(720×1 000)

2011年6月第一次印刷 印张：18 1/2

印数：1—4 500 字数：358 000

定价：31.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《“211”大学数学创新课改教材》丛书编委会

前　言

复变函数是一门古老而又富有生命力的学科.第5章末的阅读材料中简要介绍了复变函数创立的简史,而这门学科在近代又有了很多进展.在这门课程中只能讨论一些基本的、古典的内容.积分变换是通过积分运算把一个函数变成另一个函数的变换,它也有非常丰富的内容,可以单独作为一门课来开.由于学时限制,并且积分变换与复变函数有密切关系,也可将积分变换并入复变函数.

本教材的复变函数部分在分析结构上与微积分基本相同,也是按照函数、极限、连续、导数、积分和级数这样建立起来,并且很多定义和运算性质在形式上是一样的.但是,决不可以认为复变函数只是将微积分的内容平行地“翻译”过来.复变函数有自身的完美理论和重要应用,与微积分有着很大差别.

很容易沿用微积分的语言形式上定义复变函数的导数,但是如果定义一个区域上处处可导的函数为该区域上的解析函数,则可得到一系列的等价条件,也就是说,解析函数的本质有着多方面的表达.本书的第2、3、4、6章分别从复变函数的实部和虚部的联系、沿闭曲线上的积分、展开成为幂级数、保角性四个方面介绍了复变函数在区域上解析的充分必要条件,揭示解析函数的四种本质特性.其中有一些由于篇幅所限不能详细证明,但都指明了参考文献,可供查阅.此外,不仅解析函数有很好的性质,而且具有孤立的不解析点的函数也有非常重要的性质,第5章则讨论了留数定理和解析函数的零点性质.

希望读者在学习复变函数课程的过程中处处与微积分进行比较,这样既可以使微积分的学习不断线,也可以加深对复变函数内容的理解.在本书中会处处强调微积分与复变函数的差别.

本书有以下一些特点:

(1) 知识结构清晰.复变函数部分以四个等价条件为线索,突出了解析函数的柯西-黎曼条件、积分表示、级数表示和保角性,此外强调了刻画具有孤立奇点的解析函数的重要特性的留数定理及其应用.积分变换部分以傅氏变换和拉氏变换的原理和方法为主线,介绍了简单应用.对于例题和习题做了精心安排,尽量使一例多用,并将后面要用到的知识有意安排到前面的例题和习题中,既起到前面知识的强化作用,又为后面做了准备.各章习题后都附有习题答案和提示,供读者练习时参考.

(2) 可读性强.重要概念尽量由具体问题引入;叙述尽量简明扼要;明确指出

重点、难点及容易出错的地方；除第 9 章外，尽量避免使用“显然”、“易知”等词语，做到清楚、明白；每一章后面都有一篇介绍相关数学家的史话，供学生自己阅读思考.

(3) 适当加强了理论性. 虽然是非数学专业的教材，但是如果有太多的“可以证明”，会影响学生的学习兴趣. 本书中可以证明的都作了尽量简单、明确的证明，实在不能证明的都指明了参考文献. 对于理论上或逻辑上的重点之处都作了适当的分析、点评.

(4) 适用面较广. 一些对于复变函数要求较高的专业的内容，可以在带有 * 号的内容或第 9 章找到.

(5) 有一些特有的内容. 本书有一些在其他同类教材中不常见的内容，以下三点比较突出. 第一，积分变换中傅里叶积分定理的证明. 如果不证明，学生会始终对于主值意义下的收敛存有疑问. 然而要使学生按参考文献去看，很难看懂. 本书在第 9 章里安排了一个学生比较容易看懂的简化了的证明，可供有兴趣的学生参考. 第二，在第 9 章中安排了一节关于施图姆-刘维尔问题简介，用留数方法证明了在数学物理方程中要用到的展开定理，而在一般的数学物理方程书里该定理也不证明. 本书将预备知识都放在了前面的习题里，节省了篇幅. 加入这一节的目的主要是加深学生对留数方法的了解，使他们知道留数不只是可以用来求积分. 第三，保角变换是解析函数的本质性质，一般书上只讲解析函数具有保角性，而不讲在一个自然的条件下具有保角性的函数是解析函数，以至于将保角性和保伸缩率分裂开来，造成学生对于保角映射与共形映射的关系的模糊理解.

