高等职业教育人才培养创新教材出版工程

高等数学

廖　辉　主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等职业教育人才培养创新教材出版工程

高 等 数 学

主 编 廖 辉
副主编 吴元清
张青山
李晓华

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书依据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》，并结合高职教育特点、发展趋势及作者多年的教学实践经验编写. 主要内容有极限与连续、一元函数微分学、一元积分学、行列式与矩阵、线性方程组、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学和重积分，全书共10章，每章末安排了用Matlab大型数学计算软件编写的数学实验，书末附了简易积分公式表和Matlab简介.

本书可作为高职高专理工、经管类专业及其“专升本”考试使用的数学课程教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/廖辉主编. —北京：科学出版社，2010.6

高等职业教育人才培养创新教材出版工程

ISBN 978-7-03-027892-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①廖… Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第107661号

责任编辑：苏 鹏 张克忠 杨 然 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http //www sciencep com

北京市安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010年 8 月第一次印刷 印张：25 1/2

印数：1—6 000 字数：510 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书依据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》，并结合高职教育特点、发展趋势及我们多年的教学实践经验编写，力求发挥高等数学的文化育人、知识基础和技术应用这三大功能，在选择教学内容和要求时坚持“必需、够用和适用”的原则. 突出用数学建模的方法，培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力. 本书可作为高职高专理工、经管类专业及其“专升本”考试使用的数学课程教材.

本书由《高等数学》教材及其配套的《高等数学练习册》组成. 教材主要内容包括极限与连续、一元函数微分学、一元积分学、行列式与矩阵、线性方程组、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学和重积分，这些内容分别设为章，全书共 10 章，每章末安排了用 Matlab 大型数学计算软件编写的数学实验，书末附了简易积分公式表和 Matlab 简介. 练习册按教材章节给出配套练习题和答案. 我们还开发了配合该教材教学的网上课程资源，网址是 http://www.sczyxy.cn/jpck/jpkc.htm，其中包含电子课件、习题详解、单元综合测试题等内容，使教和学更为便捷.

本书教学分必修的高等数学 I 和选修的高等数学 II 两部分. 必修学时为120～140学时，第 1 章至第 3 章为所有专业的必学内容，经管类专业还必修第 4 章、第 5 章和第 6 章的一阶微分方程部分；理工类专业还必修第 6 章和第 7 章. 选修学时在 48 学时左右，选修内容为第 8 章至第 10 章. 所有选修内容在章节等处标有“*”号，各学校可根据自己的实际情况和学生的不同需要选择内容组织教学.

本书有以下特点：

(1) 注意与普高和中职新教材内容紧密衔接，在学生已有知识经验的基础上提供专业学习必须的数学基础知识、数学方法和计算工具.

(2) 对概念、命题多作描述性说明，适当降低数学学习难度和严谨性要求. 例如，一般从几何意义、物理意义和生活背景等实际问题引入数学概念. 对部分难以理解的概念不严格定义，只作定性描述. 对部分较难的定理，只从实例中抽象概括出来，而不给严谨的证明.

(3) 本书逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多，有相应配套练习册和网上课程资源，便于自学.

(4) 本书扩大了适用面，在保证教学基本要求的前提下，视专业差异给教学内容选择留有一定的弹性. 例如，泰勒公式、导数在经济中的应用、方程的近似解、曲

线的曲率、积分在经济中的应用、行列式与矩阵、线性方程组、傅里叶级数、第一类曲线积分、第二类曲线积分、第一类曲面积分、第二类曲面积分等内容，可针对不同的专业需要选学.

(5) 突出会用会算的技能，使学生通过各专题的学习形成数学观念，养成数学的应用意识，学会应用数学解决实际问题的一些基本方法.

(6) 本书在解决数学问题时，比较突出数学软件的工具作用，尽量训练学生使用数学软件和数学工具书，为日后利用数学知识解决实际问题培养一些基本素养.

