概率论与随机过程：理论、历史及应用

王丽霞 编著

清华大学出版社

概率论与随机过程：
理论、历史及应用

王丽霞 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书共10章.其中,第1～5章是概率论的内容,包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理;第6～10章是随机过程的内容,包括随机过程的基本概念、维纳过程与泊松过程、马尔可夫链、平稳过程、平稳过程的谱分析.本书强调对数学思想方法的理解,强调根据认知规律构建以客观背景为依托、以实际应用为归依、以历史线索和逻辑关系为纽带的有机而立体的知识体系以及综合能力的培养,融入了大量的背景史料.

本书是为普通高等院校理工科非数学专业本科生编写的教材,也可作为非数学专业硕士研究生的教材或教学参考书,还可供教师、工程技术人员以及数学史工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与随机过程:理论、历史及应用/王丽霞编著. --北京:清华大学出版社,2012.3
ISBN 978-7-302-28128-3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①概率论 ②随机过程　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第032230号

责任编辑: 刘　颖
封面设计: 常雪影
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 王静怡

出版发行: 清华大学出版社
网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址: 北京清华大学学研大厦A座　**邮　编:** 100084
社 总 机: 010-62770175　**邮　购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销: 全国新华书店
开　本: 185mm×230mm　**印　张:** 20　**字　数:** 431千字
版　次: 2012年3月第1版　**印　次:** 2012年3月第1次印刷
印　数: 1～3000
定　价: 36.00元

产品编号:043284-01

前言

foreword

本书是参照普通高等院校概率论与随机过程教学基本要求，并结合自己多年讲授该课程的经验和体会以及所进行的相关研究编写而成.全书以假定读者具有微积分和线性代数的基本知识为起点(平稳过程的谱分析部分要求读者有积分变换和复变函数的初步知识)，根据认知规律并结合大量背景史料，深入浅出地悉心构建了从随机事件、概率等最基本的概率论知识到现代工程技术中广泛应用的平稳过程的谱分析的以客观背景为依托、以实际应用为归依、以历史线索和逻辑关系为纽带的有机而立体的知识体系.

本书以“思想与技巧并重、整体与局部并重、历史与现状并重、知识与能力并重”为理念，特别注意兴趣的引发和对数学思想方法的领悟，强调根据认知规律安排教学内容，努力做到正本、澄源、清流，着意呈现数学与其他领域的交融，突出立体化知识体系的构建以及综合能力的培养.具体地，在本教材的编写过程中，力求突出以下特点：

1. 溯源　追溯问题的起源，并将基本问题、重要概念的引入背景全面而有机地融入课程的逻辑体系；

2. 鉴古　特别注意选取历史名题作为例题，突出数学知识的积淀与突破过程；

3. 析梳　每章单独编写一节历史注记，系统梳理、总结相关思想方法产生、发展的线索以及重要历史人物的主要贡献，在严密构建理论体系的基础上，突出其时空演进线索及各部分内容之间的联系；

4. 道术合一　特别注意典型数学模型的提炼过程及其推广应用，注意在提高逻辑推理能力的同时发展数学的直观感受力与合情推理能力.

在长期的教学实践中，虽然感觉到本课程的很多思想非常朴素，用到的数学工具也并不深奥(多数还比较初等)，但它别开生面的研究课题、独特的思维视角和推理方法，以及丰富的内容、深刻的结果，往往使初学者感觉难以

理解、接受和掌握，因此希望通过上述努力，能熔数学知识的传授与数学文化素养的熏陶于一炉，使读者感受本课程亲切、生动、富有魅力，并将单纯的课程学习转化为对数学思想和数学方法的领悟，愉快地构建起一个以逻辑结构和发展线索为经纬、各部分内容有机联系的动态而立体化的知识体系，同时逐步提高运用数学知识解决各种问题的能力.

