应用数学

葛亚平 张燕艳 陈文亚 编

高等教育出版社

全国高职高专教育规划教材

YINGYONG SHUXUE

应用数学

葛亚平 张燕艳 陈文亚 编

内容提要

本书是全国高职高专教育规划教材，它吸取了全国高职高专院校应用数学的教学改革成果，体现了以应用为目标，以必需、够用为度的原则。

全书内容分为必修和选修两大模块，包括函数、极限与连续，一元函数导数与微分，不定积分与定积分，常微分方程，向量代数与空间解析几何，概率初步，运筹与优化，离散数学初步共八章内容，其中第一章至第三章为必修模块，第四章至第八章为选修模块。内容的设置紧紧围绕各专业的人才培养目标，按照各专业职业岗位需要的基本数学知识进行安排。

本书采用"案例驱动式"编写模式，更多地利用直观的图形、通俗的生活化语言降低学生学习的难度，对涉及江苏省专转本高等数学考试中考点知识的，配备了近三年的考试真题作为例题或习题，以供基础较好的学生参考和练习。与本书配套的辅助教材有《应用数学练习册》。

本书可作为高职高专各专业的应用数学教材，也可作为其他人员自修或培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学／葛亚平，张燕艳，陈文亚编. --北京：高等教育出版社，2014.10

ISBN 978-7-04-041070-9

Ⅰ.①应… Ⅱ.①葛… ②张… ③陈… Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 204460 号

策划编辑 边晓娜　责任编辑 王 冰　封面设计 王 洋　版式设计 童 丹
插图绘制 黄建英　责任校对 张小镝　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京天时彩色印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 13.5
字　　数 330 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014 年 10 月第 1 版
印　　次 2014 年 10 月第 1 次印刷
定　　价 21.60 元

物 料 号 41070-00

前　言

在我国，高等职业技术教育是一类新型的教育类型，它培养的是初步掌握高新技术、面向生产、管理、服务第一线的应用型人才。这类人才对基础理论的要求是以应用为导向，以必需、够用为度。我们在这一指导思想下编写了本书。全书内容包括函数、极限与连续，一元函数导数与微分，不定积分与定积分，常微分方程，向量代数与空间解析几何，概率初步，运筹与优化，离散数学初步等。内容的设置紧紧围绕各专业的人才培养目标，按照各专业职业岗位需要的基本数学知识进行安排。在教材中突出了以下几方面的特色：

1. 突出学生的贯通能力

本书采用"案例驱动式"编写模式，无论是引例还是案例均以学生的专业知识或日常生活知识为背景，强调培养学生将数学知识专业化和将专业知识数学化的贯通能力，既注重了数学方法的训练，又明确指出了知识点的应用。

2. 突出教学内容对高职学生认知基础的适应性

教学内容和难度均考虑到高职学生数学基础薄弱，逻辑思维能力不强的现状，更多地利用直观的图形、通俗的生活化语言降低学生学习难度，提高内容的可读性，以适应高职教育的要求。

3. 突出与高职整体培养目标体系相适应

应用数学在高职整体教学体系中是一种文化基础课，更是一种基础"工具"课，鉴于此，教材的编写体系、课时安排等与不同专业的培养需要相适应，体现数学为专业服务的功能。

4. 突出"必需、够用"的特点

根据各专业的人才培养目标和职业岗位需要的基本数学知识，本书的第一章至第三章作为必修模块适用于各个专业，第四章至第八章作为选修模块，供各个专业选择。例如，对于机电系、船舶系、建筑系的学生，通常将第四章（常微分方程）和第五章（向量代数和空间解析几何）作为选修模块；对于软件工程系的学生，通常将第四章（常微分方程）和第八章（离散数学初步）作为选修模块；对于经贸系的学生，通常将第六章（概率初步）和第七章（运筹与优化）作为选修模块。

5. 突出教学资源的提高性

本书中对涉及江苏省专转本高等数学考试中考点知识的，均配备了近三年的考试真题作为例题或习题以供基础较好的学生参考和练习。

本书的出版得到了各位领导同仁的大力支持，在此一并表示感谢！

限于水平和时间，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以使本书不断完善。

编者

2014 年 6 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

微积分是应用数学的核心，而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具. 因此本章将在复习和深化函数的有关知识的基础上，着重讨论函数的极限，并通过极限引入函数的一种重要性态——连续性.

