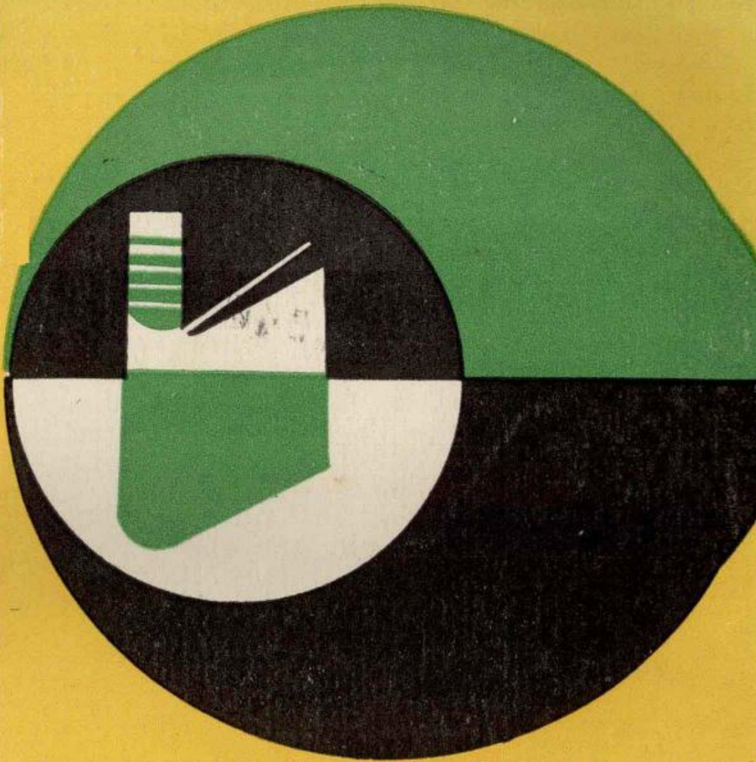
高等
师专



解析几何

主编 金震东

华东师范大学出版社

解 析 几 何

主审：钱端壮
主编：金震东
编写人员(按姓氏笔划)：
丁文秀　金震东　林海滨　殷启正

华东师范大学出版社

解 析 几 何

金震东　主编

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）
新华书店上海发行所发行　　江苏淮安印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：10　字数：250千字
1991年3月第一版　　1991年3月第一次印刷
印数：001—5,000本

ISBN7-5617-0659-6/K·051　　定价：3.30元

出 版 说 明

我国高等师范专科学校长期以来没有一套适合自己要求的、比较系统和完整的教材。1986年，我们受国家教委有关部门的委托，与华东地区福建、江西、浙江、江苏、安徽、山东六省教育委员会协作，组织编写一套供华东地区高等师范专科学校使用的教材。这套教材包括中文、历史、政治教育、外语、数学、物理、化学、地理等八个专业的主干课程和公共课程，共五十余种。从今年下半年开始陆续出版，计划到明年年底出齐。

为了组织编写这套教材，华东各省教委和我们对各地师专的教学、科研、师资、教材和教育改革等情况，作了广泛的调查，在此基础上，又对编写这套教材的目的要求，人员组织，协作方式，具体步骤等，进行了深入细致的研究。各地师专的领导和广大教师都热烈支持，都把本校具有学科优势又有丰富教学经验和较高学术水平的教师推荐为这套教材的主编或编写成员，这对于保证这套教材在较高程度上反映当前华东地区师专教学和科研的新水平，起了十分重要的作用。

在编写的指导思想和具体实践上，我们力求使这套教材具有以下特点：

一、坚持以马列主义、毛泽东思想为指导，注意培养学生科学的世界观和人生观，培养他们为社会主义的四个现代化，特别是为教育事业的献身精神和为人师表的高尚品德。但这些又不是作空洞的说教，而是寓于教材的具体内容之中。