本书既可以作为普通高等院校非数学专业本科生、硕士研究生的教材或教学参考书，也可供教师、工程技术人员以及数学史研究者阅读参考. 本书采用模块式编排，读者可以根据自己的需要学习全部或部分内容. 作为零概率论起点的普通高等院校非数学专业本科生教材，全书内容的讲授约需 48～54 学时.

感谢北京邮电大学理学院及教务处对我的相关教学和研究工作的支持. 感谢浙江大学陈杰诚教授，我曾向他请教傅里叶变换的有关内容. 感谢我的同事们，我曾经与他们进行过不少有益的讨论. 感谢我的所有学生们，他们对知识的渴求是我开展教学研究工作的持续动力. 感谢清华大学出版社对编著、出版本书的鼓励和支持，感谢刘颖老师在本书加工过程中所做的大量烦琐、细致而重要的工作.

由于水平所限，书中难免存在不妥甚至错误之处，恳请各位读者批评指正.

王丽霞

2011 年秋于北京

目录

contents

第1章

chapter 1

随机事件及其概率

1.1 随机试验、随机事件及样本空间

1.1.1 随机现象与统计规律性

人们在自然界和社会实践活动中所遇到的各种现象大体可以分为如下两类：

一类是在一定的条件下，必然会出现某种确定结果的现象. 例如，向上抛一粒石子，由于地球引力的作用，石子上升到一定高度后必定会下落. 这类现象称为**确定性现象**（或**必然现象**）. 确定性现象大量存在于自然现象和社会现象中. 例如，在没有任何外力作用的条件下，物体必定保持静止或匀速运动状态；异性电荷必定相互吸引，等等，这些都是确定性现象.

另一类则是在基本条件相同的情况下，可能会出现不同的结果，而且在结果出现之前不能预知确切结果的现象. 例如，在基本条件相同的前提下抛同一枚硬币，结果可能是正面向上，也可能是反面向上，在硬币落地前不能预知究竟哪一面向上. 这类现象称为**随机现象**（或**偶然现象**）. 随机现象也广泛存在于自然现象和社会现象中. 例如，用同一测量工具测量同一物体的长度，每次测量的结果会有一定的差异，在测量结果出来之前不能预知确切的测量值；用同一门火炮向同一目标进行射击，各次弹落点不尽相同，在一枚炮弹落地前不能预知其确切的落点，等等，这些都是随机现象.

由于随机现象具有多种（两种或两种以上）可能的结果，而且事先不知道究竟会出现哪一种结果，因此随机现象似乎是杂乱无章、难以捉摸的. 然而，通过长期实践、观察和深入研究，人们发现虽然从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是随机的，但大量重复观察某个随机现象，其结果会呈现出某种固有规律性. 例如，大量重复抛一枚硬币，正面向上与反面向上的次数大体相同；用同一门火炮向同一目标进行多次射击，虽然各次弹落点不尽相同，但大量炮弹的弹着点会按照一定的规律分布；用同一测量工具多次测量同一物体的长度，虽然每次测量的结果会有一定的差异，但测量结果的平均值会随着测量次数的增加逐渐稳定于某一常数，等等. 随机现象在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，称为随机现象的**统计规律性**.

随机现象的统计规律是客观存在的.数学家们通过对各种随机现象进行深入研究,取得了极其丰富的重要成果,形成了若干门研究随机现象的学科.概率论就是其中的基础学科,它在自然科学、社会科学、工程技术,乃至人们的日常生活中都有着广泛而重要的应用.

1.1.2 随机试验

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.概率论中将具有如下 3 个特点:

(1) 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 多结果性:每次试验的可能结果不止一个,并且全部可能结果都是明确可知的;

(3) 不确定性:每次试验之前不能确定会出现哪一个结果.