第一节　函数的概念及性质

一、一元函数的概念

在事物的变化过程中，往往会出现多个变量，这些变量不是彼此独立的，它们会相互影响和制约，一个量的变化会引起另一个量的变化.

引例 1　商家销售某种商品的价格为 7 万元/吨. 每销售一吨这种商品，政府要征税 0.5 万元. 那么该商家的销售量和扣除税费后的收入之间有什么联系？

商家的销售价格和政府的税率是取值不变的量，这样的量我们称为常量. 而该商品的销售量及商家的收入在销售过程中是变化的，这样的量称为变量. 当销售量在它可能的变化范围内取每一个值时，收入就会有一个被唯一确定的值与之相对应. 销售量与收入之间的这种对应关系就是函数关系.

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联，到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(1805—1859)抽象出了直至今日仍为人们易于接受的并且合理的函数概念.

定义 1　设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在非空数集 D 内每取一值时，变量 y 按照某种对应法则 f 有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，而数集

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

表示一个函数必须指明其对应法则和定义域. 当函数用表达式给出而未明确定义域时，规定使函数表达式有意义的自变量取值全体为其自然定义域. 而在实际问题中，除了要根据表达式本身来确定自变量的取值范围外，还应考虑变量的实际意义. 比如，经济函数中自变量的取值往往是非负的.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x}{2x-1}$；　　　　(2) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+3}$.

解　(1) 由分式的分母不能为 0 知，$2x-1\neq 0$，解得 $x\neq\dfrac{1}{2}$，即函数的定义域为

$$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right);$$

（2）由对数的真数大于零，偶次根式被开方式大于或等于零知，

$$\begin{cases}1-x>0,\\ x+3\geqslant 0.\end{cases}\quad 解得\ \begin{cases}x<1,\\ x\geqslant -3,\end{cases}$$

即定义域为$[-3,1)$.

练习 1 求函数 $y=\dfrac{1}{\cos\pi x}$的定义域.

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素. 当我们说两个函数相同时，是指它们有相同的定义域和对应法则.

练习 2 判断以下各对函数是否为同一函数.

（1）$f(x)=1$ 和 $g(t)=\sin^2 t+\cos^2 t$;

（2）$y=\dfrac{1}{x-1}$与 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

二、函数的表示法

函数的表示方法一般有表格法、图像法和解析法. 表格法是将自变量与函数值的对应关系列成表格的方法；图像法是用坐标平面上的图形来表示函数关系的方法；解析法是用数学表达式来表示函数的方法，它是最常用的一种函数表示方法.

已给函数 $y=f(x),x\in D$，坐标平面上的点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$就是其图形.

例 2 求引例 1 中的函数表达式.

解 设销售量为 x，收入为 y. 根据“收入 = 营业额 − 税费”知，

$$y=7x-0.5x,$$

即所求函数为 $y=6.5x$. 作为销售量的 x 不能为负数，故函数的定义域为$[0,+\infty)$.

例 3 某销售商规定，某产品销量在 10 件以内（包括 10 件）时按每件 50 元销售，超过 10 件时，超过部分按每件优惠 10 元销售. 试建立销售收入与销售量之间的函数关系.

解 设销售量为 x，销售收入为 y，则可建立以下函数表达式：

$$y=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ 50\times 10+40\times(x-10), & x>10,\end{cases}\quad x\in\mathbf{N},$$

即

$$y=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ 100+40x, & x>10,\end{cases}\quad x\in\mathbf{N}.$$

在定义域的不同部分用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**. 下面再来看几个分段函数的例子.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

是一个分段函数，定义为实数集 $\mathbf{R}$，值域为$[0,+\infty)$，如图 1.1 所示.

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$,如图1.2所示.

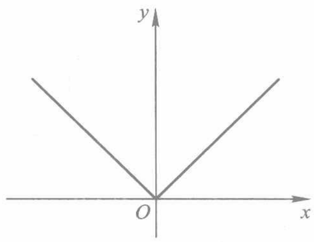

图 1.1

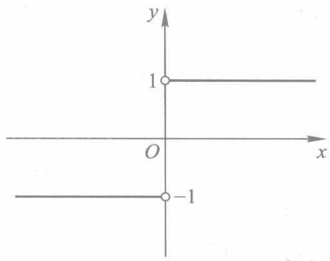

图 1.2

例 6 函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数,定义域是$[-1,+\infty)$.