本书主编为廖辉，副主编为吴元清、张青山、李晓华，具体负责各章编写的人员有：赵凤鸣(第 1 章)、汪婧(第 2 章)、唐纪芳(第 3 章)、李晓华(第 4 章)、张隆辉(第 5 章)、张子位(第 6 章)、廖辉(第 7 章)、石化国(第 8 章)、吴元清(第 9 章和各章数学实验)、张青山(第 10 章)，谭晓康为本书作了统稿和服务工作，李凤清作了校对工作，谭光全和肖福积分别对本书进行了主审. 由于编审人员水平有限，不足之处在所难免，恳请有关专家和同仁使用本书时进行批评和指正，并将在使用教材过程中遇到的问题、改进意见及时反馈给我们，以利于我们再版此书时作改进.

编　者

2010 年 3 月

目　　录

第 1 章　极限与连续

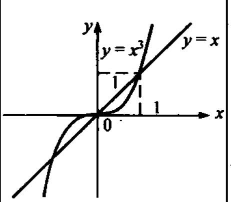
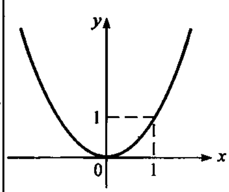
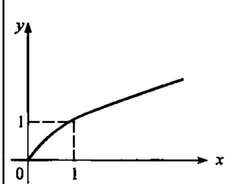
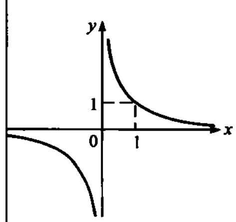
初等数学又称常量数学，其研究对象基本上是不变量. 高等数学的主要内容是微积分，它是以变量为研究对象、用极限作为工具来研究函数. 因此，极限是学习微积分的理论基础，连续函数是微积分研究的主要对象. 本章讨论函数的极限与函数的连续性.

1.1　初 等 函 数

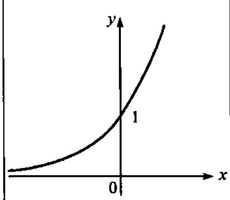
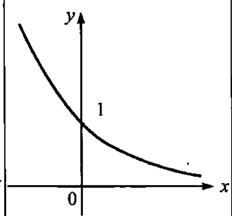
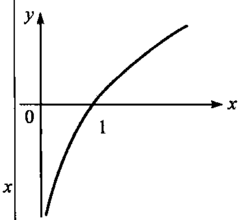
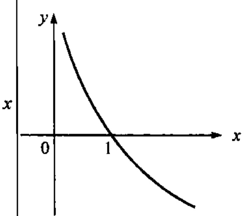
1.1.1　基本初等函数

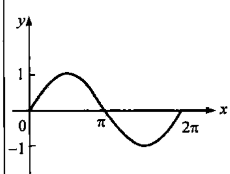
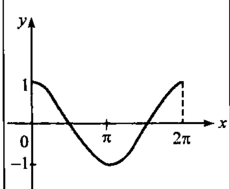
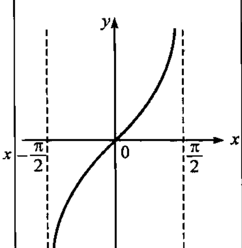
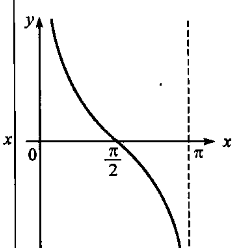
在科学发展过程中，有一类为数不多的函数在各种问题中经常出现，我们把这些函数挑选出来，作为最基本的函数加以研究，并称之为基本初等函数. 其他常见的函数都是由这些基本初等函数构成的.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 5 类函数统称为基本初等函数. 现将它们的定义域、值域、图像和主要性质列表如下，作为今后进一步讨论的基础.