具有上述 3 个特点的一切试验或观察称为**随机试验**,简称**试验**.通常用字母 E 表示表示随机试验.下面给出一些随机试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面(记为 H)、反面(记为 T)出现的情况;

E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面、反面出现的情况;

E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察出现正面的次数;

E_4:掷一粒骰子,观察出现的点数;

E_5:记录某电话交换台 1 min 内接到的呼叫次数;

E_6:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命;

E_7:向平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}$ 内随机投掷一点,观察落点 P 的坐标(假设点一定落在 D 上).

1.1.3 样本空间与随机事件

为了用现代数学方法描述和研究随机现象,奥地利数学家米泽斯(Richard von Mises)于 1928 年引进了样本空间的概念.

随机试验 E 的每个可能的基本结果称为**样本点**,一般记为 ω;随机试验 E 的全体样本点的集合称为 E 的**样本空间**,一般记为 Ω.

由于随机试验的所有可能结果是明确可知的,因此一个试验的样本点和样本空间是可以确定的.易知,上述 7 个试验的样本空间分别为:

$$\Omega_1=\{H,T\};$$

$$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,TTH,THT,TTT\};$$

$$\Omega_3=\{0,1,2,3\};$$

$$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\};$$

$$\Omega_5=\{0,1,2,3,\cdots\};$$

$$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\};$$

$$\Omega_7=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}.$$

只包含有限个样本点的样本空间,如上述 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$,称为**有限样本空间**.只包含可列个样本点的样本空间,如上述 Ω_5,称为**可列样本空间**.有限样本空间和可列样本空间统称

为**离散样本空间**.全部样本点可以充满某个区间(或区域)的样本空间,如上述 Ω_6,Ω_7,称为**连续样本空间**.

需要注意的是:一个试验的样本点和样本空间是由试验的目的所决定的.例如,在 E_2 和 E_3 中,虽然都是将一枚硬币抛三次,但由于试验目的不一样,其样本点和样本空间也不一样.

进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的样本点组成的集合.例如,若规定某种灯泡的寿命(单位:h)小于 500 为次品,则在 E_6 中我们关心灯泡的寿命 t 是否满足 $t\geqslant 500$.满足这一条件的样本点构成 Ω_6 的一个子集 $A=\{t\mid t\geqslant 500\}$.我们称 A 为 E_6 的一个随机事件.显然,当且仅当子集 A 的一个样本点出现时,有 $t\geqslant 500$,即 A 发生.

一般地,我们称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称**事件**①.在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**.只包含一个样本点的事件称为**基本事件**.包含多个样本点的事件称为**复合事件**.随机事件一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

Ω 是其自身的子集,它包含所有的样本点,在每次试验中总是发生,称为**必然事件**.$\varnothing$ 是 Ω 的子集,它不包含任何样本点,在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

例如,在 E_4 中,A:“掷得 1 点”,B:“掷得奇数点”,C:“掷得点数不超过 6”,D:“掷得 7 点”均为事件,其中 $A=\{1\}$ 是基本事件,$B=\{1,3,5\}$ 是复合事件,$C=\Omega_4$ 是必然事件,$D=\varnothing$ 是不可能事件;在 E_6 中,G:“灯泡的寿命大于 500 h 小于 1000 h”,即 $G=\{t\mid 500<t<1000\}$ 是复合事件.

由此可见,样本空间的引入使得对随机事件的研究转化成了对集合的研究,这样就架起了概率论与集合论之间的桥梁.

1.1.4 事件间的关系及运算

既然事件是集合,因此事件间的关系和运算自然按照集合论中集合之间的关系和运算来表示和处理.下面给出集合论中一些常用关系和运算在概率论中的提法,并根据“事件发生”的含义,给出它们在概率论中的解释.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω,$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集,且为 E 的事件.

1. 事件的包含与相等

若 $A\subset B$,则称事件 B **包含**事件 A(也称 A 是 B 的**子事件**),指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

---

① 严格地说,事件是指 Ω 中的满足某些条件的子集.当 Ω 是可列样本空间时,Ω 的每个子集都可作为一个事件.若 Ω 是连续样本空间,则某些子集必须排除在外,只有满足一定条件的子集才能作为事件(详见 1.2.4 节).幸而这种必须排除在外的子集在实际应用中几乎不会遇到.今后,每当我们讲到一个事件时,都假定它是满足事件所规定的那些条件的子集.