注意 分段函数是其定义域上的一个函数,而不是多个函数.

三、函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任何 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$],则称 $y=f(x)$ 为 D 上的**偶函数**(或**奇函数**).

偶函数的图形关于 y 轴对称(图1.3),奇函数的图形关于原点对称(图1.4).

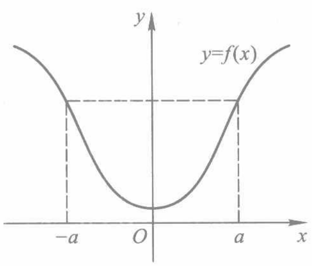

图 1.3

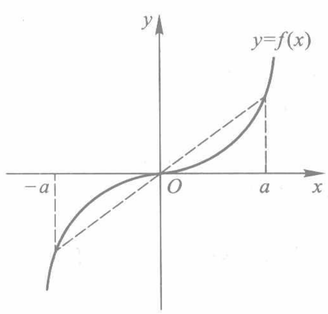

图 1.4

(2) 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在 $T\neq 0$,使任意的 $x\in D$,$x+T\in D$,满足

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为周期函数，如图 1.5 所示，T 叫函数的**周期**. 满足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T 如果存在，则称其为函数的**最小正周期**. 通常说函数 $y=f(x)$ 有周期 T，就是指的最小正周期.

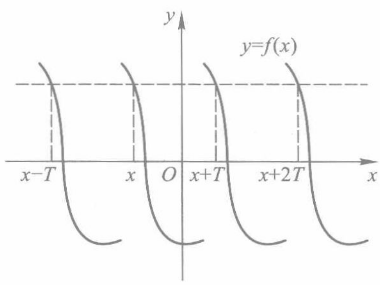

图 1.5

$\sin \alpha x$，$\cos \beta x$ 等函数都是常见的周期函数. 当函数 $y=f(x)$ 以 T 为周期时，函数 $y=f(ax)\,(a>0)$ 就有周期 $\dfrac{T}{a}$.

(3) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，区间 $I\subset D$. 对于任意的 $x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $y=f(x)$ 为该区间 I 上的**单调递增函数**(或**单调递减函数**). 单调递增函数与单调递减函数统称为**单调函数**.

从几何上看，单调递增函数的曲线是沿 x 轴的正向逐渐上升的(图 1.6)，而单调递减函数的曲线是沿 x 轴的正向逐渐下降的(图 1.7).

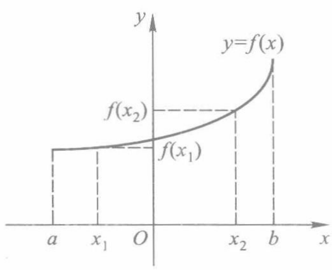

图 1.6

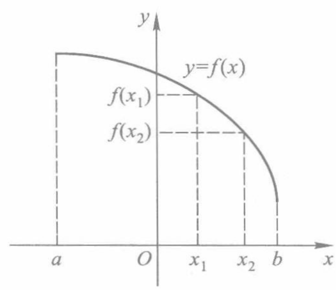

图 1.7

(4) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若存在一个正数 M，对于任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，那么称 $y=f(x)$ 为 I 上的**有界函数**，若不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 为 I 上的**无界函数**.

函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上被界定在两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上就是有界的，因为在 $\mathbf{R}$ 上 $|\sin x|\leqslant 1$. 当然函数 $y=f(x)$ 的有界性与区间 I 密切相关.

练习 3 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内的有界性.

四、基本初等函数

初等函数是经济数学研究的主要对象，它的基础是基本初等函数. 本节先介绍基本初等函数，然后再引入初等函数的概念.

下列五类函数统称为基本初等函数，它们是我们在中学阶段已经熟知的，在此只作简要复习.

1. 幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为任意实常数）

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域要依 μ 的具体取值来确定. 当 $\mu=1,2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{2},-1$ 时是最常用的幂函数（如图 1.8、图 1.9 所示）. 当 $\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 的图形必过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，并且在 $(0,+\infty)$ 内函数单调递增且无界.

