国家开放大学
THE OPEN UNIVERSITY OF CHINA

YINGYONG GAILÜ TONGJI

应用概率统计

（第2版）

陶 剑 主编

中央广播电视大学出版社

国家开放大学
THE OPEN UNIVERSITY OF CHINA

应用概率统计

（第2版）

陶　剑　主编

中央广播电视大学出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

应用概率统计/陶剑主编. —2 版. —北京：中央广播电视大学出版社，2016. 1

ISBN 978 -7 -304 -07638 -2

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①陶… Ⅲ. ①概率统计—开放大学—教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 318036 号

应用概率统计（第 2 版）

YINGYONG GAILÜ TONGJI（DI 2 BAN）

陶　剑　主编

出版·发行：中央广播电视大学出版社

电话：营销中心 010 -66490011　　总编室 010 -68182524

网址：http://www.crtvup.com.cn

地址：北京市海淀区西四环中路 45 号　　**邮编**：100039

经销：新华书店北京发行所

策划编辑：安　薇　　**版式设计**：赵　洋

责任编辑：王国华　　**责任校对**：张　娜

责任印制：赵连生

印刷：北京云浩印刷有限责任公司　　**印数**：0001 ~ 1000

版本：2016 年 1 月第 2 版　　2016 年 1 月第 1 次印刷

开本：787mm × 1092mm　1/16　　**印张**：22.25　　**字数**：497 千字

书号：ISBN 978 -7 -304 -07638 -2

定价：32.00 元

第二版前言

应用概率统计是研究随机现象的客观规律性的数学学科．一方面，它有自己独特的概念和方法，内容十分丰富；另一方面，它已充分渗透到很多相关领域．近年来，随着科学技术的迅猛发展，概率论与数理统计在经济、教育、遗传、医药、物理、化学、环境污染、政治及社会科学、心理学等方面均发挥着至关重要的作用．

按照国家开放大学数学与应用数学专业本科培养目标的要求，结合教育部面向21世纪理科类课程教学和教学内容改革的有关精神，配合“开放大学开展人才培养模式改革”的研究进行课程设计，我们编写了本教材．

按照“以学生为中心”的现代教学思想，针对开放教育学员以业余学习为主的学习形式和学习对象知识基础参差不齐的多元化特点，本教材在符合教学大纲要求的前提下，不过分追求深度，而是把着眼点放在激发学员的自学兴趣上，最终达到以学员自主学习为主的目标．

本教材共分十章．在教材内容的选编方面，我们力求明确目的、突出重点、讲清难点，同时兼顾学员的特点，注重启发性，由浅入深、循序渐进．各章在一开始就明确地提出了学习目标．同时，在选材和叙述上，尽量做到从实际背景出发，注重应用，学员通过选材不难发现本门课程与生活实际的密切联系．每节后配有对应练习，章后配有习题．此外，为方便学员自学，各章后均有本章小结，概述本章的主要内容．

为了让学员更好地理解和消化所学基本内容，各章均配有学习指导．在学习指导中，首先指出了重点、难点和疑难分析，然后给出典型例题，再对应给出练习题，最后配有自测题，便于学员自测自检，积小胜为大胜．

参加本教材编写的有东北师范大学陶剑教授、国家开放大学朱晓鸽副教授、吉林广播电视大学于敬莲副教授．在各自完成撰写任务后，由陶剑负责统一定稿．本教材从大纲审定到内容的编选，都得到了北京师范大学杨文礼教授、北京航空航天大学李卫国教授、北京大学耿直教授与首都师范大学姚芳博士的帮助和指导．他们为编者提出了很多宝贵的意见，使本教材增色不少．在本教材编写过程中，东北师范大学数学与统计学院、国家开放大学教育学

院给予了大力支持．中央广播电视大学出版社为本教材的出版付出了辛勤的劳动．此外，本教材编写过程中，还参考了大量国内外的优秀教材和文献资料，特别是在习题选配方面，吸取了它们中的精华部分．谨在此一并致谢．