本教材的基本内容可在一周 4 学时，一学期内讲完.

本书由成立社、李梦如主编，马建国多次审阅了书稿，并改写了部分内容，参加本书编写的还有李镇.

郑州大学李雪梅教授、杜殿楼教授、侯双印教授和常祖领博士在使用本教材的初稿过程中对本教材提出了很多宝贵的意见，在此一并诚恳地致谢. 此外，本书编写过程中参考了大量文献，附在书末，也向作者们一并致谢.

本书编写过程中还得到了郑州大学数学系领导和同事们的支持、关心和帮助，在此向他们表示衷心的谢意.

由于编者水平所限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2011 年 1 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

所谓复变函数主要是指自变量与因变量均为复数的函数. 本章首先对复数及其基本运算作简要的复习和补充，然后介绍复数的表示、复平面上的曲线和区域、复变函数，最后将微积分中极限与连续等概念平行地推广到复变函数.

1.1　复数运算及其表示

1.1.1　复数的概念及其代数运算

1. 复数的概念

复数不是产生于生产实践而是产生于数学自身. 由于解方程的需要，1545 年，意大利数学家卡尔丹(Cardano)把复数引进到数学领域. 18 世纪时，瑞士数学家欧拉(Euler)首先引入记号 i，以后复数研究有了迅速的发展，数学研究从实数领域扩展到复数领域.

将 $z = x + \mathrm{i}y$ 或 $z = x + y\mathrm{i}$ 称为复数，其中 x 与 y 为任意实数，分别称为复数 z 的实部(Real part)和虚部(Imaginary part)，记为

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

称 i 为虚数单位，并规定 $\mathrm{i}^2 = -1$.

当 $x = 0$, $y \neq 0$ 时，称 $z = \mathrm{i}y$ 为纯虚数；当 $y = 0$ 时，$z = x + \mathrm{i}0$ 为实数 x，简记为 $z = x$. 因此，复数可以视为实数的推广.

全体复数组成的集合记为 $\mathbf{C}$，即 $\mathbf{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

对于两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$ 时，才称 z_1 和 z_2 相等，记为 $z_1 = z_2$. 因此，对于复数 $z = x + \mathrm{i}y$，当且仅当 $x = y = 0$ 时，才有 $z = 0$.

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 为一个复数，称 $x - \mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数，记为 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. 显然，$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 的共轭复数是 $z = x + \mathrm{i}y$，并有 $\bar{\bar{z}} = z$.

2. 复数的代数运算

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的加法、减法及乘法分别定义如下：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{1.1}$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2), \tag{1.2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.3}$$

称式(1.1)、(1.2)及式(1.3)右端所得的复数分别为 z_1 与 z_2 的和、差及积.

容易验证,这些运算实施于实数时,与实数原来的运算结果一致,并且与实数的四则运算一样,复数的上述运算也满足结合律、交换律以及乘法对于加法的分配律.这些可以作为练习,读者可自行验证.

对于两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ $(z_2 \neq 0)$, 复数 z_1 除以 z_2 定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.4}$$

复数集对于四则运算是封闭的,称它为复数域.实数集是复数集的子集,它对于四则运算也是封闭的,称它为实数域,记为 **R**. 整数集对于除法不是封闭的,记为 **Z**. 自然数集记为 **N**.

最后顺便介绍有关共轭复数的几个运算性质,读者可自行验证.

