数学奥林匹克小丛书

高中卷 8

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU

三角与几何

田廷彦 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书

高中卷 8

三角与几何

田廷彦 编著

师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．三角与几何/田廷彦编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4106-5

I.数... II.田... III.数学课—高中—教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016375号

数学奥林匹克小丛书·高中卷
三角与几何

编　　著　田廷彦
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　彭亚新
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

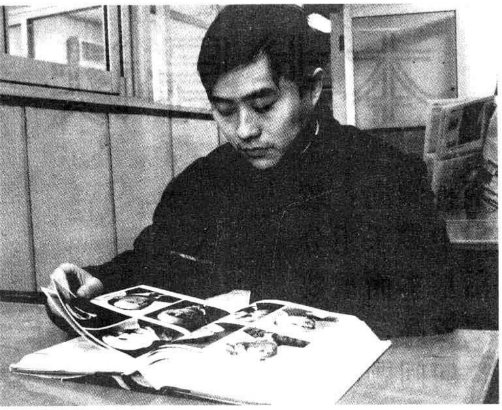
印 刷 者　江苏苏州市永新印刷包装有限责任公司
开　　本　787x960 16开
印　　张　10.5
字　　数　180千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年9月第二次
印　　数　16 001－24 000
书　　号　ISBN 7-5617-4106-5/G·2343
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

本书导读

本书强调三角方法在解几何题时的应用，反对两种倾向：绞尽脑汁的纯几何方法和不动脑筋的死算．在证明过程中多采用分析的方法，有助于理顺思路．本书的题型丰富，包括基本而重要的结论，也有为数不少的新题．大多数题目综合程度较高，部分题目具有一定难度．全书按不同三角公式的运用及几何问题的性质展开，各个单元内的例题按由易到难的顺序．建议读者自己思考，一题多解．例题解答之后一般附有评注，启发读者进行总结归纳或进一步思考．



田廷彦　1972年11月出生．早年习画，小有成就．中学时期一直参加数学竞赛，曾获得十余次奖励，包括全国高中数学联赛一等奖（1990）、美国数学邀请赛一等奖（1990）等五个一等奖，是上海市第一届理科班（在上海中学）的学员．进入上海交通大学应用数学系以及毕业后，仍保持对数学特别是奥数的教研工作，曾在《数学通报》、《数学通讯》等刊物上发表多篇文章，解决了几个问题．出于个人兴趣，也在《中华读书报》、《初中生数学学习》等七八家报刊上发表了（有时用笔名“葛之”）数十篇科技类书评或科学家传记等方面的文章．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚　第44届IMO中国队副领队
上海中学特级教师

葛　军　中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任
南京师范大学副教授

冷岗松　中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
上海大学教授、博士生导师

李胜宏　第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员
浙江大学教授、博士生导师

李伟固　中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
北京大学教授、博士生导师

刘诗雄　中国数学奥林匹克委员会委员
武钢三中校长、特级教师

倪　明　数学奥林匹克小丛书总策划
华东师范大学出版社副总编辑

单　墫　第30、31届IMO中国队领队
南京师范大学教授、博士生导师

吴建平　中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席
第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编

熊　斌　第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员
华东师范大学副教授

余红兵　中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
苏州大学教授、博士生导师

朱华伟　中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
广州大学软件所常务副所长、研究员

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

不久以前，笔者到复旦大学聆听著名数学家吴文俊先生作学术报告. 在报告行将结束之际，吴先生感叹平面几何"难得要死"，而他提出的数学机械化方法，可以让计算机在微秒级的时间内完成一道几何题的证明. 其实，从吴先生的传记看，他从小也是位几何爱好者. 正因为有这样的经历，他才能有这番肺腑之言，才让几何问题的机器证明首先成为数学机械化的一块试金石. 数学机械化真正要做的是高等数学中的诸如解方程之类的算法设计问题，这已在很多领域取得了成就.