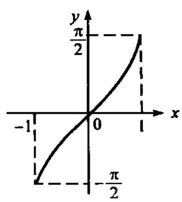
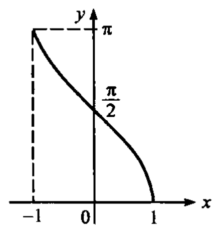
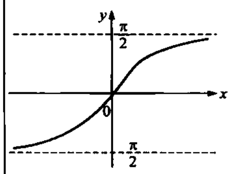
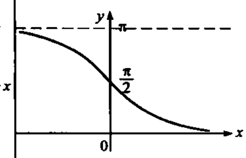
函　数	幂　函　数　$y=x^{\alpha}$			
	$\alpha=1,3$	$\alpha=2$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=-1$
图　像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值　域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
性　质	奇函数 单调增	偶函数 在$(-\infty,0]$内单调减 在$[0,+\infty)$内单调增	单调增	奇函数 单调减

续表

函数	指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图　像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值　域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
性　质	单调增	单调减	单调增	单调减

函　数	$y=\sin x$ （正弦函数）	$y=\cos x$ （余弦函数）	$y=\tan x$ （正切函数）	$y=\cot x$ （余切函数）
图　像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in z)$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in z)$
值　域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
性　质	奇函数 周期 2π，有界 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增 在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减	偶函数 周期 2π，有界 在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减 在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增	奇函数 周期 π 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增	奇函数 周期 π 在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减

续表

函 数	$y=\arcsin x$（反正弦函数）	$y=\arccos x$（反余弦函数）	$y=\arctan x$（反正切函数）	$y=\operatorname{arccot} x$（反余切函数）
图 像				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值 域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
性 质	奇函数，单调增，有界	单调减，有界	奇函数，单调增，有界	单调减，有界

1.1.2 复合函数

在实际问题中，我们常常遇到一个函数可以跟另一个函数发生联系.

例如，质量为 m 的物体做自由落体运动，物体的动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2,\quad E=f(v),$$

而速度 v 又是时间 t 的函数

$$v=gt,\quad v=\varphi(t),$$

其中，g 是重力加速度. 这样一来，动能 E 通过中间变量 v 的联系而成为时间 t 的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2,\quad E=f[\varphi(t)].$$

又如，设 $y=\sin u$，而 $u=2x-1$，那么 y 通过 u 也是 x 的函数

$$y=\sin(2x-1).$$

这样"叠合"起来构成的函数，称为复合函数.

定义 1.1.1 设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且当 x 在某一数集 I 取值时，所对应的 u 值使 y 有定义，那么 y 通过 u 也是 x 的函数. 这个函数叫做数集 I 上由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中，u 叫做中间变量，$y=f(u)$ 叫做外层函数，$u=\varphi(x)$ 叫做内层函数.

根据定义，易知：

$y=\sin(2x-1)$是由 $y=\sin u$ 与 $u=2x-1$ 复合而成的复合函数.

$E=\frac{1}{2}mg^2t^2$ 是由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 复合而成的复合函数.

必须注意：

(1) 复合函数 $f[\varphi(x)]$的定义域或者与 $\varphi(x)$的定义域相同，或者只是 $\varphi(x)$的定义域的一部分.

(2) 不是任何两个函数都可以复合成一个函数的.

例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=2+x^2$ 可取的每一个值 $u\in[2,+\infty)$，都使 $y=\arcsin u$ 无定义.

我们不仅要掌握把几个函数复合成一个函数的方法，而且反过来，还要掌握把一个复合函数分解成几个简单的函数的方法. 这样做将有利于今后微积分的计算. 下面举例说明函数复合与分解的方法.

例 1.1　将 y 表为 x 的函数：

(1) $y=\ln u$, $u=\sin x$;　　(2) $y=e^u$, $u=\sqrt{v}$, $v=1-x^2$.

解　(1) $y=\ln u=\ln\sin x$.

(2) $y=e^u=e^{\sqrt{v}}=e^{\sqrt{1-x^2}}$.

例 1.2　指出函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;　　(2) $y=\cos 3x$;

(3) $y=\ln^2 x$;　　(4) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$;

(5) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$;　　(6) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

解　(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-3x+2$ 两个函数复合而成. 解不等式 $x^2-3x+2\geqslant 0$，得函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$的定义域 $D=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

(2) $y=\cos 3x$ 是由 $y=\cos u$，$u=3x$ 两个函数复合而成. 函数 $y=\cos 3x$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=\ln^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\ln x$ 两个函数复合而成. 函数 $y=\ln^2 x$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$.

