考研数学辅导

一本专业针对考研数学学习方法的高等数学指导书

高等数学FIC八讲

卜长江 /著

卓越的数学思想

实用的答题技巧

全面的考点总结

高效率的考研参考书

快 易 新

学了就能会，会了就能拿高分！

科学出版社

考研数学辅导

高等数学 FIC 八讲

卜长江　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书是研究生入学考试高等数学辅导用书，按照研究生入学考试高等数学大纲的内容、要求和近年来的考研命题趋势、规律，分为八个部分编写，称为八讲，即为本书的前八章：函数、极限、连续；一元函数微分学；一元函数积分学；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学；无穷级数；常微分方程。第九章为附加章，可根据需要选讲.书中对数学一、数学二和数学三的内容和要求分别做了标注.

作者在多年的考研数学辅导和本科高等数学教学中，总结出一套新的学习高等数学方法，简称 FIC，编写了《高等数学 FIC》讲义. 这本讲义，自 1997 年起至今，作为考研数学辅导讲义在哈尔滨鸿鹏考研辅导学校等多家考研辅导机构和哈尔滨工程大学本科教学中讲授，现整理修订出版，书名为《高等数学 FIC 八讲》.

本书是研究生入学考试高等数学辅导用书，也可作为高等数学课程的教材、辅导材料和教师教学的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 FIC 八讲/卜长江著. —北京 ：科学出版社, 2016.7
（考研数学辅导）
ISBN 978-7-03-049356-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①卜… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 157409 号

责任编辑：李　欣／责任校对：张凤琴
责任印制：张　倩／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 7 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2016 年 7 月第一次印刷　印张：14 1/2
字数：280 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言
Preface

对于准备考研进行数学复习和正在学习数学的学生而言, 他们所关心的就是快速学懂、有想法、会解题, 真正领悟到数学的核心本质和兴趣. 基于以上需求, 作者在 1997 年编写了《新概念微积分》讲义, 强调用新思想、新体系学习高等数学, 注重基础、掌握微积分核心思想、分类解题. 为了更直接地体现讲义的内容, 2006-2016 年改名为《高等数学 FIC》讲义.

FIC 是作者根据多年教学经验总结出的一种学习高等数学新方法的代名词 F-Foundation: 基础; I-Idea: 思想; C-Classification: 分类. FIC 学习方法是在学习一些基础知识 (F) 后, 以微分为核心, 导数是微分的比值、积分是微分的和为主线, 快速掌握高等数学课程的思想方法和理论体系 (I), 将高等数学问题归纳为若干类别 (C), 提高快速解题能力. 例如, 将不定式极限归纳为八类问题; 将不定积分求解归纳为八类问题和统一变量; 将中值定理问题回归它的本质, 即归纳为方程根的存在性问题等. 这样, 应用 FIC 学习方法, 在高等数学学习和考研复习中事半功倍.

自 1997 年起至今,《高等数学 FIC》(《新概念微积分》) 讲义, 在哈尔滨鸿鹏考研辅导学校等多家考研辅导机构和哈尔滨工程大学本科教学中讲授, 效果显著, 深受学生欢迎. 现整理修订出版, 书名为《高等数学 FIC 八讲》, 希望对更多的考生和正在学习高等数学的学生有所帮助.

感谢哈尔滨鸿鹏考研学校对高等数学 FIC 的教学和本书出版的大力支持; 感谢哈尔滨工程大学对每年 12 次的高等数学 FIC 系列讲座的长期支持; 感谢我的博士研究生对本书的校对工作的支持.

由于编者水平有限, 不当之处敬请指正.

作　者

2016 年 6 月 28 日

目　录 Contents

第 1 章 函数、极限、连续

CHAPTER 1

本章的主要内容是函数概念及性质、无穷小与无穷大的概念、无穷小阶的比较; 函数极限存在的充分必要条件、数列极限存在准则和两个重要极限; 连续与间断概念、间断点分类和闭区间连续函数性质.

1.1 函　　数

高等数学研究的主要对象是函数, 研究函数的变化率和函数曲线所围图形面积等. 在中学已经讨论了一元函数的概念和性质, 所以这一部分仅对函数作简单介绍.

