



理工社®

一切伟大的思想和行动，
都有一个
微不足道的开始！

2017
升级版

考研数学

必做 986 题

主编 杨超 方浩 姜晓干

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

本书附赠
重点题型讲解视频
扫码即可观看



考 研 数 学

必 做 986 题

主 编 杨 超 方 浩 姜 晓 千

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学必做 986 题 / 杨超, 方浩, 姜晓千主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2016.2

ISBN 978-7-5682-1913-6

I. ①考… II. ①杨… ②方… ③姜… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 039905 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京盛彩捷印刷有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 31.5

字 数 / 610 千字

版 次 / 2016 年 2 月第 1 版 2016 年 2 月第 1 次印刷

定 价 / 59.80 元

责任编辑 / 王玲玲

文案编辑 / 王玲玲

责任校对 / 孟祥敬

责任印制 / 边心超

前 言

在考研数学的备考过程中,一般分为基础阶段、强化阶段和冲刺阶段。每个阶段选择不同的教材复习,做不同难度的习题是很重要的,可以起到提高效率、建立信心、事半功倍的作用。

基础阶段(3—5月):考生一般使用同济大学出版社出版的《高等数学》,复习基本概念、基本原理、公式,并且做课后习题。课后习题有些不属于考纲内容,例如用极限的定义的证明题、近似计算等;有些课后题又过于简单。

强化阶段(6—10月):把握整体,形成体系,总结题型、方法、重点、难点。这个阶段应选择一本较好的习题集进行系统训练。要逐步学会灵活运用“三基”来解决问题,加强综合题的练习,以提高利用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书就是为了帮助考生解决在基础阶段和强化阶段所遇到的问题而编写的。全书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分,后两部分由姜晓千和方浩老师编写,每章节的内容又分基础题和强化题,这是本书的一大亮点。本书并没有只把习题堆砌在一起,让学生分不清难度的差异,盲目乱做一番,效率不高,影响复习进度。本书的第二大亮点在于题本身的质量:全面,典型,不重不落,此外,还有部分前瞻性的试题,之前只是在面授课堂中出现,这是我们整个团队多年教学智慧的汇总。

最后给各位广大考生在使用此书时提出“六忌”(历届考生的经验教训):

- (1) 只看答案,不动笔练习。
- (2) 只背方法,不重理解
- (3) 只做难题,不重基础。
- (4) 做题翻书,不牢记公式
- (5) 埋头做题,不互相交流。
- (6) 突击复习,不持之以恒

路漫漫其修远兮,吾将上下而求索,我们团队与广大考生一起努力与进步,预祝广大考生 2017 年金榜题名。

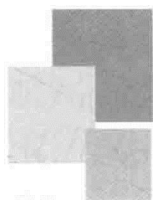
杨超

2016.1.27 北京

目 录

第一部分 高等数学	(1)
第一章 函数	(2)
第二章 极限与连续	(8)
第三章 微分法	(43)
第四章 微分学的应用	(75)
第五章 向量代数与空间解析几何(数学一)	(101)
第六章 一元函数积分法与重积分	(109)
第七章 曲线积分与曲面积分(数学一)	(144)
第八章 积分学的应用	(170)
第九章 微积分证明题	(183)
第十章 无穷级数	(219)
第十一章 常微分方程	(245)
第二部分 线性代数	(271)
第一章 行列式	(272)
第二章 矩阵	(280)
第三章 向量	(300)
第四章 线性方程	(315)
第五章 特征值与特征向量	(336)
第六章 二次型	(361)

第三部分 概率论与数理统计.....	(379)
第一章 随机事件与概率.....	(380)
第二章 随机变量及其概率分布.....	(394)
第三章 多维随机变量及其分布.....	(417)
第四章 随机变量的数字特征.....	(447)
第五章 大数定律与中心极限定理.....	(472)
第六章 数理统计的基本概念.....	(477)
第七章 参数估计与假设检验.....	(487)



第一部分

高等数学





第一章 函数

【百日筑基篇】

1. 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} g(x+1) = x^2 + x + 1$, 试求 $f(g(x)), g(f(x)), f(f(g(x))), f(g(f(x)))$.

3. 设 $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x$, 求 $f(x)$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x$, 求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

5. 设 $f(x) = e^{\arcsin x}$, $f(\varphi(x)) = x - 1$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式和定义域.

6. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) (a > 0)$.

求证: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

7. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0);$$

$$(2) y = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0; \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$$

8. 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 和 $f(x)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调增加函数. 若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 试证明必有

$$\varphi(\varphi(x)) \leq f(f(x)) \leq \psi(\psi(x)).$$

9. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 且对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

试证明: $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

【高分进阶篇】

1. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数且 $|a| \neq |b|$, 求函数 $f(x)$ 的解析式并证明它是奇函数.