由于我们水平有限，书中的纰漏和不足之处一定不少，恳请读者、专家批评指正．

编　者

2015年10月

第一版前言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科．一方面，它有自己独特的概念和方法，内容十分丰富；另一方面，它已充分渗透到很多相关领域．近年来，随着科学技术的迅猛发展，概率论与数理统计在经济、教育、遗传、医药、物理、化学、环境污染、政治及社会科学、心理学等方面均发挥着至关重要的作用．

按照中央广播电视大学数学与应用数学专业本科培养目标的要求，结合教育部面向21世纪理科类课程教学和教学内容改革的有关精神，配合“广播电视大学开展人才培养模式改革”的研究进行课程设计，我们编写了本教材．

按照“以学生为中心”的现代教学思想，针对以电大学员业余学习为主的学习形式和学习对象、知识基础参差不齐的特点，本教材的编写在符合教学大纲要求的前提下，不过分追求深度，而是把着眼点放在激发学员的自学兴趣，最终达到以学员自主学习的目标．

本教材共分10章．在教材内容的选编方面，我们力求明确目的，突出重点，讲清难点，同时兼顾学生的特点，注重启发性，由浅入深，循序渐进．各章在一开始就明确地提出了学习目标．同时，在选材和叙述上尽量做到从实际背景出发，注重应用，学员通过选材不难发现本门课程与生活实际的密切联系．每节后均配有练习题，章后配有习题．此外，为方便学员自学，各章后均有总结，概述了本章的主要内容．

为了让学员更好地理解和消化所学的基本内容，各章均配有学习指导．在指导中，首先指出了重点、难点，然后给出典型例题，再对应给出练习题，最后配有自测题，便于学员自测自检，积小胜为大胜．

本书的写作分工如下：第1章至第5章由陶剑执笔，第6章至第8章由朱晓鸽执笔，第9章至第10章由于敌莲执笔；全书由陶剑统稿．本书从大纲审定到教材内容的编选，都得到了北京师范大学杨文礼教授、北京航空航天大学李卫国教授、北京大学耿直教授与首都师范大学姚芳博士的帮助与指导，他们为编者提出了很多宝贵的意见，使本书增色不少．在本书的编写过程中，东北师范大学数学系、中央广播电视大学师范部给予了大力支持．中央广

播电视大学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动．此外，本书编写过程中，参考了大量国内优秀教材和文献资料，特别是在习题选配方面，吸取了其中不少精华．谨在此一并致谢．

由于我们水平有限，书中的缺点、错误一定不少，恳请读者、专家批评指正．

编　者

目　　录

第1章　随机事件与概率

相关资料

赌博与概率论

《重要的艺术》一书的作者、意大利医生兼数学家卡当（Cardano），据说曾大量地进行过赌博游戏．他在赌博时研究不输的方法，实际上这正是概率论的萌芽．

据说卡当曾参加过这样的一种赌法：把两颗骰子掷出去，以每个骰子朝上的点数之和作为赌的内容．已知骰子的六个面上分别为1～6点，那么，赌注下在多少点上最有利？

两个骰子朝上的面共有36种可能，点数之和分别可为2～12，共11种．从表1.1中可知，7是最容易出现的和数，它出现的概率是6/36 = 1/6.