函数概念及性质, 在历年考题中所占的比例不大 (主要是填空和选择题), 但与之相联系的内容渗透到高等数学的各个部分. 本节问题都是最基本的, 大多数情况下, 只要从基本定义出发, 经过适当演算, 即可得到所需结论. 这部分的重点内容及要求:

(1) 理解函数概念: 基本初等函数、复合函数、初等函数、隐函数和参数方程确定的函数;

(2) 掌握函数性质: 有界性、单调性、奇偶性和周期性;

(3) 熟练掌握函数的复合方法及相关内容.

1.1.1 函数的概念

设 D 为数的集合, 如果对任意给定的 $x \in D$, 按照某种对应关系存在唯一一个确定的数 y 与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记为 $y = f(x)$. 称 D 为函数 $y = f(x)$ 的定义域, 称 y 值的集合为函数的值域.

包含 x_0 点的任意一个区间称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的邻域; $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$(即 $|x - x_0| < \delta$) 称为 x_0 点的 δ 邻域; $(x_0 - \delta, 0) \cup (0, x_0 + \delta)$(即 $0 < |x - x_0| < \delta$) 称为 x_0 点的去心 δ 邻域 ($\delta > 0$).

例 1.1.1 求函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域.

解 由于 $1 - x^2 \geqslant 0$, 所以定义域为 $[-1, 1]$.

例 1.1.2 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数, 其图像如图 1.1.1 所示.

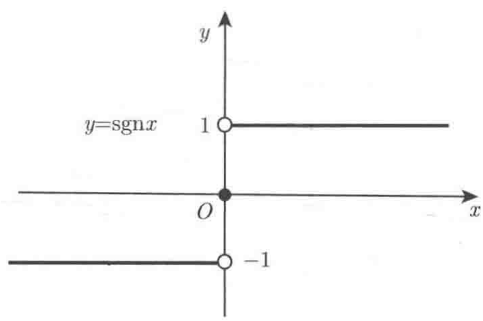

图 1.1.1

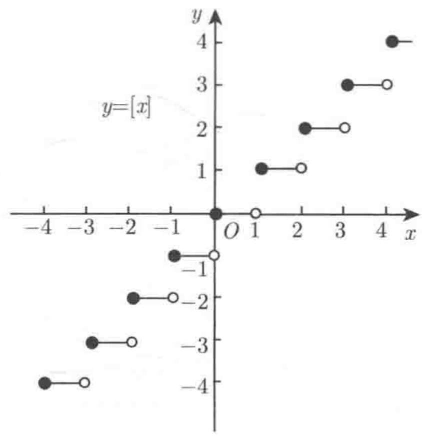

图 1.1.2

注 如上例, 有两个或两个以上表达式的函数称为分段函数.

例 1.1.3 函数 $y=[x]$ 称为取整函数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[1.2]=1$, $[-1.3]=-2$. $y=[x]$ 的图像如图 1.1.2 所示.

例 1.1.4 双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, 如图 1.1.3 所示.

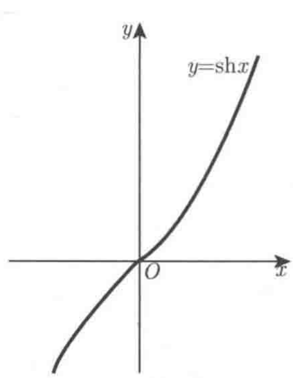

图 1.1.3

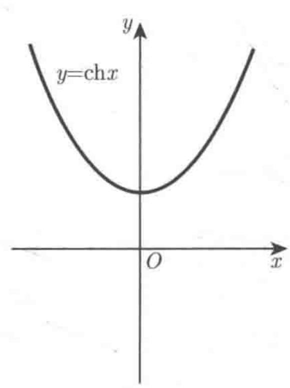

图 1.1.4

例 1.1.5 双曲余弦函数 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, 如图 1.1.4 所示.

例 1.1.6 双曲正切函数 $y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, 如图 1.1.5 所示.

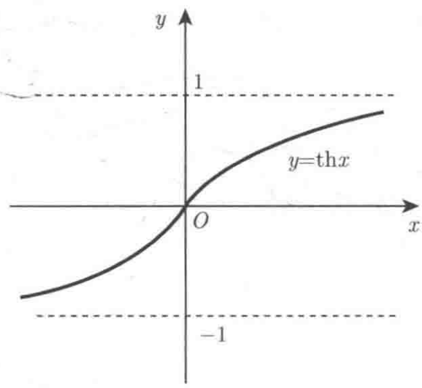

图 1.1.5

1.1.2　函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $y = f(x), x \in D$. 如果存在常数 M 使得对任意 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leqslant M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 称常数 M 为 $f(x)$ 的界.

