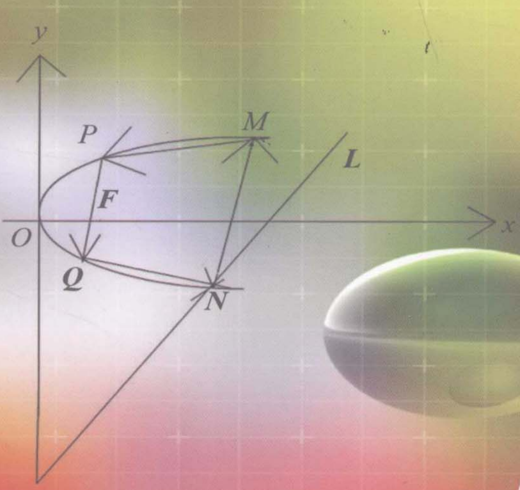
新世纪

新世纪应用型高等教育
基础类课程规划教材

高等数学

（上）

新世纪应用型高等教育教材编审委员会 组编
主编 谢克藻 主审 张国华 郭健



大连理工大学出版社

新世纪

新世纪应用型高等教育
基础类课程规划教材

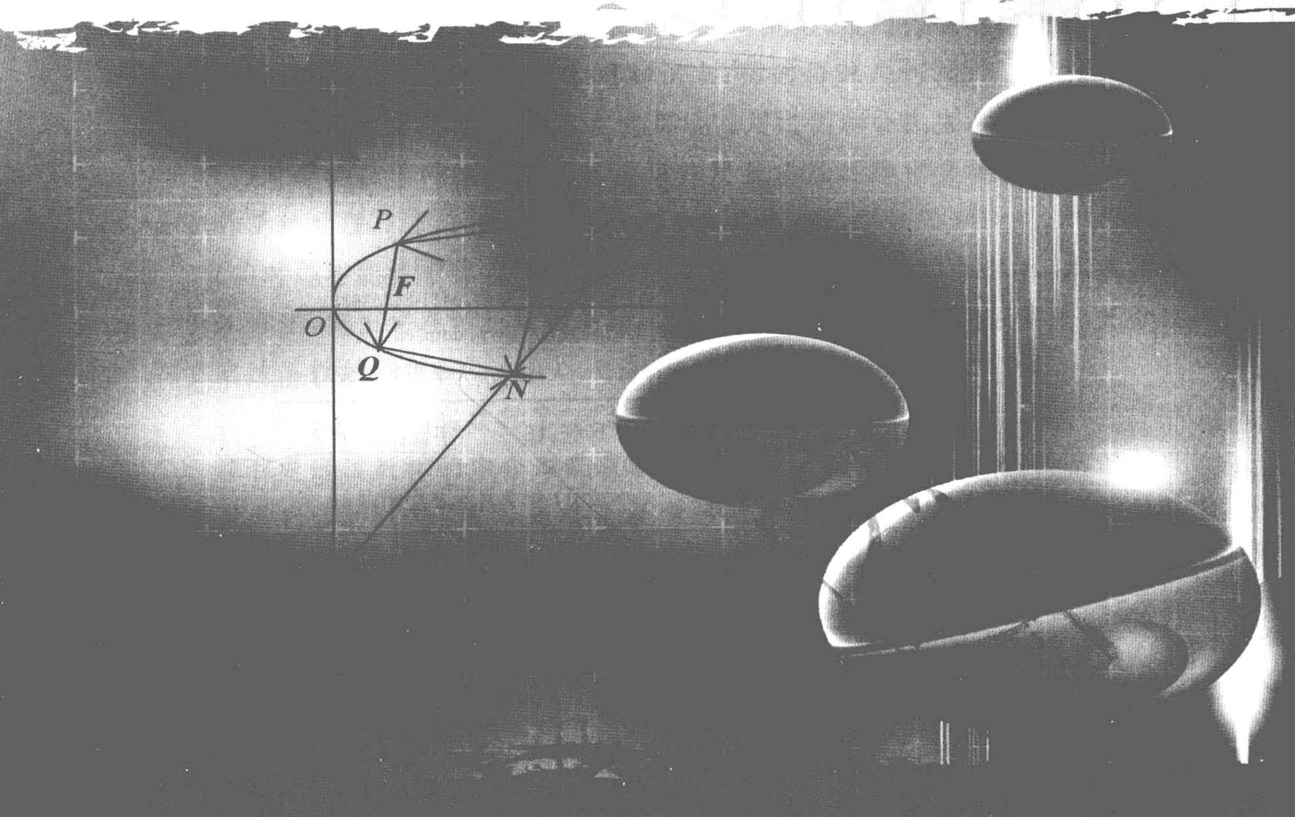
高等数学
（上）

新世纪应用型高等教育教材编审委员会 组编

主编 谢克藻

副主编 李花妮 冀永强 蒋永锋 王德华 汪义瑞

主审 张国华 郭健



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 谢克藻主编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2010. 4(2011. 7 重印)
新世纪应用型高等教育基础类课程规划教材
ISBN 978-7-5611-5478-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①谢… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 059013 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84703636

E-mail:dutp@dutp. cn URL:http://www. dutp. cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:16 字数:367 千字

印数:3001～5000

2010 年 4 月第 1 版 2011 年 7 月第 2 次印刷

责任编辑:欧阳碧蕾 责任校对:童 强

封面设计:张 莹

ISBN 978-7-5611-5478-6 定 价:30.00 元

前　言

这是一部适用于应用型本科理工类学生的《高等数学》教材.撰写时遵循教育部高等学校非数学类专业数学基础教学指导委员会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,紧扣应用型本科人才培养目标,牢牢把握了以下两条原则:

一、在选材上,认真贯彻了“知行结合”原则.

