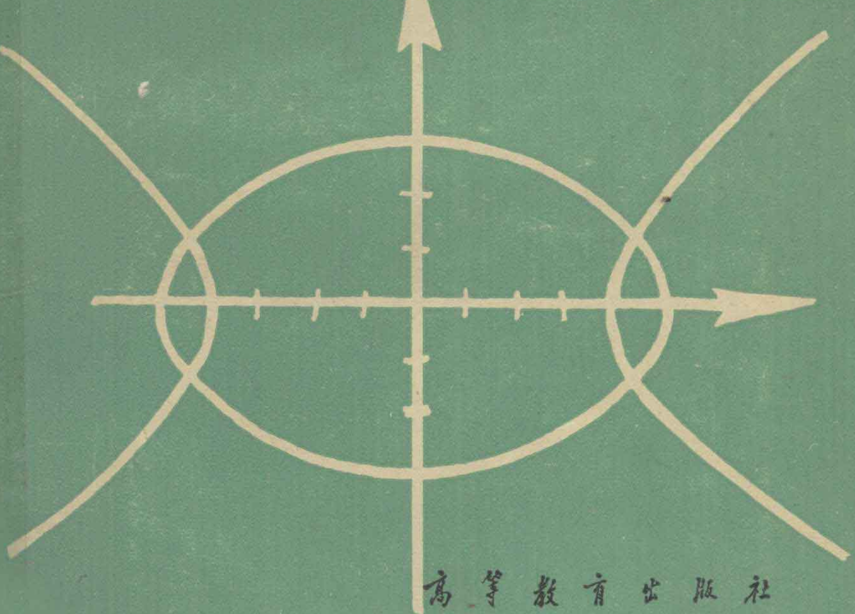
中等专业学校教材

工科专业通用

# 数学

第二册

工科中专数学教材编写组编
上海市中专数学教材编写组修订



高等教育出版社

中等专业学校教材

工科专业通用

# 数　学

## 第二册

工科中专数学教材编写组编
上海市中专数学教材编写组修订

高等教育出版社

本书是在教育部组织的工科中专数学教材编写组编的《数学》(工科专业通用)(第一分册，1979 年 12 月第一版；第二分册，1980 年 2 月第一版)的基础上，根据 1983 年修订的《中专数学教学大纲》的要求修订而成的．本书共分四册．第二册主要内容为立体几何、平面解析几何和数列．可供招收初中毕业生的中等专业学校工科各专业作为教材使用．

中等专业学校教材

工科专业通用

# 数　学

第 二 册

工科中专数学教材编写组编

上海市中专数学教材编写组修订

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 8.75　字数 179,000

1979 年 12 月第 1 版

1985 年 5 月第 2 版　1985 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—200,000

书号 13010·01041　定价 1.10 元

# 目　　录

# 第九章　空间图形

在平面几何里，我们研究了平面图形的一些概念、性质和它们的应用．但在日常生活和生产实际中还会遇到一些几何图形，这些图形上的点不完全在同一个平面内，这样的图形叫做**空间图形**(或**立体图形**)．例如，桌子、书、粉笔、螺母、车刀等物体，它们的几何形状都是空间图形．平面图形是由同一平面内的点、线组成的，空间图形是由空间的点、线、面组成的．

本章将研究空间图形的一些概念、性质和它们的应用．

## §9-1　平　　面

### 一　平面及其表示法

平面是广阔无涯的．也就是说，平面是可以无限伸展的．我们日常见到的平面图形，如黑板面、窗玻璃面、课桌面、纸面等，都可看作平面的一部分，它们大都具有矩形的形状．当我们站在适当的位置看一个矩形时，会感觉它们都象平行四边形．因此，通常把一个平面画成平行四边形，并用一个希腊字母 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、…写在平行四边形某一顶角的内部来表示，如图 9-1(1)、(2)、(3) 中的平面 $\alpha$、$\beta$ 和 $\gamma$．有时也用平行四边形顶点的字母来表示一个平面，如图 9-1(4) 中的平面可表示为平面 $ABCD$ 或平面 $AC$．