表1.1

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

卡当曾预言说押7最好．现在看来，这个想法是很简单的，可是在卡当的时代应该说是很杰出的思想方法．

在那个时代，虽然概率论的萌芽有些进展，但还没有出现真正的概率论．

公元1651年夏天，当时盛誉欧洲、号称“神童”的数学家巴斯卡（Pascal），在旅途中偶然遇到了赌徒德·美尔（De Mere）．德·美尔是一个贵族公子哥儿，他对巴斯卡大谈“赌经”，以消磨旅途时光．德·美尔还向巴斯卡请教了一个亲身所遇的“分赌金”问题．

问题是这样的：一次，德·美尔和赌友掷骰子，各押赌注32个金币，德·美尔若先掷出三次“6点”，或赌友先掷出三次“4点”，就算赢了对方．赌博进行了一段时间，德·美

尔已掷出了两次“6点”，赌友也掷出了一次“4点”．这时，德·美尔奉命要立即去晋见国王，赌博只好中断．那么两人应该怎么分这64个金币的赌金呢？

赌友说，德·美尔要再掷一次“6点”才算赢，而他自己若能掷出两次“4点”也就赢了．这样，自己所得应该是德·美尔的一半，即得64个金币的1/3，而德·美尔得2/3．德·美尔争辩说，即使下一次赌友掷出了“4点”，两人也是秋色平分，各自收回32个金币，何况那一次自己还有一半的可能得16个金币呢？所以他主张自己应得全部赌金的3/4，赌友只能得1/4．

公说公有理，婆说婆有理．德·美尔的问题居然把巴斯卡给难住了．他为此苦苦想了3年，终于在1654年悟出了一点儿道理．于是他写信把自己的想法告诉他的好友——当时号称数坛“怪杰”的费马（Fermat），两人对此展开热烈的讨论．后来，荷兰数学家惠更斯（Huygens）也加入了他们的探讨行列．最后，他们一致认为，德·美尔的分法是对的！惠更斯还把他们讨论的结果载入1657年出版的《论赌博中的推理》一书中，这本书至今被公认为概率论的第一部著述．

究竟哪种分法是对的？巴斯卡和费马他们又是怎么想的？这一连串的疑团要等今后大家学到更多概率论知识的时候，才能一一解开．

事实上，按卡当的想法，在中断赌博之后所设想的4局比赛中，每局都有胜、负两种可能，总共有$2\times2\times2\times2=16$种可能．其中只有最后一种，即当第一个赌徒4局全负时，第二个赌徒才可能赢，而其余15种情况都是输．因此，他们的赌金分配比例应当是15∶1．

赌金风波终于以一个新的数学分支——概率论登上历史舞台宣告平息．

概率论从赌博的游戏开始，完全是一种新的数学方法，现在它在许多领域发挥着越来越大、十分重要的作用．

学习目标

（1）了解随机事件的概念，掌握事件间的关系与运算．

（2）了解事件频率的稳定性，理解概率的含义，掌握概率的基本性质和加法定理，会计算简单的古典概率．

（3）理解条件概率的概念和事件独立性概念，掌握乘法定理，会利用全概率公式和贝叶斯公式．

（4）掌握伯努利概型和二项概率的计算方法．

导学

本章介绍一种新的但普遍存在的现象——随机现象．在大量随机现象中存在统计规律性，概率论便是研究随机现象的一门数学学科．

“事件”与“概率”是概率论中最基本的两个概念．为了使读者清楚地理解事件与概率的直观意义，我们将采用由具体到抽象、由简单到复杂、由特殊到一般的方式介绍概率的计算方法，并从中归纳出事件与概率的本质特征，为读者深入学习奠定基础．

独立性是概率论中最重要的概念之一．它是概率论中特有的概念．在独立性假定下得到的结果构成了经典概率论的主要内容．

事件的运算与概率的计算是本章的基本内容，也是学习以后各章的必要基础，务必牢固掌握．正确地进行概率计算的前提和常用的技巧是恰当地将复杂的事件“拆分”成一些较简单的事件的关系式，而后运用加法公式与乘法公式即可算出结果．