二、严格以新的师专教学计划和教学大纲为依据，坚持立足于师专这个特定层次上，从师专的培养目标和教学实际出发，教材内容的深度、广度乃至篇幅，都要充分体现培养初中教师的要求，

坚决防止跨越师专层次，盲目攀比、随意拔高的偏向。

三、贯彻理论联系实际的原则，系统阐述本门课程的基本理论、基本知识和基本技能。要吸收科学上的新成果，具有时代的先进性。要贯彻百花齐放、百家争鸣的方针，对不同学派的意见，选择一种能被多数人接受的意见作为基础，同时也介绍不同观点的意见。要充分注意学生思维能力、自学能力和表达能力的培养。

四、力求反映华东地区师专教育改革状况和教学、科研水平，以便更好地适应华东地区师专的教学需要。同时还注意反映华东地区政治、经济、历史、文化、改革开放、风土人情的特点，以为地方经济建设服务。

这套教材不仅可作为华东地区的师专教材，也可供其他地区的师专选用，还可供在职的初中教师学习和参考。

当把这套教材奉献给读者时，我们首先要向为此而作出重大指导和积极支持的国家教委和华东各省教委的有关同志，向为此而付出辛勤劳动的各师专的负责同志，和所有参加编写的教师以及许多热心帮助的同志，致以衷心的谢意。

组织编写和出版师专教材，在我们还属首次，由于实际经验和思想水平等的限制，其中缺点、错误在所难免，诚恳欢迎师专广大师生和其他读者批评指正。

华东师范大学出版社

1988年7月30日

前　言

在较长一段时间内，师专没有一套比较合适的教材，这无论对教还是学都带来不少困难。在国家教委有关部门的领导和华东师范大学出版社的组织下，我们成立了华东地区师专解析几何编写组，全力以赴地编写了此书。

本书是根据师专二年制教学大纲的要求编写的。全书共有六章，可在 80 课时内讲授完。使用本教材可以一开始就限于空间直角坐标系。选学章节和附录可供非师专类院校选用。

本书在大纲要求的基础上，还有以下一些特色。

第一章用几何方法定义仿射坐标，直观易懂。在此基础上，用代数方法定义矢量的各种代数运算，使其性质都归结为数的运算的对应性质，一目了然，摒弃了传统教材相应部分的繁琐论证。此外，还论述了矢量运算的几何实施方法，与传统教材殊途同归。

第二章把“母线平行于坐标轴的柱面方程”作为特殊的曲面方程处理，“把球面坐标与柱面坐标”作为曲面的参数方程的例题处理，这样简明易懂，对学习数学分析也有帮助。

第三章前四节讨论了仿射性质，后三节讨论了度量性质。我们觉得这样编排比较科学，可使学生知道在何种情况下使用何种标架。

第四章增加了“曲线产生曲面”一节，并以一条线贯穿整章，为后面几节提供了理论依据。

第五、六章突出了主要定理，减少了定理的数量，着重于化简技巧。不仅介绍了利用主径面为坐标面而进行化简的方法，还介绍了更为方便的直接利用主方向为对称轴进行化简的方法。

此外，本书还补充了平面作图方法及“矢量代数在初等数学中

的应用举例”一节，这样更能体现师专的培养目标。

参加本书编写的有：滁州师专金震东（第一、二章）；宿州师专丁文秀（第三章）；镇江师专殷启正（第四章）；宜春师专林海滨（第五、六章），最后由金震东统稿。钱端壮教授审阅了本书并提出了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

限于我们的水平，难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1988.10.