自从 1997 年"更深的蓝"击败国际象棋世界冠军卡斯帕罗夫后，有人感到机器开始向人类的智慧挑战. 尽管就目前来看这是一种多虑，但至少国际象棋的魅力受到了一定影响. 不过，几何机械化是绝对不会影响传统几何证明的. 因为从"复杂度"来看，几何比象棋要高一个层次，因为后者完全可以转化为算法，而前者证明过程的重要性不亚于结果（当然数论、拓扑学之类具有更高的复杂度）；其次，数学机械化其实从笛卡儿时代就开始了. 如今的新方法也不是凭空出世的，而是与传统方法有着密切联系. 或许正是因为吴先生曾是个几何爱好者，所以平面几何的机械化成为数学机械化工作中的一个"偶然事件". （只可惜几次与吴先生交谈，都出于敬仰而使客套话几乎占据了一切，"偶然事件"大概永远成为笔者的一个猜测了. ）真正懂得几何的人都知道，几何中的不少结果十分精致漂亮，与数论、不等式不一样，它更具有"上帝"心思的味道，也就是说更为"天然"，人为的痕迹要少些. 在数论、不等式中，提出一个问题往往远比解决一个问题来得容易，但在几何中并非如此. 因此，几何的机械化工作在发现几何命题方面是超越历史的，但寻求一个简洁的传统证明，也是不无意义的（至少在奥数培训方面）.

在所有的传统方法中，纯几何方法无疑是最最困难的，"几何几何，想破脑壳"，苦尽甘来，唯有自知. 但笔者也不欣赏一味地"蛮算"，这样不仅抹杀了几何的美感，更重要的是不易看透问题的本质、意义以及与其他问题的联系，也

很难留下较深刻的印象，这对于今后的学习都是不利的；更何况很多几何难题的计算量会大到令人望而却步（总不能像费马那样写道，“我已经找到了一个绝妙的证明，只可惜这里地方太小，写不下”）的程度；当然，既然是“竞赛”而不是“研究”，那么花几个星期添十几条辅助线也是不足取的．笔者还是认为折中的方案比较好，尤其是三角方法特别受到青睐．这是因为三角方法比解析法灵活，可以简化证明，少添辅助线，且仍能做到有章可循．

单墫教授有一句话给笔者留下了深刻的印象．数年前，笔者曾向他感叹数学之难，单教授的回答意味深长：“弱水三千，只取一瓢．做点普及工作，不算虚度一生．”因此，本书收集了很多题目，有一部分是全新的，笔者希望读者不要错过思考这些问题的机会．在写作上常采用分析法，这有助于理清思路（尤其是较复杂的问题）．特别要指出的是，本书第 1 单元的例 1、例 7，习题 2 的第 18 题，第 5 单元的例 14、例 15，以及第 6 单元的例 7 是笔者的师友、杰出的平面几何专家叶中豪先生的成果（有的已经找到了漂亮的纯几何证明），还有一些是笔者自己的成果．对于中豪大量深入的发现来说，这几道题目也真算得上是“弱水三千，只取一瓢”了．

作者

2004.6.27

目　录

1 三角比的基本性质和初步应用

三角比及三角函数的提出，是数学史上一次巨大的进步. 它在数学的大多数分支中都极为有用，并常常起到本质的作用. 对于平面几何来说，三角比对其核心内容——直角、面积及勾股定理等——给出了一种更为清晰的理解方式.

本单元用到的工具是三角比的定义、基本性质(如增减性、诱导公式等)和常见的特殊角(如 45°、60°等)的三角函数值.

例1 已知等腰$\triangle ABC$，$AB=AC$，一半圆以BC的中点为圆心，且与两腰AB、AC分别相切于点D、G，EF与半圆相切，交AB于点E，交AC于点F. 过E作AB的垂线，过F作AC的垂线，两垂线相交于P，作$PQ\perp BC$，Q为垂足. 求证：$PQ=\dfrac{EF}{2\sin\theta}$，此处$\theta=\angle B$.

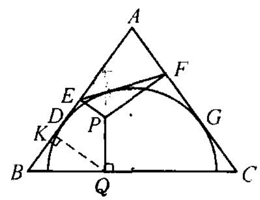


图 1-1

证明 如图 1-1，设$BC=a$，$AB=AC=l=\dfrac{a}{2\cos\theta}$，又设$BE=m$，$CF=n$，$BQ=s$，$CQ=t$，借助于线段$AP$、$BP$、$CP$，利用勾股定理，有

$$AE^2+BQ^2+CF^2=BE^2+AF^2+CQ^2,$$

即 $$(l-m)^2+s^2+n^2=m^2+(l-n)^2+t^2,$$

所以 $$s^2-t^2=2l(m-n)=\frac{a}{\cos\theta}(m-n),$$

又$s+t=a$，故 $$s-t=\frac{m-n}{\cos\theta},$$

于是 $$s=\frac{a}{2}+\frac{m-n}{2\cos\theta}.$$

易知

$$BD = CG = \frac{a}{2}\cos\theta,$$

$$\begin{aligned} EF &= DE + FG \\ &= BE + CF - (DB + CG) \\ &= m + n - a\cos\theta. \end{aligned}$$

现作 $QK \perp AB$，则 $\angle PQK = \angle B = \theta$.