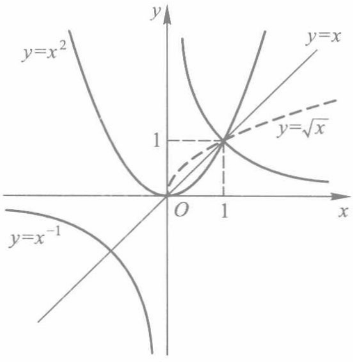

图 1.8

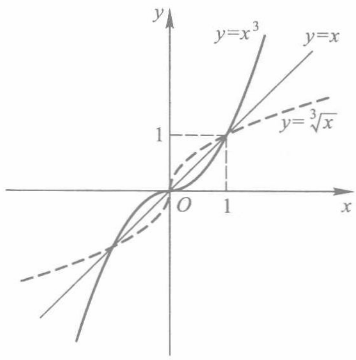

图 1.9

2. 指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）

指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$. 其图形在 x 轴上方，并通过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，函数在定义域内单调递增且无界，曲线向左无限接近 x 轴负半轴；当 $0<a<1$ 时，函数在定义域内单调递减且无界，曲线向右无限接近 x 轴正半轴，如图 1.10 所示. 函数 $y=a^{x}$ 与 $y=a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称. 常用的是指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}$，其中底数是无理数 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$.

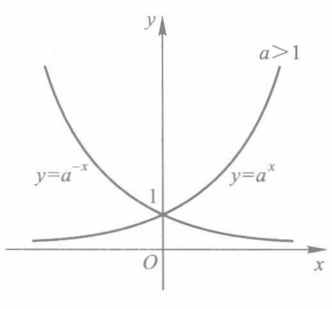

图 1.10

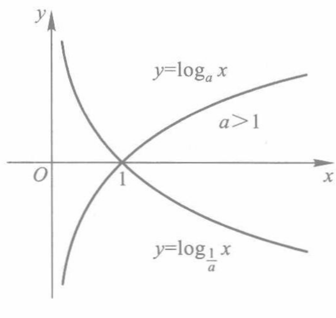

图 1.11

3. 对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1$）

对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1$）的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，图形在 y 轴右方，且通过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数在定义域内单调增加且无界，曲线向下无限接近 y 轴负半轴. 当 $0<a<1$ 时，函数在定义域内单调减少且无界，曲线向上无限接近 y 轴正半轴，如图 1.11 所示.

常用的是以 e 为底的对数函数,称为自然对数函数,记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,是以 2π 为周期的奇函数(图 1.12).

(2) 余弦函数 $y=\cos x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,是以 2π 为周期的偶函数(图 1.13).

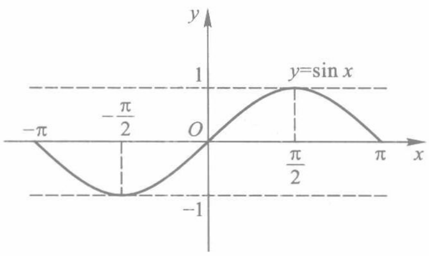

图 1.12

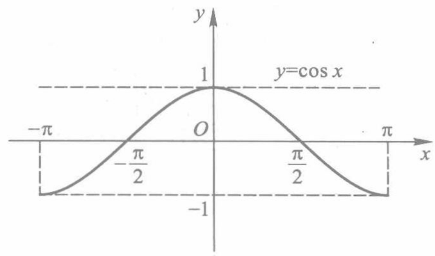

图 1.13

(3) 正切函数 $y=\tan x$,定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线,在定义域内无界,是以 π 为周期的奇函数(图 1.14).

(4) 余切函数 $y=\cot x$,定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,以 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线,在定义域内无界,是以 π 为周期的奇函数(图 1.15).

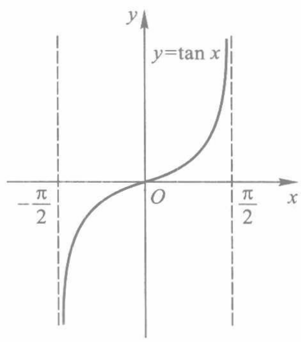

图 1.14

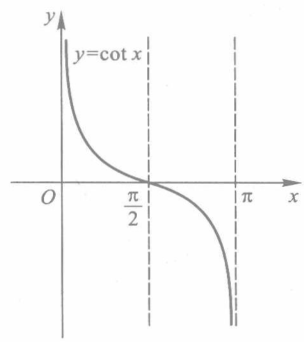

图 1.15

三角函数还包括正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$,在此不再详细介绍.

5. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,它是奇函数,在定义域内单调递增且有界(图 1.16).

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$,在定义域内单调递减且有界(图 1.17).

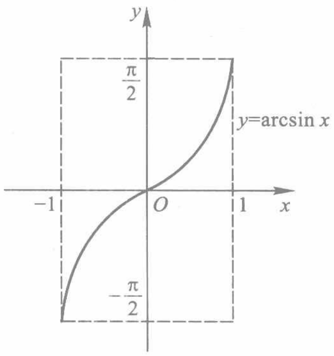

图 1.16

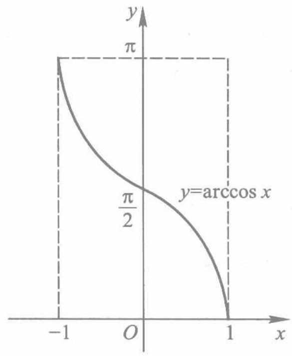

图 1.17

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,它是奇函数,在定义域内单调递增且有界,有两条渐近线 $y=\pm\frac{\pi}{2}$(图 1.18).

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域$(0,\pi)$,它在定义域内单调递减而且有界,有两条渐近线 $y=\pi$ 和 x 轴(图 1.19).

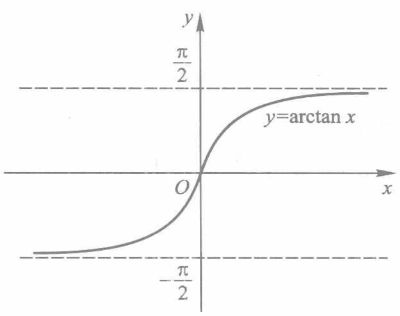

图 1.18

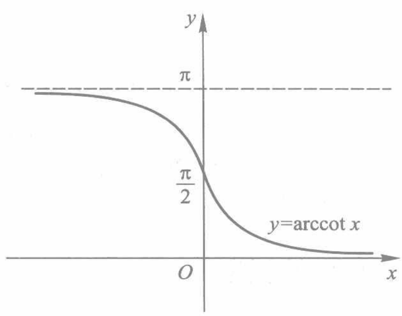

图 1.19

五、复合函数

引例 2 生产成本 C 可以看成产量 q 的函数,而产量 q 又是时间 t 的函数,那么成本 C 又可以作为时间 t 的函数.

成本 C 与时间 t 的这种函数关系叫做通过 q 构成的复合函数关系.

定义 2 设 $y=f(u)$是 u 的函数,$u=\varphi(x)$是 x 的函数.如果 $u=\varphi(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域的交集非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$为由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$构成的**复合函数**.

例如,由函数 $y=\cos u,u=\mathrm{e}^x$ 可构成复合函数 $y=\cos \mathrm{e}^x$.而函数 $y=\ln(x^2+1)$是由函数 $y=\ln u,u=1+x^2$ 复合而成的.

注意 不是任意两个函数都能构成复合函数.例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 便不能构成复合函数.

准确分解复合函数成一系列简单的函数是微积分计算的基础. 其基本方法是:从外往里顺序拆开,使拆开后的函数都是基本初等函数,或是由基本初等函数通过四则运算构成的简单函数.

例 7 函数 $y=(3+x)^5$ 是由哪些简单函数复合而成?

解 函数 $y=(3+x)^5$ 可以看作是由 $y=u^5, u=3+x$ 复合而成.

例 8 函数 $y=\tan^3 2x$ 是由哪些简单函数复合而成?

解 函数 $y=\tan^3 2x$ 可以看作是由 $y=u^3, u=\tan v, v=2x$ 复合而成.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成,并可用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如下列函数都是初等函数:

$$y=\sqrt{1-x^2}+\ln x^2, y=\frac{\tan x+3e^{\sqrt{x}}}{x^3}-5, y=\ln\cos x+\frac{x+1}{\arcsin 2x}.$$

本书所讨论的函数基本上都是初等函数. 但要注意,分段函数一般不是初等函数,因为分段函数往往不满足初等函数是由一个解析式所表示这一条件.

第二节 极限的概念

自然界中存在着各种各样的变量,这些变量之间往往不是孤立存在着,而是相互联系、相互制约的. 为了确定一个不能直接计算的量,可先计算它的近似值,而且是一连串越来越精确的近似值,分析这一连串近似值的变化趋势,根据变化趋势把这个量最终确定下来. 这个从量变到质变的过程,就是极限的思想方法.