设 z_1, z_2 为两个复数,则有

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; (2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0)$; (4) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2$;

(5) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\,z = 2x$; (6) $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z = 2\mathrm{i}y$.

例 1.1 设 $z = \dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 求 $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ 和 $z \cdot \bar{z}$.

解 $$z = \frac{\mathrm{i}^2 + (1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}} = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{-3-\mathrm{i}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\mathrm{Re}\,z = -\frac{3}{2}, \quad \mathrm{Im}\,z = -\frac{1}{2}, \qquad z \cdot \bar{z} = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2 = \frac{5}{2}.$$

1.1.2 复平面与复数的表示方法

1. 复数的点表示法与复平面

由于一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与一对有序实数 (x, y) 是一一对应的,因而对于平面上给定的直角坐标系 xOy, 复数 z 的全体与该平面上的点的全体是一一对应的. 这样复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可用该平面上坐标为 (x, y) 的点 P 来表示, xOy 平面此时也被称为复平面或 z 平面.

显然, x 轴上的点对应的是实数,称 x 轴为实轴; y 轴上的点(除原点)对应的

是纯虚数，称 y 轴为虚轴. 这样，复数与复平面上的点成一一对应，可以把"点 z"和"复数 z"等同看待. 这种点、数的等同将带来许多方便. 在此观点下，一个复数集合就是一个平面点集，自然地，某些特殊的平面点集就可以用复数所满足的某种关系式来表示. 例如，$\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 表示上半平面.

2. 复数的向量表示、模与辐角

在复平面上，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 对应的点 $P(x,y)$ 还与从原点 O 指向点 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP} = \{x,y\}$ 一一对应(图 1.1). 因此，复数 z 也可以用复平面内以原点为起点，以 $P(x,y)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，称该复数 z 为复向量 z，简称为向量 z. 通过这种对应关系，可以利用复数表示诸如速度、电磁场、电场等实际问题中常见的平面向量，这样复变函数论就可以被广泛地应用于理论物理、弹性力学、流体力学、电磁场学等学科，成为重要的数学工具.

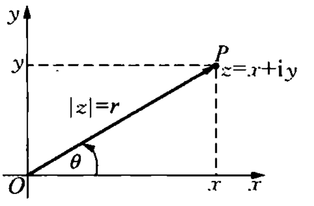


图 1.1

向量 z 的长度称为 z 的模或绝对值，记为 $|z|$，即

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.5}$$

显然有，$|z| \leqslant |x| + |y|$，$|z| \geqslant |y|$，$|z| \geqslant |x|$. 当 $z \neq 0$ 时，把以正实轴为始边、向量 z 为终边的转角 θ 称为复数 z 的辐角(argument)，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. θ 用弧度制表示.

对于每个 $z \neq 0$，由于辐角 θ 增加 2π 的整数倍时，其终边不变，因此辐角 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为复数 z 辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的主值或主辐角，记为 $\theta_0 = \arg z$，于是有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1.6}$$

顺便指出，也可以把辐角主值定义为 $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$，也用记号 $\arg z$ 表示，即 $0 \leqslant \arg z < 2\pi$，这时式(1.6)仍然成立. 在第 6 章保形映射中，这样规定主辐角比较方便.

当 $z = 0$ 时，因零向量没有确定的方向，故辐角无意义. 当 $z \neq 0$ 时，辐角主值可按下列关系确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{|z|}, & y \geqslant 0, \\[2ex] -\arccos \dfrac{x}{|z|}, & y < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

辐角主值也可以由其他反三角函数主值确定，如由反正切函数主值确定. 此时，辐

角的表示式稍微复杂些，要看 z 在哪个象限而定. 用 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 表示 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内正切的一个角(图 1.2)，有

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \pi/2, & x=0,\ y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant 0,\\ -\pi/2, & x=0,\ y<0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0.\end{cases}\tag{1.8}$$