画一个水平放置的平面时，一般把平行四边形的锐角大约画成 $45^\circ$，把横边的长度画得大约等于另一边长度的两倍．

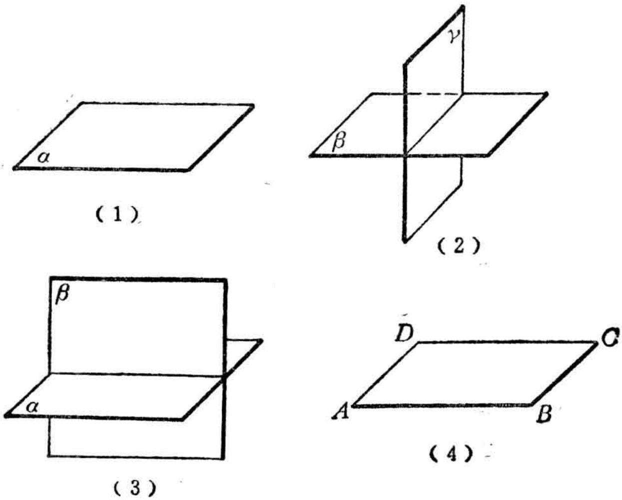



图 9-1

如图 9-1(4) 中的平面 $AC$ 就是大约按 $\angle DAB=45°$，$AB=2AD$ 画成的.

画一个直立的平面时，可以把平面画成矩形或平行四边形. 如画图 9-1(2) 中的平面 $\gamma$ 或(3) 中的平面 $\beta$ 时，要使它们的一条竖边与水平平面的横边垂直.

如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，那末被遮住部分的线段应画成虚线或不画(图 9-1(2)、(3)).

## 二　平面图形直观图的画法

我们知道,在水平平面内画矩形不是画它的真实形状(简称真象),而是画成平行四边形. 这个平行四边形通常叫做矩形的直观图. 一般地，我们把平面图形(或空间图形)在水平平面内所画成的图形叫做该图形的**直观图**. 下面举例说明平

面图形的直观图的画法.

**例 1** 在水平平面 $\alpha$ 内画已知正方形 $ABCD$ 的直观图(图 9-2).

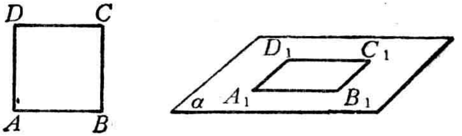



图 9-2

**画法** (1) 在平面 $\alpha$ 内画水平线段 $A_1B_1$, 使 $A_1B_1=AB$.

(2) 作 $\angle B_1A_1D_1=45°$, 并且取 $A_1D_1=\dfrac{1}{2}AD$.

(3) 作 $D_1C_1 /\!/ A_1B_1$, 并且取 $D_1C_1=A_1B_1$.

(4) 连结 $B_1C_1$, 则 $\square A_1B_1C_1D_1$ 就是正方形 $ABCD$ 的直观图.

**例 2** 在水平平面 $\alpha$ 内画已知三角形 $ABC$ 的直观图(图 9-3).

**画法** (1) 在 $\triangle ABC$ 内作高 $CD$.

(2) 在平面 $\alpha$ 内画水平线段 $A_1B_1$, 使 $A_1B_1=AB$.

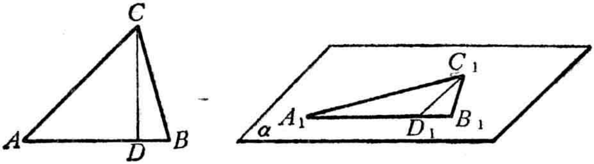



图 9-3

(3) 在 $A_1B_1$ 上取 $A_1D_1=AD$. 作 $\angle C_1D_1B_1=45°$, 并且取 $D_1C_1=\frac{1}{2}DC$.

(4) 分别连结 $A_1C_1$ 和 $B_1C_1$, 则 $\triangle A_1B_1C_1$ 就是三角形 $ABC$ 的直观图.

**例 3** 在水平平面 $\alpha$ 内画已知正六边形 $ABCDEF$ 的直观图(图 9-4).

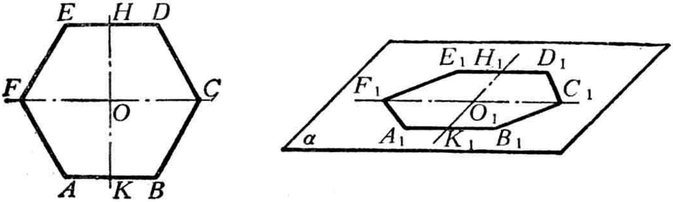



图 9-4

**画法** (1) 连结正六边形的对角线 $FC$, 并取其中点 $O$. 过 $O$ 作 $HK\perp FC$. 显然, $FC\parallel AB$, $OH=OK$.

(2) 在平面 $\alpha$ 内画水平线段 $F_1C_1$, 使 $F_1C_1=FC$.

(3) 在 $F_1C_1$ 上取中点 $O_1$, 过 $O_1$ 作直线 $H_1K_1$, 使 $\angle H_1O_1C_1=45°$, 并且取 $O_1H_1=O_1K_1=\frac{1}{2}OH$.