首先,我们对“以应用为目的,以必需、够用为度”做出透彻全面的理解,“用”应该是:用数学解决生产、生活中的实际问题;用数学学习相关基础理论课程和专业课程;用数学启迪思维,陶冶情操,促使人格结构完善.处在21世纪,科学的处世态度、辩证的思维方法、合理的办事程序、精干的工作能力,都是一个和谐社会公民不可缺少的素质.本教材寓德育于智育之中,寓应用于理论之中,以高等数学深厚的文化底蕴促进读者素质全面提高,努力实现“知”与“行”的结合.具体做法是:

(1)突出学科主结构,探寻原理,勾勒逻辑链条,集约化地搭建理论框架.

(2)与理论同步,加固建模常用知识点;筛选传统几何、物理应用之例;融入现代技术、现代管理之例;融入生态环境应用之例和公民生活应用之例.

(3)对那些在学科结构中不起支撑作用且不在实际中直接应用的纯理论知识作简约处理.

(4)对那些能集中体现一种数学思想、一种数学方法的知识点,本教材改进引入方法,突出它在学科结构中的地位和作用,揭示原理,挖掘实质,充分发挥它启迪思维的作用.

二、在编排上,切实履行了“可接受性”原则.

课程是通过教材的中介形式在教学中“流通”而付诸实践的,因而教材既要是教学内容的信息“源”,又要是教学过程中使得教育对象可接受的信息“流”.对于“大众化教育”阶段的应用型本科学生来说,沿用“精英教育”阶段的《高等数学》教材,有悖于“因材施教”,会造成传授与接受的“脱节”,难以实现“源”到“流”的转变.本教材在编排与写法上坚持可接受性原则,增强了教材的可读性,尽力使读者读能生趣,读有所获,读有所思,读有所用.具体做法是:

(1)在语言上做到准确、透彻、通俗、精练,深入浅出,化难为易,化繁为简.

(2)对主要数学概念,或采用质朴的背景材料,从中抽象出本质属性而引

入;或选择恰当的实例、特例,从具体到抽象、从个别到一般而引入. 让读者体验到数学概念来源于生产、生活实际,来源于自然,摸得着、看得见,就在我们身边.

(3)教材在引入主要定理时,破除了"定理条文陈述—证明过程—几点强调"的刻板模式,而是淡化证明,重视从学科结构、从应用需要上创设情境,自然引入所要传授的定理;用几何直观,用类比、归纳等思维方法诠释所传授的定理,使读者能悟出本质,明白原理,认清"源头",知晓"去处",对所学内容"串得起来",想得通,用得得当.

本教材共上、下两册. 上册含有:函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程等五章;下册含有:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分(含场论初步)、无穷级数等五章. 书中标有 * 的内容为选学内容.