一、数列的极限

1. 数列的定义

引例 1 一尺之棰,日取其半,万世不竭.

古人这句话的意思是,一根一尺长的木棍,每天将其截去一半,此过程可以无限进行下去. 将每天截取的量排列起来有:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots.$$

这一列数就是一个数列. 它有两个特点:按自然顺序排列;有无穷多个.

定义 1 按照自然顺序排列的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \cdots$$

称为无穷数列,简称**数列**,记为 $\{x_n\}$. 数列中每一个数称为数列的项, x_n 称为数列的通项.

例如:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \left\{\frac{1}{n}\right\}$;

(2) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots, \{2^n\}$;

(3) $3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}, \cdots, 4-\frac{1}{n}, \cdots, \left\{4-\frac{1}{n}\right\}$;

(4) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots, \{(-1)^{n+1}\}$.

一个数列对应着数轴上的一个点列.

2. 数列的极限

观察引例 1 中数列和上述数列可以发现,当 n 无限增大时,它们的变化趋势是:引例 1 中数列和数列(1)无限接近于 0,数列(3)无限接近于 4,数列(2)无限变大,而数列(4)在 -1 和 1 间跳动.对于引例 1 中数列、数列(1)和数列(3),我们称它们有极限.

定义 2 对于数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于一个常数 A,则称当 $n\to\infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A(n\to\infty).$$

这时亦称为数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A.如果数列没有极限,就称数列是发散的.

例如:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{n}\right)=4$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$.

练习 1 当 $n\to\infty$ 时,下列数列有无极限,若有极限,极限为多少?

(1) $x_n=2^n$; (2) $x_n=25$;

(3) $x_n=\frac{1}{3^n}$; (4) $x_n=1+(-1)^n$.

二、函数的极限

1. $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例 2(熟练工的工时数问题) 生产同一产品,熟练工所需要的工时数比新手要少.因为当你不断重复地做同一种工作时,你的操作方法会不断得到改善,操作时间慢慢地减少并逐渐接近于一个确定的时间.

引例 3 当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 无限接近于常数 0.这时,我们就称当 $x\to\infty$ 时,函数 $\frac{1}{x^2}$ 以 0 为极限.

定义 3 如果当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

例如:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}C=C$.

特别地，数列$\{x_n\}$可看作自变量取正整数值的函数$x_n=f(n)$，因此数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$可写成$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$．这时$A$就看作自变量取正整数值的函数$f(n)$当$n\to\infty$时的极限．

有时，我们需要考虑x只取正值或负值趋于无穷的情形，有下面定义．

定义 4 如果当自变量$x>0$且无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个常数A，则称当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$以A为极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$

定义 5 如果当自变量$x<0$且$-x$无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个常数A，则称当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$以A为极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty).$$

例 1 观察函数$y=\dfrac{1}{|x|}$（图 1.20）与$y=\arctan x$（图 1.18）的图形，可以得出如下结论：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

由定义 3、定义 4 和定义 5，我们可以得到如下定理．

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

根据定理 1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$，而$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在．

练习 2 下列极限是否存在，并说出理由．

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin 2x$.

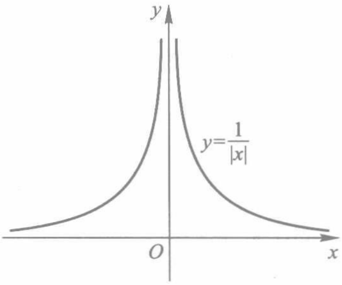

图 1.20

2．$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限

定义 6 设$\delta>0$．开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点x_0的**δ邻域**，开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点x_0的左邻域，而开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为点x_0的右邻域．

引例 4 考察函数$f(x)=x^2-1$的图形（图 1.21）．当x从点$x=0$左、右近旁无限接近于 0 时，函数的函数值无限接近于-1．这时，我们称当$x\to0$时，函数$f(x)$的极限是-1．

引例 5 一个病人每隔 4 小时注射一次 150 mg 药物，图 1.22 显示了病人血液中药物的总量$f(t)$与时间t之间的关系，讨论当$t\to4$时函数$f(t)$的极限？