2. $f(x) = \frac{\sin x}{x} e^{\sin x}, x \neq 0$ 是

()

(A) 周期函数

(B) 奇函数

(C) 单调函数

(D) 有界函数

3. $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} \quad (-\infty < x < +\infty)$ 是

()

(A) 有界函数

(B) 单调函数

(C) 周期函数

(D) 偶函数

4. 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 且它们可以构成复合函数 $f(f(x)), g(f(x)), f(g(x)), g(g(x))$, 则其中为奇函数的是

()

(A) $f(f(x))$

(B) $g(f(x))$

(C) $f(g(x))$

(D) $g(g(x))$

5. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = x - [x]$ 是

()

(A) 无界函数

(B) 周期为 1 的周期函数

(C) 单调函数

(D) 偶函数

6. 设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x) = \underbrace{f(f \cdots (f(x)))}_{n \text{ 次复合}}$.

7. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g(f(x)) =$ ()

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$





【百日筑基篇答案】

1.【证】设 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的任一函数, 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 则 $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, 而 $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

2.【解】(1) 令 $x+1 = u$, 则 $g(u) = (u-1)^2 + (u-1) + 1 = u^2 - u + 1$,
故 $g(x) = x^2 - x + 1$.

由于对一切 x , 有 $x^2 - x + 1 > 0$, 所以

$$f(g(x)) = g(x) = x^2 - x + 1.$$

$$(2) g(f(x)) = f^2(x) - f(x) + 1 = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(3) 由于 $f(g(x)) = x^2 - x + 1 > 0$,

所以 $f(f(g(x))) = f(g(x)) = x^2 - x + 1$.

(4) 由于 $g(f(x)) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

所以

$$f(g(f(x))) = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

3.【解】设 $t = \frac{x-1}{x}$, 得 $x = \frac{1}{1-t}$, 代入原式得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f(t) = \frac{2}{1-t},$$

$$\text{即} \quad f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x}, \quad (1)$$

再设 $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{1-x}$, 可得 $x = \frac{1}{1-n}$, 代入上式得

$$f\left(\frac{1}{1-n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{2(n-1)}{n},$$

$$\text{即} \quad f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2(x-1)}{x},$$

$$\text{即} \quad f\left(\frac{1}{1-x}\right) = -f\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{2(x-1)}{x}. \quad (2)$$

将②式代入①式得

$$f(x) - f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x(1-x)}. \quad (3)$$

由已知式和③式得 $f(x) = x + \frac{x^2 - x + 1}{x(1-x)}$.



$$4. 【解】 f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

5. 【解】 由 $f(x) = e^{\arcsin x}$ 得 $f(\varphi(x)) = e^{\arcsin \varphi(x)}$,

又 $f(\varphi(x)) = x - 1$,

所以 $e^{\arcsin \varphi(x)} = x - 1$.

即

$$\arcsin \varphi(x) = \ln(x - 1), \varphi(x) = \sin[\ln(x - 1)],$$

因 $-\frac{\pi}{2} \leq \ln(x - 1) \leq \frac{\pi}{2}$, 且 $x - 1 > 0$, 解得

$\varphi(x)$ 的定义域为 $[1 + e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}} + 1]$.

6. 【证】 $f(x + y) + f(x - y)$

$$= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-x+y})$$

$$= \frac{1}{2}a^x(a^y + a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^y + a^{-y})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})$$

$$= 2f(x) \cdot f(y).$$

7. 【解】 (1) 由原式解出 $x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. 因 $x > 0$, 故取 $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$. 反函数为

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(2) y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

8. 【证】 设 x_0 为三个函数公共定义域内的任一点, 则有 $\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0)$. 由题设知 $f(\varphi(x_0)) \leq f(f(x_0)), \varphi(\varphi(x_0)) \leq f(\varphi(x_0))$, 于是 $\varphi(\varphi(x_0)) \leq f(f(x_0))$. 同理可证 $f(f(x_0)) \leq \psi(\psi(x_0))$. 由 x_0 的任意性推得结论成立.

9. 【证】 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1,$$

而 $f(x_1) - f(x_2) \leq |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$,

所以 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$.

即 $F(x_1) < F(x_2)$, 故 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.



【高分进阶篇答案】

1.【解】令 $t = \frac{1}{x}$, 则已知方程变为 $af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct$.

与此等价, 可以表示成 $af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx$, 联立, 得方程组

$$\begin{cases} af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}, & \text{①} \\ bf(x) + af\left(\frac{1}{x}\right) = cx, & \text{②} \end{cases}$$

将 ① 式两边乘 a , ② 式两边乘 b , 并相减, 得

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ca}{x} - bcx, f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(\frac{a}{x} - bx \right).$$

由于 $\frac{a}{x}, bx$ 是奇函数, 故函数 $f(x)$ 是奇函数.

2.【解】应选(D).

方法一: 排除法.