若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B **相等**.

2. 和事件

$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，指的是“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”. $A\cup B$ 也可记为 $A+B$.

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\overset{\text{def}}{=\!=}A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\overset{\text{def}}{=\!=}A_1\cup A_2\cup\cdots$称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

3. 积事件

$A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，指的是“事件 A 与事件 B 都发生”. $A\cap B$ 也记为 AB.

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k\overset{\text{def}}{=\!=}A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\overset{\text{def}}{=\!=}A_1\cap A_2\cap\cdots$称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积事件.

4. 差事件

$A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，指的是“A 发生而 B 不发生”.

5. 互不相容事件（互斥事件）

如果 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容事件**或**互斥事件**，指的是“A,B 两事件不能同时发生”.

考虑事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(,\cdots)$，如果对任意 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n(,\cdots)$**两两互斥**，或**两两互不相容**.

6. 对立事件（逆事件）

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或事件 A,B 互为**逆事件**，指的是“在一次试验中，事件 A,B 必有一个发生且只有一个发生”. 事件 A 的逆事件一般记为 $\overline{A}$.

易知，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件.

为帮助读者理解和记忆概率论中关于事件的一些概念和符号，现将其与集合论中的相应概念对照列成表 1.1.1.

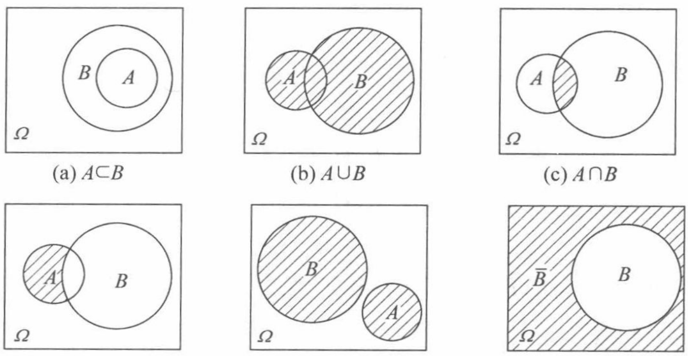
表 1.1.1 事件与集合对照表

符 号	概 率 论	集 合 论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\omega\in\Omega$	样本点	元素
$\{\omega\}$	基本事件	单点集

续表

符　号	概　率　论	集　合　论
$A\subset B$	事件 B 包含事件 A(事件 A 发生导致 B 也发生)	A 是 B 的子集
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等
$AB=\varnothing$	A 与 B 不相容	A 与 B 无公共元素
$\overline{A}$	A 的对立事件(A 不发生)	A 的补集
$A\cup B$	A 与 B 的和事件(A 与 B 至少有一个发生)	A 与 B 的并集
$A\cap B$	A 与 B 的积事件(A 与 B 同时发生)	A 与 B 的交集
$A-B$	A 与 B 的差事件(A 发生而 B 不发生)	A 与 B 的差集

以上事件之间的关系和运算可以用文氏(Venn)图来直观表示. 若用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的关系和运算如图 1-1 中(a)～(f)所示.



(a) $A\subset B$　(b) $A\cup B$　(c) $A\cap B$

(d) $A-B$　(e) $A\cap B=\varnothing$　(f) $B\cup\overline{B}=\Omega,\ B\cap\overline{B}=\varnothing$

图　1-1

7. 事件的运算律

事件的运算满足下面 4 条运算律. 设 A,B,C 为事件,则有:

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$;

(2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$, $A(BC)=(AB)C=ABC$;

(3) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=AB\cup AC$;

(4) 德·摩根律(De Morgan): $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德·摩根律可以推广到有限个以及可列个事件的情形,即有:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$