华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学类(二)
配高教社《高等代数》第三版
北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组 编

高等代数

(第三版)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 清华大学 唐亚楠

- **紧贴教材**:精讲重点 点拨方法 联系考研
- **考试宝典**:教材精华 经典试卷 常考试题
- **学习卡**:资料下载 信息交流 互动论坛
- **课后习题**:三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

高等代数

（第三版）

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 清华大学 唐亚楠

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数同步辅导及习题全解/唐亚楠主编.—徐州：中国矿业大学出版社，2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7-81107-396-X

Ⅰ.高… Ⅱ.唐… Ⅲ.高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086952 号

书　　名	高等代数同步辅导及习题全解
主　　编	唐亚楠
责任编辑	罗　浩
出版发行	中国矿业大学出版社
网　　址	http://www.cumtp.com　E-mail　cumtpvip@cumtp.com
印　　刷	北京市昌平百善印刷厂
经　　销	新华书店
开　　本	850×1168　1/32　本册印张 13.75　本册字数 351 千字
版次印次	2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价	57.60 元

(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

《高等代数》是数学专业重要的专业课程之一，也是报考该类专业硕士研究生的考试课程。北京大学数学系几何与代数教研组前代数小组编写的《高等代数》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等代数同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 内容提要：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统。

2. 典型例题与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

3. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入的讲解。

4. 课后习题全解：本书给出了北京大学数学系几何与代数教研组前代数小组编写的《高等代数》(第三版)各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且根据难易程度把课后习题分成了三个等级，针对不同的等级我们给出了不同程度的讲解。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

华腾教育教学与研究中心

目录 CONTENTS

第一章

多项式

内容提要

一、数域

1. 设 P 是至少含有两个数(或包含 0 与 1)的数集,如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数,则称 P 为一个数域.
2. 定理　任何数域都包含有理数域 Q. 在有理数域 Q 与实数域 R 之间存在无穷多个数域;在实数域 R 与复数域 C 之间不存在其他的数域.

二、一元多项式

1. 设 P 为数域. 如下的表达式称为数域 P 上的(一元)多项式:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$,$a_ix^i$ 称为 $f(x)$ 的第 i 次项,a_i 称为 i 次项系数. 如果 $a_n\neq0$,则 $f(x)$ 的次数 n,记为 $\partial(f(x))=n$. 零多项式无次数.

2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等当且仅当同次项系数相等.

3. 多项式的和、差运算归结为同次项系数的和、差. 多项式的乘法运算归结为逐项相乘后合并同类项. 加法和乘法适合交换律、结合律、分配律、消去律.

4. 数域 P 上的所有(一元)多项式的集合称为 P 上的一元多项式环,记为 $P[x]$.

三、多项式的带余除法及整除性

1. 定理(带余除法)　设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,则存在惟一的多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$. 称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

2. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果存在多项式 $h(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=h(x)g(x)$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除),记为 $g(x)\mid f(x)$. 此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式,$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式,商 $h(x)$ 也记为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,即 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. 用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x)=h(x)g(x)$ 成立.

3. 整除的主要性质

(1) 若 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid f(x)$,则 $f(x)=cg(x)$(c 为非零常数).

(2) 若 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$(传递性).

(3) 若 $f(x)\mid g_i(x)$,$i=1,2,\cdots,r$,则 f 整除 $g_i(x)$ 的组合,即 $f(x)\mid[u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)]$,其中 $u_i(x)$ 是数域 P 上的任意多项式.

四、最大公因式

当 $g(x)\mid f(x)$ 时,称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式,称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式.

若 $\varphi(x)$ 同时是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的因式，则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.

定义　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $P[x]$ 中两个多项式，$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，如果它满足下面两个条件：

(1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

(2) $f(x)$，$g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式记为 $(f(x), g(x))$.

五、因式分解

1. 定义

数域 P 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 称为域 P 上的不可约多项式，如果它不能表示成数域 P 上的两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积.

一个多项式是否不可约是依赖于系数所属数域 P 的.

不可约多项式 $p(x)$ 与任一多项式 $f(x)$ 之间只可能有两种关系：或者 $p(x) \mid f(x)$；或者 $(p(x), f(x)) = 1$.

2. 定理

如果 $p(x)$ 是不可约多项式，那么对于任意两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$.

3. 因式分解及惟一性定理

数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以惟一地分解成 P 上一些不可约多项式的乘积. 所谓惟一性是说，如果有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有 $s = t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, s,$$

其中 c_i 是一些非零常数.

标准分解式为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中 c 是 $f(x)$ 的首项系数，$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 是不同的首项系数为 1 的不可约多项式，$r_i\in\mathrm{N}^*$.

六、重因式

1. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$，其中 x 是文字，称多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的微商(或导数). 当 $k>1$ 时，规定 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶微商 $f^{(k-1)}(x)$ 的微商，即 $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$. 多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

2. 设 $f(x)\in P[x]$，$p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，k 为非负整数. 如果 $p^k(x)\mid f(x)$ 且 $p^{k-1}(x)\nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式. 当 $k=1$ 时，称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式；当 $k\geqslant 2$ 时，称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

七、多项式函数与多项式的根

1. 定义

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$，其中 x 是文字，数 $\alpha\in P$，将 $f(x)$ 的表示式中的 x 用 α 代替得到 P 中的数

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$$

称 $f(\alpha)$ 为 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 的值，这样由 $f(x)$ 定义了数域 P 上的函数称为 P 上的多项式函数.

2. 多项式的根

(1) 余数定理与因式定理

① 余数定理：用 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$，其余式为常数

$f(a)$.