(4) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 三个函数复合而成. 解不等式 $1-x^2\geqslant 0$，得函数 $y=\sin\sqrt{1-x^2}$的定义域 $D=[-1,1]$.

(5) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$是由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\frac{1}{x}$三个函数复合而成. 要使函数 $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 有意义，则须 $\arcsin\frac{1}{x}$有意义，应$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即$|x|\geqslant 1$，因此 $y=$

$\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 的定义域 $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(6) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$是由 $y=u^{-\frac{1}{3}}$,$u=(1+x^2)$两个函数复合而成. 因为 $1+x^2\neq 0$,因此,$y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

由例 1.2 可见,分解一个复合函数,是指把该复合函数分解成基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(称为简单函数),这时就不能再分解了.

1.1.3 初等函数

定义 1.1.2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成且能用一个解析式表示的函数叫做初等函数.

例如,函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$,$y=\arcsin\frac{1}{x}$,$y=x+\frac{1}{x}+1$,$y=\frac{\sin x}{x^2}$等都是初等函数. 初等函数是微积分研究的主要对象.

分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,能化为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,它是由 $y=\sqrt{u}$与 $u=x^2$ 复合而成的,因此它是一个初等函数.

而分段函数 $y=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1-x^3, & x>0\end{cases}$不能用一个式子表出,因此它不是初等函数.

一般地,分段函数不是初等函数,因为它是由两个或两个以上的解析式表出的一个函数.

1.1.4 建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时,常常需要找出问题中变量之间的函数关系式,然后进行分析和计算. 下面举例说明建立函数关系的过程,为以后运用微积分方法解决实际问题打下一些基础.

例 1.3 曲柄连杆机构(图 1.1)是利用曲柄 OA 的旋转运动,通过连杆 AB 使滑块 B 做往复直线运动;反过来说,利用滑块 B 的往复直线运动,通过连杆使曲柄做旋转运动. 设曲柄 OA 的长度为 r,连杆 AB 的长度为 l,曲柄以等角速度 ω 绕 O 旋转,求滑块 B

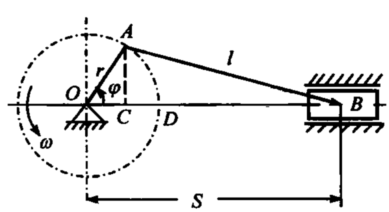


图 1.1

的运动规律.

解　假定曲柄 OA 开始做旋转运动时,A 在 D 处. 设滑块 B 的运动规律为 $S=S(t)$.

由图 1.1 可知,$S=OC+CB$,因为

$$OC = r\cos\varphi,\quad CA = r\sin\varphi,\quad \varphi = \omega t,$$

所以

$$OC = r\cos\omega t,\quad CA = r\sin\omega t.$$

在 Rt$\triangle ACB$ 中,$CB=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$,从而可得滑块 B 的运动规律为

$$S = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t},\quad t \in [0,+\infty).$$

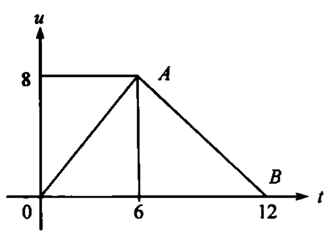


图 1.2

例 1.4　电脉冲发生器产生一个三角脉冲,其波形如图 1.2 所示,写出电压 u(V)和时间 t(μs)之间的函数关系式.

解　当 $0\leqslant t<6$ 时,电压 u 由 0V 直线上升到 8V,直线段 OA 的方程是

$$u = \frac{8}{6}t = \frac{4}{3}t,$$

它就是 0～6μs 这段时间内电压 u 与时间 t 的函数关系式.

当 $6\leqslant t\leqslant 12$ 时,电压 u 由 8V 均匀下降到 0V,直线段 AB 的方程是

$$u = -\frac{8}{6}t + 16 = -\frac{4}{3}t + 16,$$

它就是 6～12μs 这段时间内电压 u 与时间 t 的函数关系式. 归纳之,可得

$$u = \begin{cases} \dfrac{4}{3}t, & 0 \leqslant t < 6, \\ -\dfrac{4}{3}t + 16, & 6 \leqslant t \leqslant 12. \end{cases}$$

这里,u 与 t 的函数关系是用分段函数表示的,函数的定义域是[0,12].