目　录

第一章 矢量代数

解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科，它分平面和空间两部分，后者是本书的主要内容。平面部分可以仅限于使用普通代数方法，空间部分一般还要配合使用矢量代数方法。矢量代数是本章的主要内容。由于矢量代数赋予几何空间以代数结构，把代数与几何直接联系了起来，因而成为解析几何的有力工具，也是初等数学、力学、物理学和工程技术的有力工具。矢量代数的意义还在于为线性空间和欧氏空间提供了具体模型。

§1.1 矢量的概念

在力学、物理学和工程技术中常见的量有两类，一类量只有大小而无方向，如温度、时间、质量、密度、功、长度、面积和体积等，叫做数量；另一类量既有大小又有方向，如力、位移、速度、加速度、电场强度等，叫做矢量。

定义 1.1 既有大小又有方向的量叫做**矢量**，或称**向量**，简称**矢**。

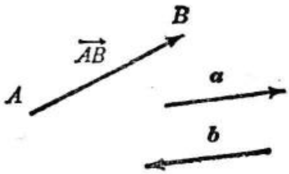


图 1.1

在几何中，矢量用有向线段来表示，有向线段的始点和终点叫做矢量的**始点**和**终点**，有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向。始点是 A，终点是 B 的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$，有时也用带箭头的小写字母 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 或黑体字如 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 来表示。

矢量的大小叫做矢量的**模**或**长度**。矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\mathbf{a}$ 的模分别记

作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\boldsymbol{a}|$。模等于 1 的矢量叫做**单位矢量或幺矢**，模等于零的矢量叫做**零矢量**，记作 $\boldsymbol{0}$。零矢量的始点与终点重合，方向可以任意选定。不是零矢量的矢量叫做**非零矢量**。与非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位矢量叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量，记作 $\boldsymbol{a}^0$。

定义 1.2 如果两个矢量的模相等且方向相同，那么就称这两个矢量是**相等**的，所有的零矢量都相等。矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

根据这个定义，一个矢量平行移动后仍和原来的矢量相等，因而矢量的始点可以任意选取。始点可以任意选取的矢量叫做**自由矢量**。在自由矢量的意义下，相等的矢量看作同一的自由矢量。本书以后用的都是自由矢量。

定义 1.3 模相等、方向相反的两个矢量叫做**互反矢量**，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的反矢量记作 $-\boldsymbol{a}$。

如果两个矢量所在的直线相互平行，那么就称这两个矢量是**相互平行**的，矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$。

定义 1.4 平行于同一直线的一组矢量叫做**共线矢量**。零矢量与任意矢量共线。

显然，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{b}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0=-\boldsymbol{b}^0$。

定义 1.5 平行于同一平面的一组矢量叫做**共面矢量**。零矢量与任何共面的矢量组共面。

在平面直角坐标系中，以原点为始点的矢量叫做它的终点的**径矢**。点(1，0)和(0，1)的径矢叫做**坐标矢量**，分别记作 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，它们是两个与坐标轴同向的幺矢。

习 题 1-1

1. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在下列各组矢量中，哪些是相等矢量？哪些是互反矢量？

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$；

(2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$；

(3) $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$。

2. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的上、下底面，试在矢量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线矢量和共面矢量。

3. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

(2) 把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

(3) 把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点；

(4) 以定点 M 为始点且与不共线矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面的一切矢量；

(5) 以定点 M 为始点且与定矢量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的一切矢量；

(6) 以定点 M 为始点且与定矢量 $\boldsymbol{v}$ 共线的一切矢量.

§1.2 标架与坐标

为简便起见，本书采用代数方法定义矢量的各种运算，我们先来定义矢量的坐标。矢量的坐标可以用点的坐标来定义。大家知道，平面上的点的坐标可以用作平行线的办法归结到直线上的点的坐标，空间中的点的坐标则可以用作平行平面的办法同样归结到直线上的点的坐标。

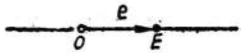


图 1.2

定义 2.1 直线上的一个点 O 和一个非零矢量 $\mathbf{e}$ 的全体，叫做直线上的一个**仿射标架**（图 1.2），简称**标架**，记作 $\{O;\ \mathbf{e}\}$。