于是由 $BK + KE = BE$，得

$$s\cos\theta + PQ\sin\theta = m,$$

所以

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{m - s\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{m - \left(\frac{a}{2} + \frac{m-n}{2\cos\theta}\right)\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\frac{m+n}{2} - \frac{a}{2}\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{m + n - a\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{EF}{2\sin\theta}. \end{aligned}$$

评注 这个漂亮的结果是叶中豪先生告诉笔者的. 此证明对几何综合素质有一定的要求. 三角比的引入给证明带来不少便利.

例 2 设四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 O，点 M、N 分别是 AD、BC 的中点，点 H_1、H_2（不重合）分别是 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的垂心，求证：

$$H_1H_2 \perp MN.$$

证明 如图 1-2，不妨设 $\angle AOB$（$=\theta$）$<90^\circ$（其余情形请读者自己讨论），并不妨设 BH_1 与 CH_2 的延长线交于点 P.

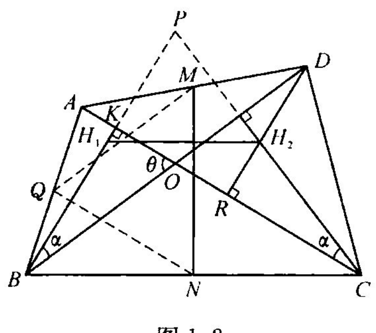


图 1-2

取 AB 中点 Q，连接 MQ、NQ. 易见 $MQ \parallel BD$，从而 $MQ \perp H_2P$，同理可得 $NQ \perp H_1P$，于是 $\angle P = \angle MQN$. 对于 $\triangle PH_1H_2$ 与 $\triangle QNM$ 来说，对应角已有一组相等，对应边已有两组垂直，如能证明它们是（顺向）相似的，则立得第三组对应边垂

直，即 $MN \perp H_1H_2$.

于是，问题归结为求证

$$\frac{QM}{QN}=\frac{PH_2}{PH_1} \text{ 或 } \frac{PH_1}{PH_2}=\frac{AC}{BD}.$$

设 $\angle PCO=\alpha(=90^\circ-\theta)=\angle PBO$，于是

$$\frac{KR}{PH_2}=\cos\alpha,$$

此处点 K 和 R 分别为点 B 及点 D 在 AC 上的垂足.

又 $KR=BD\cos\theta$，故

$$PH_2=BD\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}=BD\cot\theta,$$

同理
$$PH_1=AC\cot\theta,$$

即得
$$\frac{PH_1}{PH_2}=\frac{AC}{BD}.$$

评注 此题有对称性，求出一个值后另一值同理可求，这确实省了不少事. 由此可得一著名的结论：完全四边形的垂心线与牛顿线垂直.

例3 已知平行四边形 $ABCD$，点 E 是点 B 在 AD 上的垂足，点 F 在 CD 上，$\angle AFB=90^\circ$，$EG \parallel AB$，点 G 在 BF 上，点 H 是 AF 与 BE 的交点，又 DH 延长后与 CB 的延长线交于点 I，求证：$FI \perp GH$.

证明 如图 1-3，作 $IK \perp HF$，对于 $\triangle FKI$ 与 $\triangle HFG$ 来说，$KF \perp FG$，$KI \perp HF$，而 $\angle HFG=90^\circ=\angle FKI$. 如果能证明两三角形（顺向）相似，那么第三组对应边 FI 与 HG 就垂直了，于是只需证明

$$\frac{KF}{FG}=\frac{KI}{HF} \text{ 或 } \frac{KF}{KI}=\frac{FG}{HF}.$$

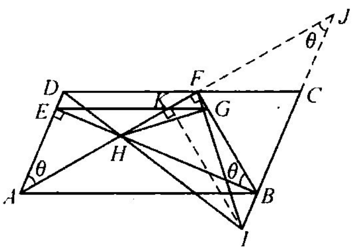


图 1-3

事实上设 AF、BC 延长后交于点 J，且设 $\angle J=\theta$，则易知

$$KF=BI\cos\theta,$$
$$KI=IJ\sin\theta,$$

于是

$$\frac{KF}{KI}=\frac{BI}{IJ}\cot\theta=\frac{DE}{AD}\cot\theta=\frac{FG}{FB}\cot\theta,$$

又 $HB\perp BJ$，故 $\angle HBF=\theta$，于是

$$FB\tan\theta=HF,$$

代入上式，即得

$$\frac{KF}{KI}=\frac{FG}{HF}.$$

评注 这道题目值得我们去回味的是：凡是直角多的题不妨多考虑三角比.