设函数 $y = f(x), x \in D$. 如果存在常数 M, 使得对任意的 $x \in D$ 都有 $f(x) \leqslant M(f(x) \geqslant M)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界 (有下界), M 称为 $f(x)$ 在 D 上的上界 (下界).

由于不等式 $|f(x)| \leqslant M$ 与不等式 $N_1 \leqslant f(x) \leqslant N_2$ 等价, 所以函数有界当且仅当有上界且有下界.

注　有界函数的界不唯一.

例 1.1.7　证明函数 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 有界.

证明　由 $1 + x^2 \geqslant 2|x|$ 得到 $\dfrac{|x|}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, 所以 $|y| = \dfrac{|x|}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, 所以函数有界.

例 1.1.8　证明函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界.

证明　用反证法, 假设 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上有界, 则存在常数 M 使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$. 取 $x = \dfrac{1}{M+1} \in (0,1)$, 则 $M + 1 \leqslant M$, 即 $1 \leqslant 0$ 矛盾. 所以 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界.

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x), x \in D$. 如果对任意给定的 $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)\,(f(x_1) > f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 D 上单调增加 (单调减少).

单调增加函数在几何上解释即为: 随着自变量的增加函数值不断增大.

例 1.1.9　函数 $y = |x|$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少.

注 用初等数学方法确定函数的单调性, 有时并不容易, 以后我们通常用导数 (第 2 章内容) 确定函数的单调性.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x), x\in D$. 如果对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上为奇 (偶) 函数.

注 奇函数和偶函数的定义域 D 为对称集合.

例 1.1.10 函数 $y=x+x^3, x\in[-1,1)$ 是非奇非偶的, 原因是 $[-1,1)$ 不是对称数集.

例 1.1.11 讨论函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性.

解
$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\\ &=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\\ &=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

注 $\ln x=\log_e x$, 其中 $e=2.718\cdots$ 为无理数.

容易证明奇函数的图像关于坐标原点对称, 并且若在坐标原点有定义, 则函数曲线经过坐标原点; 偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x), x\in D$. 若存在常数 $T>0$ 使得对任意的 $x\in D$ 有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 T 为函数 $f(x)$ 的周期. 显然周期函数的周期不唯一, 有时称周期函数的最小正周期为函数的周期.

例 1.1.12 $T=\pi$ 为函数 $y=|\sin x|$ 的周期, $T=\dfrac{\pi}{4}$ 为函数 $\tan^2 4x$ 的周期.

注 周期函数不一定有最小周期, 例如函数 $f(x)\equiv 1$ 没有最小正周期.

1.1.3 函数的反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 W. 若对任意给定的 $y\in W$ 存在唯一的 $x\in D$ 与之对应, 则称函数 $x=g(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数, 将 $g(y)$ 记为 $f^{-1}(y)$.

例 1.1.13 函数 $y=2x+1$ 的反函数为 $x=\dfrac{1}{2}(y-1)$.

函数并不一定有反函数, 例如 $y=x^2$ 对给定的 $y>0$, 存在两个 x 值与之对应, 所以 $y=x^2$ 没有反函数. 有时函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 记为 $y=g(x)$, 这样 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.4 函数的运算

通常函数可以看成简单函数经过初等运算得到, 函数有两种初等运算: 四则运算和复合运算.

函数的四则运算　函数的 "加、减、乘、除 (分母不为 0)".

函数的复合运算　设函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 且 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 的值域相交非空, 则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数, 称 u 为中间变量.

例 1.1.14　函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2+1$ 的复合函数为 $y=\sqrt{x^2+1}$.

例 1.1.15　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 1, \\ x+1, & x<1, \end{cases}$ $g(x)=2^x$. 求复合函数 $y=f(g(x))$ 的表达式.

解

$$f(g(x))=\begin{cases} g(x), & g(x)\geqslant 1, \\ g(x)+1, & g(x)<1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2^x, & 2^x\geqslant 1, \\ 2^x+1, & 2^x<1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2^x, & x\geqslant 0, \\ 2^x+1, & x<0. \end{cases}$$

一些函数进行复合运算得到复合函数. 反之, 复合函数可以分解为一些函数的复合.