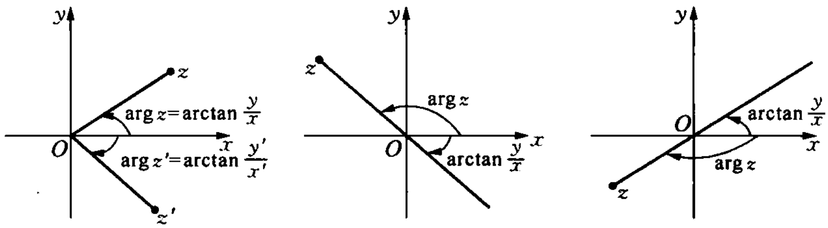


图 1.2

例 1.2　求 $\arg(-1-\mathrm{i})$ 和 $\mathrm{Arg}(-4+3\mathrm{i})$.

解　因 $-1-\mathrm{i}$ 在第三象限，由式(1.8)有

$$\arg(-1-\mathrm{i})=-\pi+\arctan\frac{-1}{-1}=-\frac{3\pi}{4}.$$

因 $-4+3\mathrm{i}$ 在第二象限，由式(1.8)有

$$\arg(-4+3\mathrm{i})=\arctan\frac{-3}{4}+\pi=-\arctan\frac{3}{4}+\pi,$$

由式(1.6)，有

$$\mathrm{Arg}(-4+3\mathrm{i})=-\arctan\frac{3}{4}+(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 等同于平面上的一个向量 $\overrightarrow{OP}=\{x,y\}$，根据复数的运算法则可知，两个复数的加、减法运算和相应向量的加、减法运算一致(图 1.3).

由向量的减法可以知道，向量 $\overrightarrow{Oz_2}$ 减去向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 所得的差，就是从点 z_1 到点 z_2

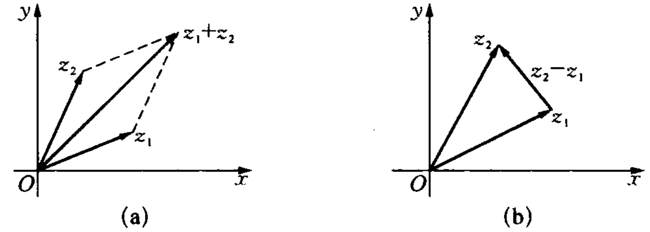


图 1.3

的向量，这个向量对应的复数是 z_2-z_1. 注意到这个向量的长度就是复数 z_2-z_1 的模，由此可以得到一个很有用的结论：复平面上两个点 z_1 与 z_2 之间的距离，就是 $|z_2-z_1|$. 由该结论出发，再结合三角形两边之和不小于第三边、两边之差不大于第三边的法则，由图 1.3 可以得到如下不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\qquad |z_2-z_1|\geqslant||z_2|-|z_1||.\tag{1.9}$$

对于式(1.9)也可以用共轭复数的性质 $z\cdot\bar{z}=z\bar{z}=|z|^2$ 加以证明.

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}+|z_2|^2=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

于是
$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

将该式应用于 z_2, z_1-z_2 以及 z_1, z_2-z_1 就可证明

$$|z_2-z_1|\geqslant||z_2|-|z_1||.$$

3. 复数的三角表示、指数表示

设 $z=x+\mathrm{i}y\neq0$, r 为 z 的模，θ 为 z 的任意一个辐角. 因 r, θ 可以视为点 z 的极坐标，根据直角坐标与极坐标之间的关系有 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 于是非零复数 z 可以表示为

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\tag{1.10}$$

式(1.10)称为复数的三角表示式. 再结合欧拉公式（它涉及指数函数 e^z 的定义，见式(2.9)) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 非零复数 z 又可以表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\tag{1.11}$$

称式(1.11)为复数的指数表示式. 而称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数的代数表示式.

一个复数 z 的三角、指数表示式不是唯一的，因为其中的辐角 θ 有无穷多种选