例 4 已知正三角形 ABC 内有一点 P，在三边 BC、CA、AB 上的垂足分别为点 D、E、F，连接 PA、PB、PC，求证：

$$S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}=S_{\triangle PBF}+S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PCD}.$$

证明 此题比想象的略难一些. 计算是必要的，关键在于如何设置既少又好的自由参数，使论证最简捷.

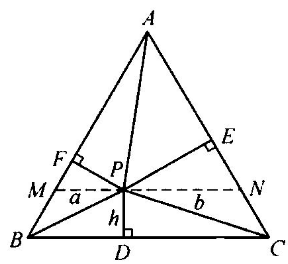


图 1-4

下面介绍一种方法. 如图 1-4，过点 P 作 $MN\parallel BC$，点 M、N 分别在 AB、AC 上，设 $PM=a$，$PN=b$，$PD=h$. 下面我们来计算.

先看 $S_{\triangle PAF}$，由于

$$PF=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$AF=AM-MF=(a+b)-a\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a+b,$$

故
$$S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}AF\cdot PF=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab.$$

其次，看 $S_{\triangle PBD}$，由于

$$BD=a+h\cot 60^\circ=a+\frac{h}{\sqrt{3}},$$

故 $$S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}BD\cdot PD=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2\sqrt{3}}h^2.$$

最后看 $S_{\triangle PCE}$，由于

$$\begin{aligned}PE&=b\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}b,\\ CE&=EN+CN\\ &=b\cos 60^\circ+\frac{h}{\sin 60^\circ}\\ &=\frac{b}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}h,\end{aligned}$$

故 $$S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}CE\cdot PE=\frac{\sqrt{3}}{8}b^2+\frac{1}{2}bh.$$

这样便有

$$\begin{aligned}&S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}\\ =&\frac{\sqrt{3}}{8}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2\sqrt{3}}h^2+\frac{\sqrt{3}}{8}b^2+\frac{1}{2}bh\\ =&\frac{\sqrt{3}}{8}a^2+\frac{\sqrt{3}}{8}b^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}h^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh\\ =&\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a+b+\frac{2}{\sqrt{3}}h\right)^2\\ =&\frac{\sqrt{3}}{8}BC^2\\ =&\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},\end{aligned}$$

显然可知 $$S_{\triangle PBF}+S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

由此知结论成立.

例5 已知$\triangle ABC$，其中BC上有一点M，且$\triangle ABM$与$\triangle ACM$的内切圆大小相等，求证：

$$AM=\sqrt{p(p-a)},$$

此处 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，a、b、c 分别为$\triangle ABC$对应三边之长.

证明　设 $AM=x$，两圆半径均为 r．易知

$$r(a+b+c+2x)=2S_{\triangle ABC}.$$

如图 1-5，设两圆与 BC 分别切于点 E、F．则

$$BE=r\cot\frac{\angle B}{2}=\frac{1}{2}(AB+BM-x),$$

$$CF=r\cot\frac{\angle C}{2}=\frac{1}{2}(AC+CM-x),$$

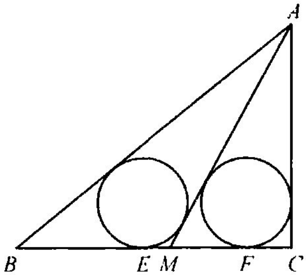


图 1-5

两式相加，得

$$r\left(\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)=\frac{1}{2}(a+b+c-2x),$$

于是，有

$$S_{\triangle ABC}\left(\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)^2-x^2.$$

又设$\triangle ABC$的内切圆半径为 r'，易知

$$\begin{aligned}&S_{\triangle ABC}\left(\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)\\=&\frac{1}{2}\left(r'\cot\frac{\angle A}{2}+r'\cot\frac{\angle B}{2}+r'\cot\frac{\angle C}{2}\right)\cdot(a+b+c)\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{2}+\frac{a+c-b}{2}+\frac{a+b-c}{2}\right)(a+b+c)\\=&\frac{1}{4}(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}x^2&=S_{\triangle ABC}\cdot\cot\frac{\angle A}{2}\\&=\frac{1}{2}r'(a+b+c)\cdot\frac{b+c-a}{2r'}\\&=\frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a)\\&=p(p-a).\end{aligned}$$

评注　此题看似不难，但计算不当却极易陷入“泥潭”．

例 6　已知凸五边形 $ABCDE$．其中 $\angle ABC=\angle AED=90^\circ$，$\angle BAC=\angle EAD$，$BD$ 与 CE 交于点 O．求证：