在直线上取定标架 $\{O;\mathbf{e}\}$ 后，对于直线上的任意一个点 M，有唯一的实数

$$x=\begin{cases} 0, & \overrightarrow{OM}=\mathbf{0},\\ \dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\mathbf{e}|}, & \overrightarrow{OM}\neq\mathbf{0}, \text{且} \overrightarrow{OM} \text{与} \mathbf{e} \text{同向},\\ -\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\mathbf{e}|}, & \overrightarrow{OM}\neq\mathbf{0}, \text{且} \overrightarrow{OM} \text{与} \mathbf{e} \text{反向} \end{cases} \tag{1.1}$$

与之对应；反之，任给实数 x，在直线上取点 M，使得 $|\overrightarrow{OM}|=$

$|x|\cdot|\mathbf{e}|$，且当 $x=0$ 时，$\overrightarrow{OM}=\mathbf{0}$；当 $x>0$ 时，$\overrightarrow{OM}$ 与 $\mathbf{e}$ 同向；当 $x<0$ 时，$\overrightarrow{OM}$ 与 $\mathbf{e}$ 反向。显然，点 M 由实数 x 唯一确定。

定义 2.2 由标架 $\{O;\mathbf{e}\}$ 按式(1.1)所确定的直线上全体点的集合与全体实数集合之间的一个一一对应关系叫做直线上的点的一个**仿射坐标系**，仍记成 $\{O;\mathbf{e}\}$。直线上的点 M 所对应的实数 x 叫做点 M 关于标架 $\{O;\mathbf{e}\}$ 的仿射坐标，记作 $M(x)$。取定标架 $\{O;\mathbf{e}\}$ 的直线叫做**坐标轴**或**实数轴**，简称**轴**，记作 Ox，O 叫做**坐标原点**，简称**原点**，$\mathbf{e}$ 叫做**坐标矢量**，以 O 为端点且与 $\mathbf{e}$ 同向的射线叫做**正半轴**，另一条射线叫做**负半轴**。

对于直线上的任意一个矢量 $\mathbf{m}$，均有点 $M(x)$，使得 $\mathbf{m}=\overrightarrow{OM}$。令矢量 $\mathbf{m}$ 与实数 x 对应，则在相等的矢量是同一的意义下，这个对应关系是直线上全体矢量的集合与全体实数集合之间的一个一一对应关系。

定义 2.3 直线上的点 M 关于标架 $\{O;\mathbf{e}\}$ 的仿射坐标 x 叫做点 M 的径矢以及所有和它相等的矢量 $\mathbf{m}$ 的关于标架 $\{O;\mathbf{e}\}$ 的**仿射坐标**，记作 $\mathbf{m}\{x\}$ 或 $\mathbf{m}=\{x\}$，直线上的矢量与其坐标之间的一个一一对应关系叫做直线上的矢量的一个**仿射坐标系**，仍旧记作 $\{O;\mathbf{e}\}$。

定义 2.4 空间中的一个点 O，与三个不共面的矢量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 的全体，叫做空间中的一个**仿射标架**，简称**标架**，记作 $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$。如果 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 都是幺矢，那末 $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 叫做**笛卡尔标架**，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 两两垂直的笛卡尔标架叫做**笛卡尔直角标架**，简称**直角标架**。如果 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 的相互关系依次和右(左)手的姆指、食指、中指相同，那么这个标架叫做**右(左)手标架**(图1.3)。

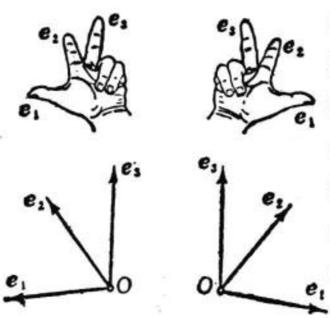


图 1.3

在空间取定标架 $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$，$Ox$，$Oy$，$Oz$ 是分别以 $\{O;\mathbf{e}_1\}$，$\{O;\mathbf{e}_2\}$，$\{O;\mathbf{e}_3\}$ 为标架的轴，分别称为 x 轴，y 轴，z 轴，统称**坐标轴**。每两条坐标轴所确定的三个平面分别称为 yz 平面，zx 平面，xy 平面，统称**坐标面**。三个坐标面把空间所分成的八个区域称为八个**卦限**，卦限的序号如图 1.4 所示。O 点叫做**坐标原点**，简称**原点**，以原点为始点的矢量称为它的终点的径矢，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 称为**坐标矢量**。