本书由谢克藻(安康学院,西安思源学院)担任主编;李花妮(西安工业大学)、冀永强、蒋永锋、王德华(西安思源学院)、汪义瑞(安康学院)担任副主编;张国华教授(西安工业大学,西安思源学院)、郭健教授(商洛学院,西安思源学院)担任主审.

本书所附电子课件由谢秉贤(西安思源学院)制作.

在大众化教育阶段编写应用型本科教材是件新事,加之我们水平有限,难免出现这样那样的错误,恳切希望读者批评、指正,帮助我们改进这部教材,使它渐臻佳境.

编　者

2010年4月

目　录

第1章 函 数

函数是微积分的研究对象，透彻理解函数概念是学习高等数学的必要条件. 为此，本章梳理并深化中学所学过的函数知识，并在此基础上界定初等函数，为学习高等数学奠定基础.

1.1 预备知识

1.1.1 常量与变量

当我们从量化角度考察自然现象、社会现象，从事科技研发、工程建设时，会接触到许许多多的量，不难发现这些量不外乎是两大类：一类是在过程中保持数值不变的量，我们称它为常量；另一类是在过程中数值不断改变的量，我们称它为变量.

例如，在考察企业经营活动时，我们常常会对产品做成本分析，一部分成本由厂房、机器、设备等构成，在一个相对时期内，这部分成本是不随产量变化而变化的，是一个常量，我们称它为固定成本；另一部分成本是由原材料消耗、能源消耗、职工工资等构成的，这部分成本随着产品数量的变化而变化，是一个变量，我们称它为可变成本.

又如，宇宙飞船在升空的过程中，随着飞船与地球之间的距离增大，宇航员受地球的引力越来越小，直至失重. 在这个过程中地球对宇航员的引力是一个变量；而宇航员的质量却未发生变化，是一个常量.

1.1.2 实数集 区间与邻域

微积分中所涉及的变量是在实数范围内取值的，为了刻画变量的变化范围，我们需对区间作确定的界定. 为了既可以从宏观又可以从微观上对变量的变化性态进行分析，还得引进一种特殊的区间——邻域.

1. 实数集

随着社会的发展，人类逐步加深了对数的认识. 正整数首先被人类所认识，全体正整数构成的数集为

$$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,3,\cdots\}.$$

由于在正整数集上减法运算受到限制，如

$$3-5\notin\mathbf{N}^{+},$$

为此又将数的范围扩大到整数，全体整数构成整数集，记为

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

为了使除法运算畅通无阻，数的范围再次扩大到有理数，全体有理数构成有理数集，记为

$$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q};p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\right\}.$$

即一个数是有理数，当且仅当它可以写成分数.

如果用十进制小数来表示有理数，则有理数被写成有穷的，或无限循环的小数. 如

$$\frac{1}{2}=0.5,-\frac{1}{4}=-0.25,\frac{4}{3}=1.\dot{3},\frac{5}{7}=0.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5};$$

反之，有穷小数或无限循环小数都可以化成分数.

具有原点、正方向和长度单位的直线称为数轴. 任何一个有理数都恰有数轴上的一个点与之对应. 这种与有理数对应的点称为有理点. 有理点在数轴上稠密，即在任意两个有理点之间，仍有有理点. 这是因为对于任何两个不相等的有理数 a 和 b，均有有理数 $\frac{a+b}{2}$ 介于其间. 虽然有理数在数轴上处处稠密，但有理点却未充满整个数轴. 如圆周率 π，边长为 1 的正方形的对角线长度 $\sqrt{2}$，当它们被表示成十进制小数时，都不是有穷或无限循环的. 经计算 $\pi=3.1415926\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$. 这种无限不循环小数称为无理数. 无理数在数轴上的对应点叫做无理点.

有理数与无理数统称为实数. 实数集记为 $\mathbf{R}$. 本书如无特殊声明，总是在 $\mathbf{R}$ 上讨论问题. 任意两个不等实数间均存在着实数，而且任意两个实数间不会有实数以外的数，即实数不仅是稠密的，而且是连续的. 实数与数轴上的点形成了一一对应关系，这样实数全体就不存在“缝隙”了，实数集不仅对加、减、乘、除运算封闭，对开方运算封闭，而且以后会看到实数对极限运算也封闭. 实数的这种性质称为“完备性”.