(1) 虽然 $\sin x$ 是周期函数, 但 $\frac{\sin x}{x}$ 不是周期函数, 所以 $f(x)$ 不是周期函数, 排除选项(A);

(2) 因为 $f(-x) = \frac{-\sin x}{-x} e^{-\sin x} = \frac{\sin x}{x} e^{-\sin x} \neq -f(x)$, 所以 $f(x)$ 不是奇函数, 排除选项(B);

(3) 当 $x = k\pi \neq 0$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \neq k\pi$ 时, $f(x) \neq 0$, 故 $f(x)$ 不是单调函数, 排除选项(C);

由排除法知选(D).

方法二: 直接验证 $f(x)$ 是有界函数.

因为 $f(x)$ 为初等函数, 所以要验证 $f(x)$ 为有界函数, 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 均存在.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} e^{\sin x} = 1$.

且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} e^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot (\sin x \cdot e^{\sin x}) = 0$,

所以 $f(x)$ 为有界函数, 故选(D).

3.【解】应选(D).

4.【解】应选(A).

5.【解】应选(B).

$y = x - [x]$ 的图像如图 1-1-1 所示.

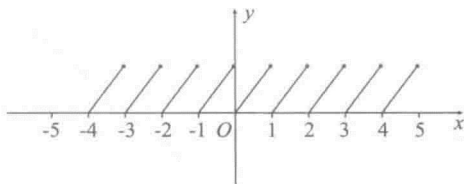


图 1-1-1

6.【解】 $f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

根据 $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 的特点,可考虑用数学归纳法推算. 设

$$f_k(x) = \underbrace{f(f \cdots (f(x)))}_{k \text{ 次复合}} = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则 $f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

由数学归纳法知,对任何自然数 n ,都有 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$

7.【解】 应选(D).

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ 2+f(x), & f(x) > 0. \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x \leq 0$, 故

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-(-x), & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0. \end{cases}$$

所以选(D).





第二章 极限与连续

【百日筑基篇】

1. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ()

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

2. 对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$, 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()

- (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

3. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\{y_n\}$ 为任意数列, 能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$? 举出适当的例子.

4. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ()

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x^2} - (ax^2 + bx + c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 其中 a, b, c 是常数, 则 ()

- (A) $a = 1, b = 2, c = 0$ (B) $a = c = 1, b = 0$
(C) $a = c = 2, b = 0$ (D) $a > b = 1, c = 0$

6. 请讨论以下问题:

- (1) 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 试问 $\lim(f + g), \lim(f \cdot g)$ 一定存在吗?
(2) 若 $\lim f$ 和 $\lim g$ 均不存在, 讨论以上同样的问题.

7. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

8. 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}$.

9. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

10. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 - (1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

12. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$.

13. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

14. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n$.

15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln \cos x}$.

16. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0)$.

17. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+\alpha x} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+\beta x} - 1}{x} \right)$.

18. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$.

19. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

20. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

21. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

22. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$.

23. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\ln(1+2x^3)}$.

24. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

25. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

26. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$.

27. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4}$.

28. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3}$.

29. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t^2) dt$ 是 $(1-\cos x)^{\frac{1}{3}}$ 的几阶无穷小?

30. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$.

31. 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^x \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 按从低阶到高阶的顺序排列.

32. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.





33. 设 $A \geq 0, B \geq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A^n + B^n}$.

34. 设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots, x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}, \dots$.
求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

35. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a) - f(x)]$.

36. 设 $f(1) = 1, f'(1) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 1}{x^2 - 1}$.

37. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在.
求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

38. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

39. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}}$.

40. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{2+x} dx$.

41. 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

42. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^5 + 7x^4 + 2)^a - x] = b \neq 0$, 求常数 a, b .

43. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a, b .

44. 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$ ()

(A) 0

(B) 1

(C) $-\frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

45. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}, & x < 0, \\ \ln(1+x) + \sin \frac{1}{x^2 - 1}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的间断点, 并指出其

类型.

46. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性、可微性及导函数的

连续性.

47. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$, 且有 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为非零常数, 则 ()

(A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导

(B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = a$

(C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = b$

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=ab$

48. 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}$, 则 ()

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

49. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0, \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

【高分进阶篇】

1. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为 ()

(A) 2

(B) 0

(C) ∞

(D) 不存在但不是 ∞

2. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 ()

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

3. 设 $a > 0, x_1 > 0$, 且定义 $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right)$ ($n=1, 2, \dots$). 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

存在并求其值.

4. 设 $f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0)=0, f'(0)=1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\arcsin x}} =$ ()

(A) e^{-1}

(B) e

(C) e^2

(D) e^3

5. 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt, g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()

(A) 低阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 同阶但非等价的无穷小

6. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \infty$, 则下列命题中不正确的是 ()

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = \infty$

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = +\infty$

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$

是