鉴于本章的内容对于中学数学教学有直接的指导作用，希望读者多做练习，熟练掌握各种解题技巧．

思考

(1) 概率与条件概率有何区别？它们又有何联系？

(2) 如何理解事件的独立与互斥？

(3) 事件的相互独立与两两独立关系如何？

100 张电影票中，有 1 张甲票、99 张乙票．从这 100 张电影票中任取一张，众所周知，最可能取得乙票．取得甲票的可能性不能说没有，却是很小的．投掷一枚硬币，正面朝上的可能与反面朝上的可能应该说是一样的．由此，人们常常用投掷硬币的办法来决定一场球赛中哪个队先发球．诸如此类的事情，在实践中还会遇到许多．我们必须对每个事件讨论其发生的可能性大小并进行比较．

概率就是事件发生可能性大小的一种数值量度．在本章中，我们将定义事件及事件的概率，并讨论相应的性质，重点放在如何计算一个事件的概率上．

1.1 样本空间与随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

人们在实践活动中所遇到的现象一般可分为两类：

一类现象是，在一定的条件下，必然会出现某种确定的结果．例如，在标准大气压下，水加热到 100 ℃时沸腾，是确定会发生的现象．又如，向上抛一枚硬币，由于受到地心引力的作用，硬币上升到某一高度后必定会下落．我们把这类现象称为确定性现象（或必然现象）．

另一类现象则是，在一定的条件下，可能会出现各种不同的结果，也就是说，在完全相

同的条件下，进行一系列观测或试验，却未必出现相同的结果．例如，抛掷一枚硬币，当硬币落在地面上时，可能是正面朝上，也可能是反面朝上，在硬币落地之前我们不能预知究竟哪一面朝上．我们把这类现象称为随机现象（或偶然现象）．

我们生活的世界充满着不确定性．人们虽然能够精确地预卜尚未发生的确定现象的结果，却难以预卜尚未发生的随机现象的结果．人类就生活在这种随机现象的海洋里．

从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是偶然的，似乎是不可捉摸的，其实不然．人们通过实践观察到并且证明了，在相同的条件下，多次观察某个随机现象，立即可以发现：在大量的偶然之中存在必然的规律．例如，多次重复抛一枚硬币，正面朝上和反面朝上的次数几乎相等；对某个靶进行多次射击，虽然各次弹着点不完全相同，但这些点却按一定的规律分布；等等．我们把随机现象的这种规律性称为统计规律性．

应用概率统计就是研究大量随机现象统计规律性的一门数学学科．

为了研究随机现象的统计规律性，我们把各种科学试验和对某一事物的观测统称为试验．如果试验具有下述特点：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现；

则称这种试验为**随机试验**，简称试验．通常用字母 E 或 E_1，E_2，…表示随机试验．

随机试验 E 的所有可能基本结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间中的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**．

试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称事件．在每次试验中，当且仅当给定子集中的一个样本点出现时，就称这一事件发生．从直观上讲，所谓随机事件，是指在一次试验中可以发生（出现），也可以不发生（不出现）的事件．

由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**．由若干个基本事件复合而成的事件称为**复合事件**．

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**．空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也是 S 的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**．

例 1.1.1 试验 E：在一个口袋中装有白、黑两个球，从中随机取一球，记下它的颜色．在这个试验中，样本空间 S 由下列两个基本事件构成：

$$\omega_1 \triangleq \{\text{取得白球}\},\quad \omega_2 \triangleq \{\text{取得黑球}\},$$

$$S = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 1.1.2 试验 E：在一个口袋中装有白、黑两个球，从中随机取一球，记下它的颜色．然后放回，再取一球，又记下它的颜色．在这个试验中，要考虑取球的顺序．为简单起见，我们把“第一次取得白球，第二次取得白球”这一事件记为｛白、白｝，并依此类推．可知，样本空间 S 由下列四个基本事件构成：

$$\omega_1 \triangleq \{白,白\},\quad \omega_2 \triangleq \{白,黑\},\quad \omega_3 \triangleq \{黑,白\},\quad \omega_4 \triangleq \{黑,黑\},$$