实数系统可表示为

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\quad\text{（无限不循环小数）}\end{cases}$$

2. 实数的绝对值

实数 x 的绝对值记作 $|x|$，它具有非负性，即

$$|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x<0.\end{cases}$$

例如，$|0.618|=0.618$，$|-\pi|=\pi$，$|0|=0$. $|x|$ 的几何意义为数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|\geqslant 0$. 当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$.

(2)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$.

(3)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|=\sqrt{x^2}$.

(4)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(5)设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$.

(6)设 $a\geqslant 0$,则 $|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$.

(7)设 $a\geqslant 0$,则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或者 $x>a$.

(8)设 $a\geqslant 0$,则 $|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是 $x\leqslant -a$ 或者 $x\geqslant a$.

它们的几何解释是很直观的. 例如性质(5),在数轴上,$|x|<a$ 表示所有与原点距离小于 a 的点 x 构成的点集;$-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 与点 a 之间的点 x 构成的点集. 它们表示同一个点集. 仿此,可解释性质(6)~(8).

由性质(5)可导出不等式

$$|x-A|<a \text{ 与 } A-a<x<A+a$$

是等价的,其中 A 为实数,a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值,有以下结论:

对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,恒有

(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$,(三角不等式);

(2) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$;

(3) $|xy|=|x||y|$;

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$,$(y\neq 0)$.

3. 区间与邻域

区间是一个特殊的点集,例如,数集 $\{x|2<x<3\}$ 是由所有满足不等式 $2<x<3$ 的那些实数构成的集合,这些实数在数轴上的对应点就形成了开区间 $(2,3)$.

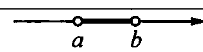
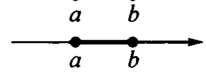
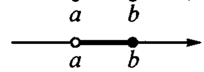
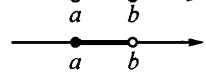
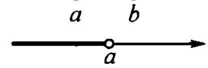
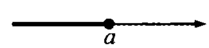
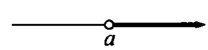
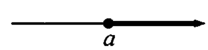
一般地,若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,我们称数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

为以 a 为**左端点**,b 为**右端点**的**开区间**,记作 (a,b).

仿此,我们可以界定闭区间、半开区间及无限区间. 不一一赘述,由表 1.1 给出.

表 1.1

定 义	名 称	符 号	图 像
$\{x\|a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\|a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,b]$	
$\{x\|a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,b)$	
$\{x\|x<a\}$	无限区间	$(-\infty,a)$	
$\{x\|x\leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty,a]$	
$\{x\|a<x\}$	无限区间	$(a,+\infty)$	
$\{x\|a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,+\infty)$	
$\{x\|-\infty<x<+\infty\}$	无限区间	$(-\infty,+\infty)$	

邻域是一种特殊的区间.

设 x_0 为一常数,$\delta>0$,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为 x_0 的 δ 邻域,简称 x_0 的邻域,如图 1.1. 它是一个开区间,中心为 x_0,半径为 δ,长度为 2δ. 由开区间的定义式知,进入 x_0

的邻域的变量 x 会满足二重不等式

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

从而 $-\delta<x-x_0<\delta$,即 $|x-x_0|<\delta$,故

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

在 x_0 的邻域内把 x_0 挖掉,就是 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,称它为 x_0 的去心邻域,如图 1.2. 不难得出

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

为了方便,约定 x_0 的邻域记作 $U(x_0;\delta)$. x_0 的去心邻域记作 $U^0(x_0;\delta)$.

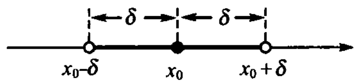


图 1.1

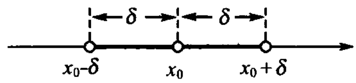


图 1.2

有时还会用到单侧邻域.

点 x_0 的左邻域 $U_-(x_0;\delta)=(x_0-\delta,x_0)$;

点 x_0 的右邻域 $U_+(x_0;\delta)=(x_0,x_0+\delta)$.

设 S 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集. 若存在实数 M,使得一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M$,则称 S 为**有上界的数集**,称 M 为 S 的一个**上界**;若存在实数 L,使一切 $x\in S$,都有 $x\geqslant L$,则称 S 是**有下界的数集**,称 L 为 S 的一个**下界**. 若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为**有界集**,否则称 S 为**无界集**.