② 因式定理：a 是多项式 $f(x)$ 的根当且仅当 $x-a$ 整除 $f(x)$.

(2) 重根

① 如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则 a 称为 $f(x)$ 的 k 重根.

② 数域 P 上 n 次多项式在 P 中的根不多于 n 个(重根按重数计算).

(3) 有理根设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，是一个整数系数多项式，$r/s$ 是 $f(x)$ 的有理根，$(r,s)=1$ 则 $s\mid a_n$，$r\mid a_0$. 当 $a_n=1$ 时，$f(x)$ 的有理根都是整数，且为 a_0 的因子.

(4) 根与系数的关系：设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in P[x]$，$f(x)$ 在数域 P 中有 n 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则有

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$
$$a_2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n),$$
$$a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

3. 复系数多项式的因式分解

代数基本定理　每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中有一根.

复系数多项式因式分解定理　每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域上都可以惟一地分解成一次因式的乘积.

每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算).

4. 实系数多项式的因式分解

如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的非实复根，则 α 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根(共轭复根成对出现).

实系数多项式因式分解定理　每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式

在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

标准分解式为

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

$$p_i^2-4q_i<0,\quad i=1,2,\cdots,r;p_i,q_i,c_j(j=1,2,\cdots,s)\in \mathrm{R},\ l_j,k_i\in \mathrm{N}^*.$$

5. **有理数域上多项式的因式分解及根的性质**

(1) 如果一个非零的整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素，则称 $f(x)$ 是一个本原多项式.

(2) 设 $f(x)$ 是任一有理系数多项式，则存在有理数 r 及本原多项式 $h(x)$，使

$$f(x)=rh(x)$$

且这种表示法除了差一个正负号是惟一的. 也即，如果 $f(x)=rh(x)=sg(x)$，其中 $h(x)$，$g(x)$ 都是本原多项式，则必有 $r=\pm s$，$h(x)=\pm g(x)$.

注　上面结果表明有理系数多项式可以转化为整系数多项式来研究.

(3) 高斯(Gauss)引理　两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

(4) 如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(5) 设 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 为本原多项式，如果 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，则 $h(x)$ 一定是整系数多项式.

(6) 艾森斯坦(Eisenstein)判别法　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式，如果存在素数 p，使

①$p \mid a_i (i=0,1,\cdots,n-1)$；　②$p \nmid a_n$；　③$p^2 \nmid a_0$

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(7) 有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约的充分必要条件是，对任意有理数 $a \neq 0$ 和 b，多项式 $g(x)=f(ax+b)$ 在有理数域上不可约.

(8) 在有理数域上存在任意次数的不可约多项式，如 x^n+2 在有理数域上不可约.

八、多元多项式与对称多项式

1. 设 P 是一个数域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是文字，形如 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的式子，其中 $a \in P$，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是非负整数，称为 P 上的一个 n 元单项式.
2. 数域 P 上有限个 n 元单项式的和，称为数域 P 上的一个 n 元多项式.
3. 数域 P 上全体 n 元多项式的集合称为数域 P 上 n 元多项式环.
4. 数域 P 上的一个 n 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$，如果任意交换两个文字的位置，多项式不变，则称为对称多项式.
5. 下面的 n 个多项式称为初等对称多项式：

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_n = x_1x_2\cdots x_n. \end{cases}$$

6. 对称多项式基本定理：数域 P 上的任意 n 元对称多项式都能惟一地表为初等对称多项式的多项式.

典型例题与解题技巧

【例 1】　确定 m,p 的值，使 $x^2+3x+2 \mid x^4+mx^2-px+2$.

解题分析　应用长除法或竖式除法求得余式，再令余式为零，从而得到所求的条件.

解题过程

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2+3x+2 & x^4 \qquad + \qquad mx^2 - px + 2 & x^2-3x+(m+7) \\
 & x^4+3x^3+ \qquad 2x^2 & \quad = q(x) \\
\hline
 & \quad -3x^3+(m-2)x^2-px+2 & \\
 & \quad -3x^3- \qquad 9x^2-6x & \\
\hline
 & \qquad (m+7)x^2-(p-6)x+2 & \\
 & \qquad (m+7)x^2+3(m+7)x+2(m+7) & \\
\hline
 & \quad r(x)=-(3m+p+15)x-(2m+12) &
\end{array}
$$

即用 x^2+3x+2 除 x^4+mx^2-px+2 的余式为

$$r(x)=-(3m+p+15)x-(2m+12)$$

令 $r(x)=0$ 可得

$$-(3m+p+15)=0,\quad -2(m+6)=0$$

解得 $m=-6, p=3$.

【例 2】 设 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2+4x-5$，求 $f(1+i)$ 及 $f(1-i)$.

解题分析 用综合除法求解，$f(x)$ 为 $x-x_0$ 除 $f(x)$ 的余式.

解题过程

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1+i & 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\
 & & 1+i & 2+4i & -5+3i & -4+2i \\
\hline
 & 1 & 3+i & -1+4i & -1+3i & -9+2i
\end{array}
$$

所以 $f(1+i)=-9+2i$

对 $f(1-i)$ 可用共轭复数的性质求，因为，由于 $f(1+i)=-9+2i$，且 $f(x)$ 的系数都是实数，因此

$$\overline{f(1+i)}=\overline{-9+2i}，即\ f(\overline{1+i})=-9-2i$$

从而 $f(1-i)=-9-2i$

【例 3】 设有一个三阶行列式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

试求此行列式，并将其表示成初等对称多项式的多项式.