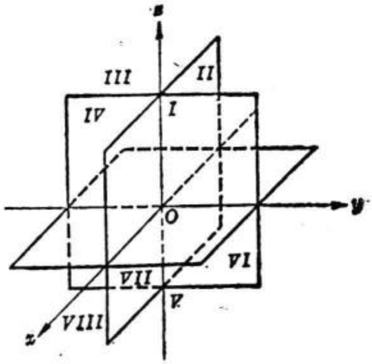


图 1.4

在空间取定标架 $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$，任给点 M，过点 M 作三个平面平行于三个坐标面，分别交三条坐标轴于点 P、Q、R（图 1.5）。设与这些点对应的直线坐标分别为 x，y，z，则三元有序数组$(x、y、z)$由点 M 唯一确定。反之，任给三元有序数组(x, y, z)，在三条坐标轴上分别取点 P、Q、R，使得与其对应的直线坐标分别为 x、y、z，过点 P、Q、R 分别作平面，平行于对应的坐标面，则所作三平面的交点 M 由三元有序数组(x, y, z)唯一确定。

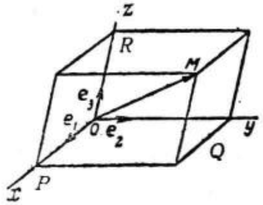


图 1.5

定义 2.5 由标架 $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ 按图 1.5 所示方法确定的空间的全体点的集合与全体三元有序数组的集合之间的一个一一对应关系，叫做空间的点的一个**仿射坐标系**，仍旧记作$\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$。空间的点 M 所对应的三元有序数组(x, y, z)叫做点 M 关于标架$\{O;\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$的**仿射坐标**，记作 $M(x, y, z)$。

由这个定义可以知道，原点的三个坐标都是零，坐标轴上的点的坐标有两个是零，坐标面上的点的坐标有一个是零，其余的点的

三个坐标都不是零。各卦限内点的坐标的符号如下表所示。

坐标 \ 卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

在空间任给矢量 $\boldsymbol{m}$，取点 $M(x, y, z)$，使得 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{OM}$。令矢量 $\boldsymbol{m}$ 与三元有序数组(x, y, z)对应，则在相等的矢量是同一的意义下，这个对应关系是空间的全体矢量的集合与全体三元有序数组的集合之间的一个一一对应关系。

定义 2.6 空间的点 M 关于标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的仿射坐标(x, y, z)叫做点 M 的径矢以及所有与它相等的矢量 $\boldsymbol{m}$ 的关于标架$\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$的**仿射坐标，记作** $\boldsymbol{m}\{x, y, z\}$或 $\boldsymbol{m}=\{x, y, z\}$。空间的矢量与三元有序数组之间的一个一一对应关系叫做空间的矢量的一个**仿射坐标系**，仍旧记作 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，或 $O\text{-}xyz$。由仿射标架、笛卡尔标架、直角标架，右(左)手标架所确定的坐标系分别叫做仿射坐标系、笛卡尔坐标系、直角坐标系、右(左)手坐标系。