例如,$\mathbf{N}^+$ 为有下界的数集,任意一个不超过 1 的实数都是 $\mathbf{N}^+$ 的一个下界,比如说,1,0,$-\frac{\pi}{4}$,-1 等均为 $\mathbf{N}^+$ 的下界,它有无数个下界,1 是它的最大下界. 但 $\mathbf{N}^+$ 无上界,因而它是无界集.

又如,$I=(-\infty,-5)\cup(0,5)$ 为有上界的数集,5,$5\sqrt{2}$,9 等任何一个大于或等于 5 的实数都是 I 的上界,它有无数个上界,5 是它的最小上界,但 I 无下界.

一般地,设 β 是数集 S 的一个上界,且对任意小的正数 δ,若 $\beta-\delta$ 不再是 S 的上界,则 β 为 S 的最小上界,又称 β 为 S 的**上确界**,记作

$$\beta=\sup S.$$

设 α 为数集 S 的一个下界,且对任意小的正数 δ,若 $\alpha+\delta$ 不再是 S 的下界,则 α 为 S 的最大下界,又称 α 为 S 的**下确界**. 记作

$$\alpha=\inf S.$$

有了确界的概念,就可以将实数的完备性叙述成下面的定理.

确界原理　非空有上界的数集一定有上确界,非空有下界的数集一定有下确界.

确界原理是微积分的一个重要理论基石,结合实例,读者是能够理解的.

习　题　1.1

1. 用区间表示下列不等式:

(1)$x\leqslant 0$;　　(2)$-1\leqslant x<2$;

(3) $|x|>3$;　　　　　　　　　　　　　　　(4) $x<-3$ 或者 $2\leqslant x<5$.

2. 分别用三种形式表述下列各邻域:

(1)3 的以 2 为半径的邻域;

(2)2 的 $h(h>0)$ 去心邻域;

(3) π 的以 δ 为半径的左邻域;

(4) $\sqrt{2}$ 的以 δ 为半径的右邻域.

3. 讨论集合 $S_1=\mathbf{Q}\cap(a,b)$, $S_2=(-2,-1)\cup\mathbf{R}^+$, $S_3=(-\infty,-3)\cup\{0\}$ 的有界性,若有界,请指出相应确界.

1.2 函数的概念及其表示方法

人类对函数的认识并非一步到位,我们借助前人的成果,由变量间的对应规则切入,逐步认清函数这个概念.

1.2.1 对应规则

例 1.1 某种商品在某一时期内供应量 S 与价格 P 的统计数据见表 1.2.

表 1.2

价格 P	2	3	4	5	6	8	13	16
供应量 S	15	20	25	30	35	45	80	110

此表给出了一个对应规则,它为价格集

$$A=\{2,3,4,5,6,8,13,16\}$$

中的每个元素找到了一个对应的供应量值,若令这个表所给出的对应规则为 f,便有

$$f(2)=15, f(3)=20, f(4)=25, f(5)=30, f(6)=35,$$
$$f(8)=45, f(13)=80, f(16)=110.$$

即就是说,在对应规则 f 的作用下,15 和 2 对应,20 和 3 对应,……,110 和 16 对应.

例 1.2 “$x\to y=x^2-2x+3$”给出一个对应规则,在这个对应规则下,任意一个实数 x,与 x 对应的值为“x 的二次方减去 x 的二倍加上 3”. 若以 g 表示这个对应规则,便有 $g(1)=1^2-2\times1+3=2$. $g(0)=0^2-2\times0+3=3$, $g(2)=2^2-2\times2+3=3$, $\cdots$, $g(x)=x^2-2x+3$.

例 1.3 设对应规则 h 为:“让一实数和它的平方根对应”,则有 $h(4)=\pm2$, $h(5)=\pm\sqrt{5}$, $h(0)=0$, $\cdots$, 任给 $x\geqslant0$, 总有 $h(x)=\pm\sqrt{x}$. 但 $x<0$ 时, $h(x)$ 无意义.

由上述诸例可以发现,对应规则是有一定作用范围的,离开了这个作用范围,对应规则便不起作用,也就不复存在了. 我们把一个对应规则的作用范围称为该对应规则的存在域. 例 1.1 中 f 的存在域为价格集 A;例 1.2 中 g 的存在域为全体实数的集合 $\mathbf{R}$;例 1.3 中 h 的存在域为非负实数集 $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$. 我们把存在域中的元素叫自变量,在对应规则作用下自变量的对应值叫因变量.