例 1.5　试建立复利计算公式.

解　设初始本金(现值)为 P(元),年利率为 R,第 1 年末得利息 PR. 用 S_1 表示本利和,即

$$S_1 = P + PR = P(1+R);$$

将本利和 S_1 再存入银行,第 2 年末的本利和为

$$S_2 = S_1 + S_1R = P(1+R)^2;$$

再把本利和存入银行,如此反复,第 n 年末得本利和 S_n 为

$$S_n = P(1+R)^n.$$

这就是以年为期的复利计算公式，用解析法表示变量 n(年)和本利和 S_n 的函数关系式.

实际问题的函数关系就是该实际问题的一个数学模型，建立实际问题的函数关系就是为了用函数方法解决实际问题. 一般地，用数学方法解决实际问题，首先要对实际问题的背景进行深入了解，摸清问题的规律，并用数字、图表、公式等表示出来，就得到了数学模型. 数学模型只是对现实事物的某种属性的一种模拟，需不断验证修改，才能使其与实际情况拟合得更好. 根据数学模型，就可对所论问题进行分析讨论. 数学模型是多种多样的，函数关系只是数学模型的一种.

用数学的方法解决实际问题，在很多情况下要把实际问题化成数学问题，也就是建立数学模型. 找函数关系，建立起描述经济现象的数学模型，是研究经济问题的重要方法.

经济活动中涉及的数量关系很多，如供求、成本、利润、价格、收入等，这些量之间有密切联系. 下面介绍几个常用的经济函数.

*1.1.5 常用经济函数简介

1. 需求函数

经济活动的目的是需求的满足. 消费者对某种商品的需求量，与人口数、商品价格、相关商品价格、预期价格、家庭收入、时间变化等诸多因素有关. 现在我们假定其他条件不变，着重研究商品价格对需求量的影响，则需求量 Q 可视为商品价格 P 的函数，即

$$Q = Q(P).$$

该函数称为需求函数. 其中，P 和 Q 取非负值.

一般地，需求量随价格上涨而减少. 因此，通常需求函数是价格的单减函数，需求函数的图像称为需求曲线. 由于价格和需求量都不能取负值，因此，需求函数的图像在第一象限. 如图 1.3 所示.

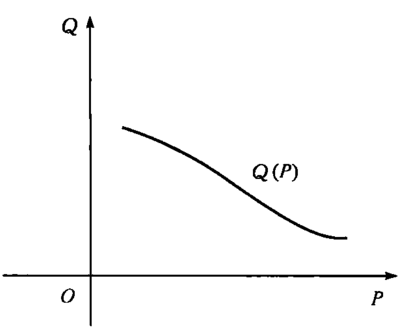


图 1.3

需求函数 $Q=Q(P)$ 的反函数，就是价格函数，记作

$$P = P(Q).$$

价格函数也反映商品的需求与价格的关系.

例 1.6 设某批发站批发 10000 件元器件给零售商，目前该元器件定价为 50 元/件，若批发站每次多批发 2000 件该元器件，市面上这种器件的价格就相应地降

低 3 元,现批发站最多只能批发 25000 件给零售商,最少批发 10000 件,求价格函数.

解 设该器件的销售量为 x 件,则 x 只能在 $[10000,25000]$ 取值. 按多销售 2000 件,价格减少 3 元的比例,多销售 $(x-10000)$ 件,价格相应减少 $\left(3\cdot\dfrac{x-10000}{2000}\right)$ 元,故价格函数为

$$P(x)=50-3\cdot\frac{x-10000}{2000},\quad x\in[10000,25000].$$

例 1.7 将例 1.6 的条件改为"价格为 50 元/件时,销售量是 10000 件,若该器件价格每提高 3 元,销售量就减少 2000 件",可得需求函数为

$$Q=10000-\frac{P-50}{3}\cdot 2000.$$

市场是由供求双方组成的,与需求函数有密切关系的是供给函数.