(4) 过 $H_1$、$K_1$ 分别作 $E_1D_1\parallel F_1C_1$, $A_1B_1\parallel F_1C_1$, 并且取 $E_1H_1=H_1D_1=A_1K_1=K_1B_1=\frac{1}{2}AB$.

(5) 连结 $B_1C_1$, $C_1D_1$, $E_1F_1$, $F_1A_1$, 则六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

归纳上面的例子可以知道, 在水平平面内画平面图形的直观图一般可遵循下面的规则:

(1) 选择已知图形的水平方向线段（或作辅助的水平线段）；

(2) 凡水平方向的线段仍画成水平方向，其长度不变（即实长）；

(3) 凡与水平方向线段垂直的线段画成与水平方向成 $45^\circ$ 角（或 $135^\circ$ 角）的线段，其长度为实长的一半.

## 三　平面的基本性质

下面的三条公理说明了平面的一些基本性质，它们是研究空间直线、平面的位置关系的理论基础.

**公理 1**　如果一条直线上的两点在一个平面内，那末这条直线上所有的点都在这个平面内.

如图 9-5 所示，设直线 $l$ 上两点 $A$ 和 $B$ 在平面 $\alpha$ 内，则 $l$ 上所有的点都在平面 $\alpha$ 内. 这时，我们说直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内或平面 $\alpha$ 经过直线 $l$.

**公理 2**　如果两个平面有一个公共点，那末它们相交于经过这点的一条直线.

如图 9-6 所示，设 $A$ 是平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 的一个公共点，

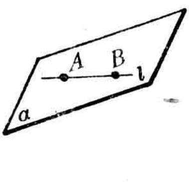



图 9-5

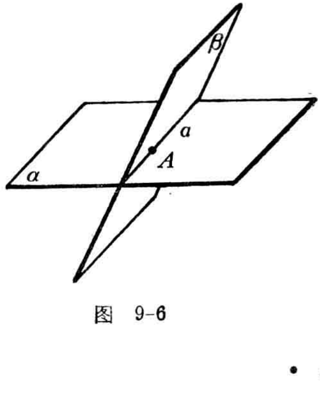



图 9-6

则平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 就相交于过 $A$ 点的一条直线 $a$. 这时，我们说平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 相交于直线 $a$.

天花板和墙壁的交线，折纸的折痕等都说明了两个平面相交是成一条直线的.

**公理 3** 经过不在同一直线上的任意三点，可以引一个平面，并且只可以引一个平面.

如图 9-7 所示，设 $A$、$B$、$C$ 是不在同一直线上的任意三点，则经过这三点可以画一个平面，并且只可以画一个平面. 公理 3 可以简单地说成"不在同一直线上的三点确定一个平面". 这里的"确定一个平面"是指"可以引并且只可以引一个平面"的意思.

例如：测量仪和照相机的支承架采用三个脚，就是应用这个道理.

根据公理 1 和公理 3，还可以推得确定一个平面的三个推论.

**推论 1** 一条直线和这条直线外的一点可以确定一个平面.

如图 9-8 所示，设 $C$ 是直线 $l$ 外的一点，在 $l$ 上取 $A$、$B$ 两点，这样，$A$、$B$ 和 $C$ 组成不在同一直线上的三点. 根据公理 3，这三点可以确定一个平面 $\alpha$. 因为直线 $l$ 上有两点 $A$、$B$ 在平面 $\alpha$ 内，根据公理 1，可知直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内，所以直线

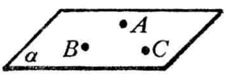


图 9-7

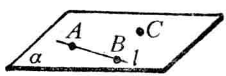


图 9-8

$l$ 和 $l$ 外的一点 $C$ 可以引一个平面.

我们还要进一步证明，这样的平面只能引一个.

如果在直线 $l$ 上另外取与 $A$、$B$ 不完全重合的两点 $A_1$、$B_1$，那末 $A_1$、$B_1$ 和 $C$ 三点可以引另一个平面 $\beta$，显然，直线 $l$ 在这个平面 $\beta$ 内，也就是 $l$ 是平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 的交线. 由于点 $C$ 既在 $\alpha$ 内也在 $\beta$ 内，因此 $C$ 点必在 $\alpha$ 和 $\beta$ 的交线上. 这就与点 $C$ 是直线 $l$ 外的一点相矛盾，所以平面 $\beta$ 和平面 $\alpha$ 是重合的. 由此可知一条直线和这条直线外的一点可以确定一个平面.