$$S = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$

注 由于取球的顺序应予以考虑，所以事件 {黑，白} 与事件 {白，黑} 是两个不同的事件．

例 1.1.3 试验 E：观察某电话交换台在某一段时间内接到的呼唤次数．这时，样本空间由下面可列个基本事件所组成：

$$\omega_i \triangleq \{接到\ i\ 次呼唤\},\quad i = 0,1,2,\cdots,$$

$$S = \{\omega_0,\omega_1,\cdots\}.$$

在这个试验中，“位于该段时间内电话交换台接到的呼唤次数不超过 8 次”是一个复合事件．

在以上三个例子中，样本空间中元素的个数是有限个或可列个．实际上，还有一些随机试验，它所对应的样本空间中的元素个数不是可列的．

例 1.1.4 观测某试验小区小麦的总产，这时样本空间由下面的基本事件组成：

$$\omega_\alpha \triangleq \{总产为\ \alpha\ 千克, 0 \leqslant \alpha < \infty\},$$

$$S = \{\omega_\alpha | 0 \leqslant \alpha < \infty\}.$$

在这个试验中，“某试验小区小麦的总产超过 800 千克”是复合事件．

在今后的讨论中，经常认为，样本空间是预先给定的．如何用一个恰当的样本空间去描述某个随机试验，很值得研究．但是，在概率论的理论研究中，通常把样本空间当作给定的．这种必要的抽象有助于人们把握问题的实质，并能将结果广泛地应用．例 1.1.1 给出的样本空间只包含两个基本事件，它可以描述许多随机试验．例如，它可以作为掷硬币出现正、反面的模型，可以作为射击试验中“命中”与“脱靶”的模型，可以作为流行病学研究中“患病”与“不患病”的模型，还可以作为气象学中“下雨”与“不下雨”的模型，等等．正确地抽象是培养数学思维能力的一种主要方法．

1.1.2 事件的关系与运算

在一个样本空间中，显然可以定义不止一个事件．这些事件之间有何关系？一些较复杂的事件如何能用一些较简单的事件的关系式表示？所有这些问题的解决，将对计算事件的概率起重要的作用．

下面，我们讨论事件之间的关系及运算，主要讲两个事件 A 与 B 之间的关系（参见图 1.1）．

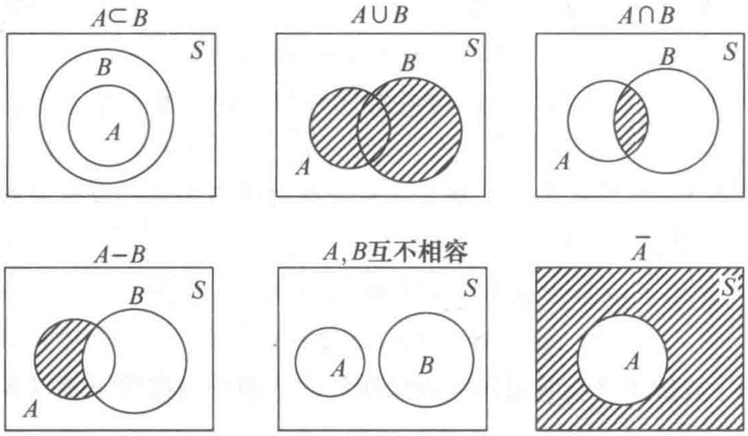

图 1.1

$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\overline{A}$ 分别为图中阴影部分

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称 A 是 B 的子事件，记为 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

2. 事件的和（或并）

事件 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

3. 事件的积（或交）

事件 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生，$A\cap B$ 也记作 AB.

4. 事件的差

事件 $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A-B$ 发生，$A-B$ 也记作 $A\cap\overline{B}$.

5. 互不相容事件

若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容或互斥的，即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

6. 对立事件

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**或称 A 与 B 为**对立事件**，即每次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个发生且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然

$$\overline{A}=S-A.$$

7. 事件的运算律

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.