根据这个定义容易知道，一个空间矢量$\overrightarrow{AB}$关于标架$\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$的仿射坐标就是点 B 关于标架 $\{A;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的仿射坐标。相等矢量的对应坐标相等，互反矢量的对应坐标互为相反数，零矢量的三个坐标都是零，与坐标轴共线的矢量的坐标有两个是零，特别，$\boldsymbol{e}_1=\{1, 0, 0\}$，$\boldsymbol{e}_2=\{0, 1, 0\}$，$\boldsymbol{e}_3=\{0, 0, 1\}$。与坐标面共面的矢量的坐标有一个是零，其余矢量的三个坐标都不是零。

我们特别约定，直角坐标系用$\{O;\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$表示。以后，一般利用空间右手直角坐标系，并且在习惯上，总是令 x 轴、y 轴、z 轴

的正向分别向前、向右、向上，故分别称为横轴、纵轴、竖轴，对应地，点的三个坐标分别称为横标、纵标、竖标。

习 题 1-2

1. 坐标适合下列条件的点位于哪几个卦限内？

(1) $yz>0$; (2) $xz<0$; (3) $xyz>0$; (4) $xyz<0$。

2. 我们把适合某个条件C的点$P(x,y,z)$的集合记作$\{P(x,y,z)|C\}$。说明下列集合所表示的图形：

(1) $\{P(x,y,z)|y>0\}$;

(2) $\{P(x,y,z)|y\leqslant 0\}$;

(3) $\{P(x,y,z)|y=0=z,x>0\}$;

(4) $\{P(x,y,z)|y=0=z,x\leqslant 0\}$;

(5) $\{P(x,y,z)|0<x<1,0<y<1,0<z<1\}$.

3. 在空间直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，设点$P(2,-3,-1)$，$M(a,b,c)$，求这两点关于(1)坐标平面；(2)坐标轴；(3)坐标原点的各个对称点的坐标。

4. 平行四边形$ABCD$的对角线交于E点，

$$DM=\frac{1}{3}DE,\ EN=\frac{1}{3}EC,$$

且$\overrightarrow{AB}=\mathbf{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\mathbf{e}_1'$，$\overrightarrow{CD}=\mathbf{e}_2'$，求点$M$，$N$和矢量$\overrightarrow{MN}$分别关于标架$\{A;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$与$\{C;\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2'\}$的坐标。

5. 在平行六面体$ABCD$-$EFGH$中，平行四边形$CGHD$的中心为P，并设$\overrightarrow{AB}=\mathbf{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{AE}=\mathbf{e}_3$，试求矢量$\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{EP}$关于标架$\{A;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$的坐标，以及$\triangle BEP$三顶点关于标架$\{A;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$的坐标。

§1.3 矢量的线性运算

本节为研究几何图形的共线、共面、定比分点等仿射性质而引入矢量的线性运算。

定义 3.1 在空间取定标架$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$，设$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\lambda$为实数，我们把矢量$\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\}$、

$\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$分别叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**、实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的**数量乘积**，分别记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\lambda\boldsymbol{a}$。求矢量之和的运算叫做**矢量的加法**，求实数与矢量的数量乘积的运算叫做**数量与矢量的乘法**，简称**数乘**。矢量的加法以及数量与矢量的乘法统称为**矢量的线性运算**。

定理 3.1 矢量的线性运算具有以下性质：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,

(5) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

(8) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,

其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 均为矢量，λ、μ 均为实数。

证明 设 $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}&=\{x, y, z\}+\{0,0,0\}=\{x+0, y+0, z+0\}\\&=\{x, y, z\}=\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

即(3)成立。其余请读者自行验证。

空间全体矢量所成集合对于矢量的线性运算封闭，并且具有上述性质，我们把这个集合叫做**实数集上的一个三维线性空间**，它是抽象的线性空间的一个具体模型。

由于矢量的加法满足交换律和结合律，因而任意有限多个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n\geqslant 3)$ 的和可以写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$。

定义 3.2 若矢量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和等于 $\boldsymbol{a}$，则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之**差**，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。求两个矢量之差的运算叫做矢量的**减法**运算。

定理 3.2 如果 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，那么

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\}。$$

证 若有矢量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$；又因