例 1.1.16　将函数 $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ 分解为简单函数的复合.

解　$y=\dfrac{1}{u}, u=v^3, v=x^2+1$.

注　上例也可有 $y=u^{-3}$, $v=x^2+1$, 由此可见复合函数的分解不一定唯一.

1.1.5 基本初等函数

常见的函数很多都是 "简单函数" 经过 "运算" 得到的, 例如: $y=\dfrac{\sin 3x}{1+x^2}$ 是 $\sin 3x$ 与 $1+x^2$ 的商, 而 $\sin 3x$ 是复合函数, $1+x^2$ 是 1 与 x^2 的和. 知道这些 "简单函数" 的性质, 由 "简单函数" 的运算可以比较清楚地得到复杂函数的性质. 所以下面讨论常见的简单函数, 这些常见的 "简单函数" 称为基本初等函数. 基本初等函数有 6 种.

1\. **常值函数** $y=C$

它的图像为水平线, 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 如图 1.1.6 所示.

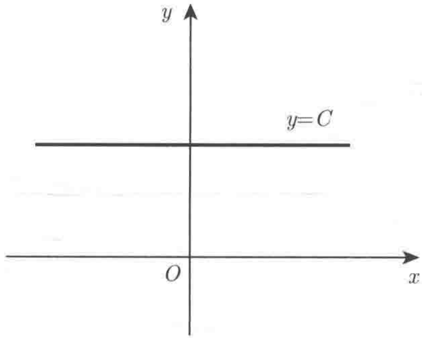

图 1.1.6

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$, α 为常数

幂函数的定义域一般与 α 值有关, 如抛物线 $y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$, $y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$. 图 1.1.7~图 1.1.11 是一些常见的幂函数图像.

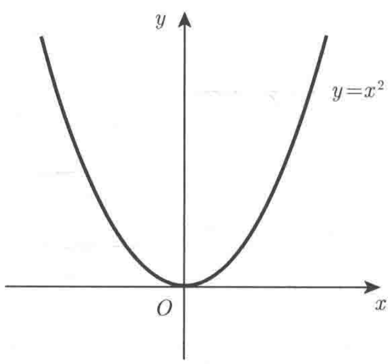

图 1.1.7

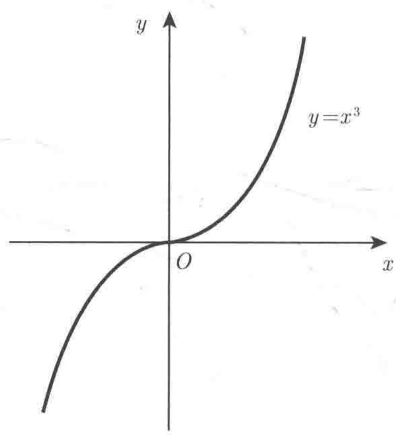

图 1.1.8

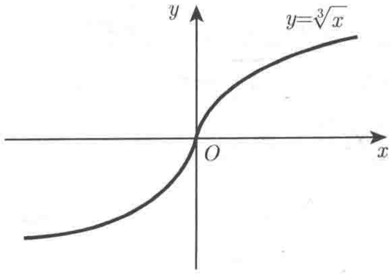

图 1.1.9

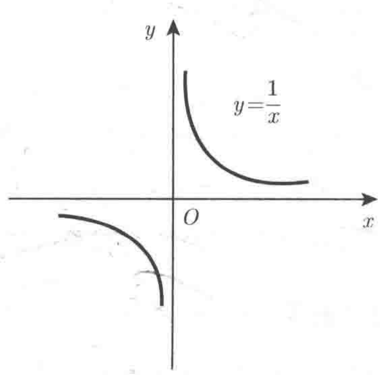

图 1.1.10

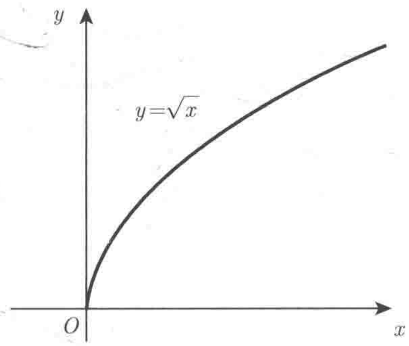

图 1.1.11

3. 指数函数 $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in(-\infty,+\infty)$

其图像如图 1.1.12 所示.