2. 供给函数(供应函数)

供给函数是指商品的供给量和影响这些供给量的各种因素间的数量关系. 影响商品供给量最重要的因素是商品的价格,为了简单起见,略去价格以外的因素,则商品的市场供给量可视为该商品价格的函数,称为商品的供给函数,记商品供给量为 S,P 是商品价格,则

$$S=S(P).$$

一般地,商品供给量随商品价格的上涨而增多. 因此,商品供给函数 S 是商品价格 P 的单增函数.

常见供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等.

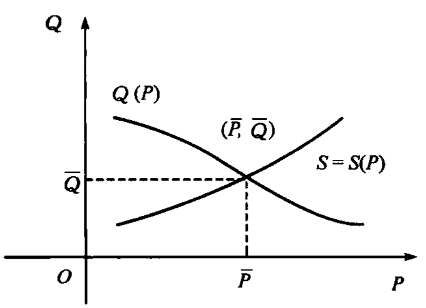


图 1.4

需求函数与供给函数分别表示消费者与生产者的行为. 只有当供求相等时,市场才处于相对均衡. 于是,两个行为方程再加上均衡条件就构成所谓的局部均衡市场模型. 把需求曲线和供给曲线(供给函数的图形)画在同一坐标系中,如图 1.4 所示,由于需求函数 Q 是减少函数,供给函数 S 是增加函数,它们相交于点 $(\overline{P},\overline{Q})$ 处,就是供、需平衡的价格,叫均衡价格. $\overline{Q}$ 就是均衡数量.

这个模型只孤立地考察一种商品的价格与其供求关系的联系,而不考虑其他经济要素的影响,因此是一种"局部"的分析.

例 1.8 某商品的供求规律为 $Q^2-30Q-P=-240$，需求规律为 $2Q^2+P=465$，试求市场平衡的价格和数量.

解 求均衡价格和数量，即解方程组

$$\begin{cases} Q^2-30Q-P=-240, \\ 2Q^2+P=465, \end{cases}$$

得

$$\overline{Q_1}=15, \overline{P_1}=15; \overline{Q_2}=-5.$$

显然 $\overline{Q_2}=-5$ 无意义，故所求均衡价格为 15 个单位，均衡数量为 15 个单位.

例 1.9 设元器件价格为 50 元/件时，器件厂就提供 10000 件，当价格每增加 3 元时，器件厂可多提供 300 件，求供给函数.

解 设器件的价格为 P 元/件，S 代表供给量，则根据题意得

$$S=10000+300\cdot\frac{P-50}{3}=100(50+P).$$

3. 总成本函数

从事生产，就需要有投入，也就是成本，即生产某种一定数量的产品所需要的费用，如需要有场地(厂房)、机器设备、劳动力、能源和原材料等. 以 q 表示产量，所需的全部生产费用是 q 的函数，记作 $c(q)$，通常称为总成本函数. 总成本包括固定成本和可变成本，固定成本是不随产量发生变化或变化很小的成本，如厂房，设备等，称为固定成本，常用 C_0 表示；可变成本是随产量的变化而变化的成本，如原材料、能源、人工费等，常用 C_1 表示，它是产品数量 q 的函数，即

$$C_1=C_1(q).$$

总成本 $C=C(q)$ 等于生产 q 个单位时某种商品的可变成本 C_1 与固定成本 C_0 之和，即

$$C=C(q)=C_0+C_1(q).$$

例如，总成本函数有线性函数

$$C(q)=C_0+cq.$$

其中，$C_0=C(0)$ 是固定成本；$C_1=cq$ 是可变成本，c 是单位产品的可变成本. 称

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{\text{固定成本}+\text{可变成本}}{\text{产量}},\quad q>0$$

为单位成本函数或平均成本函数.

在生产技术水平和生产要素的价格固定不变的条件下，总成本、平均成本都是产量的函数.

例 1.10 已知某种产品的总成本函数为

$$C(q)=300+2.5q,$$