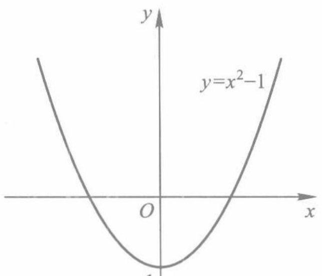

图 1.21

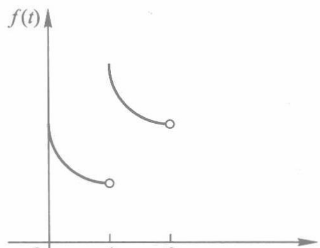

图 1.22

定义 7 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内(x_0可除外)有定义,若当x无限趋近于x_0时,函数$f(x)$无限趋近于一个常数A,则称当$x\to x_0$时,函数$f(x)$以A为极限,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

由定义 7, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)=-1$ 或 $f(x)=x^2-1\to -1(x\to 0)$.

例 2 讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$当$x\to 2$时有无极限.

解 如图 1.23 所示,当$x=2$时,函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$无意义,即$x=2$不在$f(x)$的定义域内,但当$x\to 2$时,$\dfrac{x^2-4}{x-2}$即$x+2$无限趋近于常数 4,故有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

上面讨论的函数$f(x)$在点x_0的极限,x可以通过任何方式在点x_0近旁趋近于x_0.有时,我们只需或只能考虑x仅从点x_0的左侧趋近于x_0(记作$x\to x_0^-$)时,或x仅从点x_0的右侧趋近于x_0(记作$x\to x_0^+$)时$f(x)$的极限,于是便有单侧极限的概念.

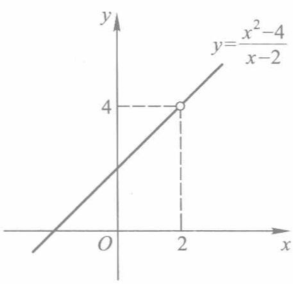

图 1.23

定义 8 设函数$f(x)$在点x_0的某左(或右)邻域内有定义(不要求在点x_0有定义),若当$x\to x_0^-$(或$x\to x_0^+$)时,函数$f(x)$无限趋近于一个常数A,则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0^-$(或$x\to x_0^+$)时的左(或右)极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad (或\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A),$$

也可记为

$$f(x_0-0)=A \quad (或 f(x_0+0)=A).$$

函数$f(x)$在点x_0的左极限和右极限统称为单侧极限.

由定义 7 和定义 8,我们容易得到下面的定理.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A.$

由此可知,如果$f(x)$在点x_0的左、右极限至少有一个不存在;或者虽然两个都存在,但不相等,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$一定不存在.在求分段函数在分段点处的极限时就要用到这些结论.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0<x<1, \\ 3, & x=1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0.5} f(x)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)=0, \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2,$$

所以$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$,根据定理 2 知$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

易得$\lim\limits_{x\to 0.5} f(x)=\lim\limits_{x\to 0.5}(x+1)=1.5$.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}2\sin x+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2\sin x+1)=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,根据定理 2 知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

易得 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$.

从例 3、例 4 也可以看出,在求分段函数在分段点处的极限时要考虑分段点的左、右极限,而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有没有定义,以及 $f(x_0)$ 的值没有什么直接的关系.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,则求 a.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,而

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+a)=a,\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$

所以 $a=1$.

练习 3 下列极限是否存在?请说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$; (3) $\lim\limits_{x\to x_0}x$;

(4) $\lim\limits_{x\to C}C$; (5) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$.

练习 4(电荷量问题) 在一个电路中的电荷量 Q 由下式定义

$$Q=\begin{cases}C, t\leqslant 0,\\ Ce^{-\frac{t}{RC}}, t>0,\end{cases}$$

其中 C,R 为正的常数,求电荷 Q 在 $t\to 0$ 时的极限.

第三节 无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

引例 1 行驶中的汽车刹车后,其速度 $v(t)$ 随时间 t 的增加逐渐减小到零.

引例 2 考虑一个人沿直线走向路灯的正下方时其影子的长度.若目标总是灯的正下方那一点,灯与地面的垂直高度为 H.由日常生活知识知道,当人越来越接近目标($x\to 0$)时,其影子的长度越来越短,且逐渐趋于 0($y\to 0$).

对于这种以零为极限的变量,我们有以下定义.

定义 1 若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限为零,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小量**.