特殊情形: $y=e^x$, $e=2.718\cdots$ 为无理数.

4. 对数函数 $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in(0,+\infty)$

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数, 它的图像和 $y=a^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 如图 1.1.13 所示.

特殊情形: $y=\log_e x$, 记为 $y=\ln x$.

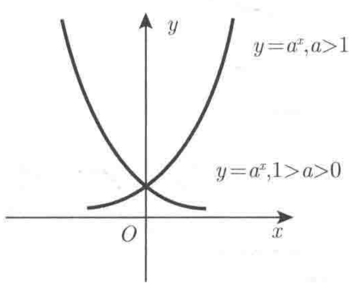

图 1.1.12

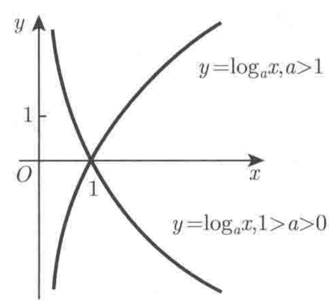

图 1.1.13

5. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

如图 1.1.14 所示, 它为有界的奇函数且是最小正周期为 2π 的周期函数.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

如图 1.1.15 所示, 它是有界的偶函数且是最小正周期为 2π 的周期函数.

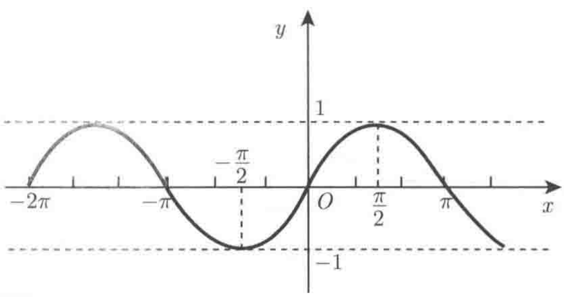

图 1.1.14

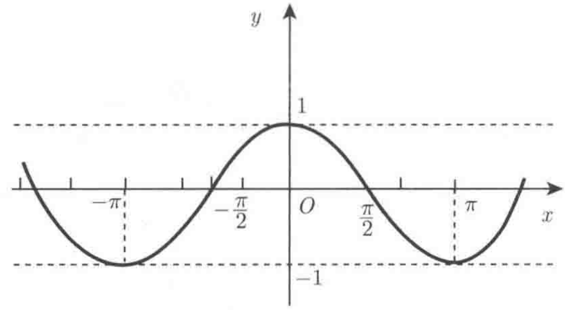

图 1.1.15

(3) 正切函数 $y=\tan x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

如图 1.1.16 所示, 它是无界的奇函数且是最小正周期为 π 的周期函数.

(4) 余切函数 $y=\cot x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $x\neq k\pi$, 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

如图 1.1.17 所示, 它是无界的奇函数且是最小正周期为 π 的周期函数.

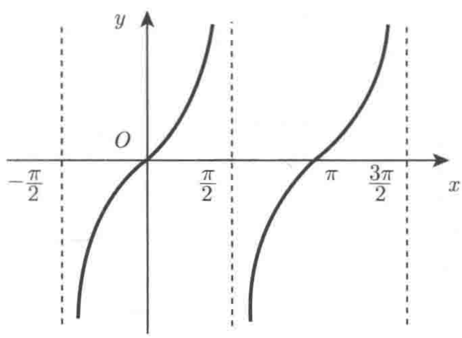

图 1.1.16

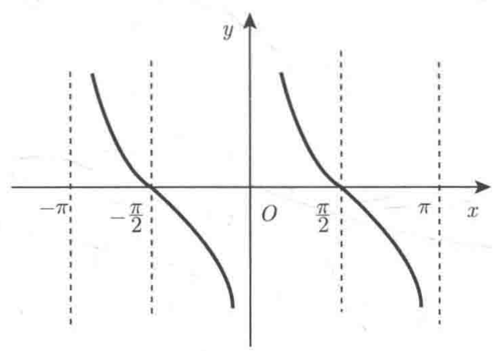

图 1.1.17

6. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$, $|x|\leqslant 1$.

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数, 如图 1.1.18 所示.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$, $|x|\leqslant 1$.

$y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数, 如图 1.1.19 所示.

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

$y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数, $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 为其水平渐近线, 如图 1.1.20 所示.