**推论 2** 两条相交的直线可以确定一个平面.

如图 9-9 所示，设直线 $l$ 与 $m$ 相交于点 $A$，除 $A$ 点外，在直线 $l$ 上取 $B$ 点，直线 $m$ 上取 $C$ 点，这样，$A$、$B$ 和 $C$ 就是不在同一直线上的三点. 根据公理 3，这三点确定一个平面 $\alpha$. 因为直线 $l$ 和 $m$ 上都分别有两点在平面 $\alpha$ 内，根据公理 1，可知直线 $l$ 和 $m$ 都在平面 $\alpha$ 内，所以两条相交的直线可以引一个平面. 用与推论 1 相类似的方法可以证明，这样的平面只能引一个，也就是两条相交的直线可以确定一个平面.

**推论 3** 两条平行直线可以确定一个平面.

如图 9-10 所示，设 $l$ 和 $m$ 是两条平行直线. 根据平行线的定义可知，两条平行线必在一个平面内，即经过平行线 $l$ 和 $m$ 可以引一个平面 $\alpha$. 用与推论 1 相类似的方法，还可以

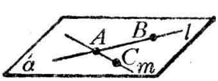



图 9-9

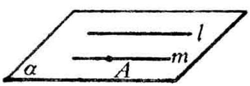



图 9-10

证明，这样的平面只能引一个．也就是两条平行直线可以确定一个平面．

空间的点、直线和平面相互之间的关系，可以用集合的符号来表示．我们规定：

(1) 点 $A$ 在直线 $l$ 上，记作 $A\in l$；

(2) 点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内，记作 $A\in\alpha$；

(3) 直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内，记作 $l\subset\alpha$ 或 $\alpha\supset l$；

(4) 直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 交于点 $N$，记作 $l\cap\alpha=N$；直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 没有交点，记作 $l\cap\alpha=\phi$；

(5) 平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 相交于直线 $l$，记作 $\alpha\cap\beta=l$；平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 没有公共点，记作 $\alpha\cap\beta=\phi$．

**例 4** 证明两两相交且不过同一点的三条直线共面(即在同一平面内)．

已知 $AB$、$BC$、$CA$ 为三条直线，$AB\cap BC=B$，$AC\cap BC=C$，$AB\cap AC=A$ (图 9-11)．

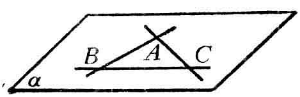


图 9-11

求证 $AB$、$BC$、$AC$ 共面．

**证** $\because$ $AB\cap AC=A$，

$\therefore$ $AB$ 和 $AC$ 可以确定一个平面 $\alpha$．

$\because$ $B\in AB$，$C\in AC$，

$\therefore$ $B\in\alpha$，$C\in\alpha$，从而 $BC\subset\alpha$．

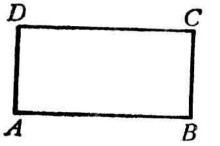
即 $AB$、$BC$、$AC$ 三条直线共面．

## 习 题 9-1

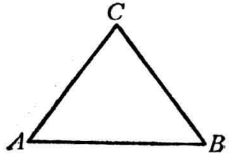
1．在水平平面内作下列各已知平面图形的直观图，并说明作图步

骤:

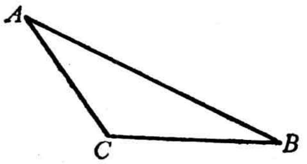
(1) 矩形;



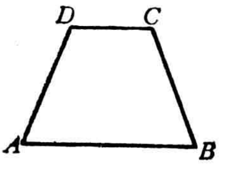

(2) 等腰三角形;



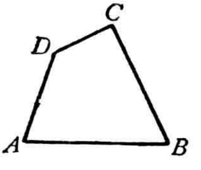

(3) 钝角三角形;



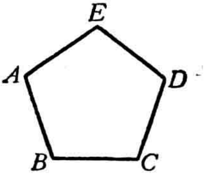

(4) 等腰梯形;




(5) 任意四边形;




(6) 正五边形;




2. 回答下面的问题:

(1) 一条线段在一个平面内,这条线段的延长线是否也一定在这个平面内?

(2) “三点确定一个平面”的说法对吗?

(3) 三角形、梯形是否为平面图形?

(4) 一条直线是否可以确定一个平面?

(5) 三条直线相交于一点,最多能确定几个平面?

(6) 空间有四个点,它们中间的任何三点都不在一条直线上,这样的四个点能确定多少个平面?

(7) 空间三条直线两两平行，且不在同一个平面内，这样的三条直线能确定几个平面？

3. 证明：如果一条直线和两条平行线相交，那末这三条直线共面.

4. 过已知直线外一点，向这条直线上的三个定点分别连结三条线段，试证这三条线段共面.

5. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

## §9-2 直线和直线的位置关系

### 一 两条直线的位置关系

如图 9-12 所示的长方体，它的每一个侧面都是矩形. 线段 $A_1B_1$、$AA_1$ 和 $AB$ 在同一平面内，它们的位置关系是：

$A_1B_1 /\!/ AB$, $A_1B_1 \cap AA_1 = A_1$.

线段 $A_1B_1$ 和 $AD$ 不在同一平面内，它们既不相交也不平行. 对于这样既不相交又不平行的直线，给出下面的定义：

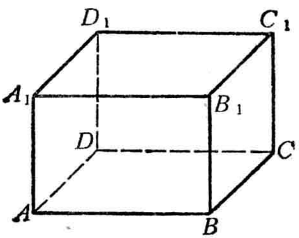


图 9-12

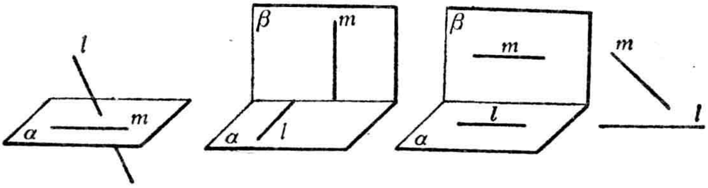
**定义** 不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**（或交错直线）.

由此可见，空间两条不重合的直线，它们的位置关系有三种：

$$\left.\begin{array}{l}\text{(1) 平行直线——没有公共点} \\ \text{(2) 相交直线——只有一个公共点}\end{array}\right\}\text{在同一平面内；}$$

(3) **异面直线**——没有公共点，不在同一平面内.

画异面直线时，要把两条直线画在不同的平面内，使它们看上去既不相交也不平行．如图 9-13 所示，直线 $l$ 和 $m$ 是异面直线，其中(1)、(2)二图的画法比较直观，而(3)、(4)二图的画法不能显示出异面直线的特点，因此这两种画法应该避免．




（1）　（2）　（3）　（4）

图 9-13

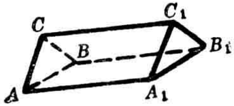
## 二　空间直线的平行关系

我们知道，在平面内平行于同一条直线的两条直线一定平行．下面的定理 1 将说明在空间也有类似的结论．

**定理 1**　不在同一平面内的三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那末这两条直线也互相平行．

这个定理的证明从略．事实上它的正确性是很明显的．例如，图 9-14 是一个三棱尺，它的三条棱 $AA_1$、$BB_1$、$CC_1$ 是空间的三条线段．可以看出，如果 $BB_1$、$CC_1$ 分别和 $AA_1$ 平行，那末 $BB_1$ 和 $CC_1$ 也互相平行．

又如，$ABB'A'$ (图 9-15(1)) 是一张矩形的纸片，线段 $C'C$ 和边 $A'A$、$B'B$ 平行．将纸片 $ABB'A'$ 沿 $C'C$ 折成如图 9-15(2) 的形状，这时 $A'A$、$B'B$、$C'C$ 就成为空间的三条线段．可以看出，因为 $A'A \parallel C'C$，$B'B \parallel C'C$，所以 $A'A \parallel B'B$．



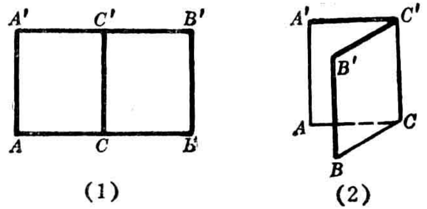




图 9-14　　　　图 9-15

**例 1**　已知 $ABCD$ 是四个顶点不在同一个平面内的空间四边形，$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的中点(图 9-16)，连结 $EF$、$FG$、$GH$、$HE$，求证 $EFGH$ 是一个平行四边形.

**证**　$\because$ $EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$$\therefore \qquad EH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2} BD.$$

同理 $$FG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2} BD.$$

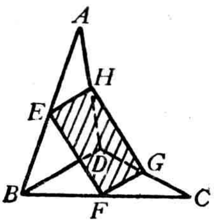



图 9-16

根据定理 1，可知 $EH \mathrel{\underline{\parallel}} FG$，即 $EFGH$ 是一个平行四边形.

我们知道，在平面内，对应边平行并且方向相同的两个角相等. 下面的定理 2 将说明在空间也有类似的结论.

**定理 2**　不在同一平面内的两个角，如果其中一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那末这两个角相等.

**已知**　$\angle ABC \subset \alpha$，$\angle DEF \subset \beta$，$BA \parallel ED$，$BC \parallel EF$，