中等专业学校

数学学习指导

（下）

侯昭群　主编

中国矿业大学出版社

中等专业学校

数学学习指导

（下）

侯昭群　主编

中国矿业大学出版社

中等专业学校
数学学习指导
侯昭群 主编

中国矿业大学出版社出版发行
山东省曲阜市印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 印张22.25 共481千字
1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷
印数 1—13000册

ISBN 7-81021-092-0

O·6（上、下册）定价：4.90元

前言

本书是根据国家教委审定工科类、财经类专业通用的《中等专业学校数学教教大纲》的要求而编写的。全书共分五篇：第一篇初等数学，包括代数、三角、立体几何、平面解析几何、第二篇包括微积分、常微分方程；第三篇包括级数、拉氏变换；第四篇包括行列式、矩阵、线性方程组、线性规划、投入产出简介；第五篇包括概率、数理统计等。各章分主要内容分析、典型例题分析、学习思考题三个部分。在主要内容分析中，概述了中专数学学习中应掌握的基本概念，主要定义、定理、公式的分析。特别指出在理解基本概念时应注意的问题，使读者能正确地掌握概念，掌握基础知识内在关系。在典型例题分析中，着重于对问题的剖析，并对解题的方法和技妙给予总结，以帮助读者能抓住重点和难点，提高分析问题和解决问题的能力。各章选编了学习思考题，最后附有十余套试题，供中专师生学习时参考。

本书可供各类中等专业学校（包括一般中专、职工中专、职业中专、中技、中专等）师生教学、广大知识青年参加成人考试和中专函授、自学用书。

在组织该书编审定稿工作中，我们请了三十余位有丰富教学过验的中等专业学校教师（包括副教授、高级讲师）、出版社编辑和大学教授进行了认真的校对、审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于编者的水平所限，加之编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳切期望广大读者批评指正。

编　　者

一九八八年五月

目　录

第三篇　级数与拉普拉斯变换

第一章　级数………………………………………………… 419

常数项级数………………………………………………… 419

一、主要内容分析………………………………………… 419

二、典型例题分析………………………………………… 426

三、学习思考题…………………………………………… 432

幂级数……………………………………………………… 433

一、主要内容分析………………………………………… 433

二、典型例题分析………………………………………… 436

三、学习思考题…………………………………………… 445

第二章　拉普拉斯变换……………………………………… 446

一、主要内容分析………………………………………… 446

二、典型例题分析………………………………………… 448

三、学习思考题…………………………………………… 448

第四篇　线性代数与线性规划

第一章　行列式……………………………………………… 469

一、主要内容分析………………………………………… 469

二、典型例题分析………………………………………… 472

三、学习思考题…………………………………………… 483

第二章　矩阵………………………………………………… 484

一、主要内容分析………………………………………… 484

二、典型例题分析……………………………………………… 488
三、学习思考题………………………………………………… 495
第三章　线性方程组…………………………………………… 497
一、主要内容分析……………………………………………… 497
二、典型例题分析……………………………………………… 498
三、学习思考题………………………………………………… 502
第四章　线性规划初步………………………………………… 503
一、主要内容及典型例题分析………………………………… 503
二、学习思考题………………………………………………… 521
第五章　投入产出分析………………………………………… 522
一、主要内容分析……………………………………………… 522
二、典型例题分析……………………………………………… 528
三、学习思考题………………………………………………… 535

第五篇　概率论与数理统计初步

第一章　事件与概率…………………………………………… 536
一、主要内容分析……………………………………………… 536
二、典型例题分析……………………………………………… 541
三、学习思考题………………………………………………… 552
第二章　随机变量及其概率分布……………………………… 554
一、主要内容分析……………………………………………… 554
二、典型例题分析……………………………………………… 564
三、学习思考题………………………………………………… 578
第三章　随机变量的数字特征………………………………… 579
一、主要内容分析……………………………………………… 579
二、典型例题分析……………………………………………… 582

三、学习思考题………………………………………… 588
第四章 数理统计初步……………………………… 589
一、主要内容分析……………………………………… 589
二、典型例题分析……………………………………… 595
三、学习思考题………………………………………… 602
第五章 回归分析…………………………………… 603
一、主要内容分析……………………………………… 603
二、典型例题分析……………………………………… 610
三、学习思考题………………………………………… 620
附录：
练习题（一）………………………………………… 621
练习题（二）………………………………………… 627
练习题（三）………………………………………… 635
练习题（四）………………………………………… 639
练习题（五）………………………………………… 647
练习题（六）………………………………………… 655
练习题（七）………………………………………… 662
练习题（八）………………………………………… 669
练习题（九）………………………………………… 676
练习题（十）………………………………………… 684
练习题（十一）……………………………………… 692
练习题（十二）……………………………………… 695

第三篇　级数与拉普拉斯变换

第一章　级　　数

重点：（1）级数收敛，发散概念及其判别；

（2）五个重要初等函数的幂级数展开式；

难点：（1）正项级数审敛法中的比较审敛法的应用；

（2）求函数幂级数展开式的直接方法；

（3）利用幂级数求近似值（误差估计）；

常数项级数

一、主要内容分析

（一）基本概念

1.无穷级数定义中的常数项级数，即：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中$n_n$为常数

2.常数项级收敛，发散及余项的概念。

注意：（1）级数概念中前n项之和用S_n表示，它与级数的“和”是不能混淆的。

（2）要学会将表示级数的一般符号“Σ”展成具体形

式，同样也要学会用级数的一般符号“Σ”表达级数的具体形式，例如：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}+\cdots$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})+(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})$$

$$+(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[7]{2})+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$$

（二）主要结论

1.级数的和及余项：

对数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，第几项和

$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，如果有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，并称$S$为该级数的和，即：

$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

全项 $n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$

2.级数收敛的必要条件

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，反之，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不一定收敛。

3.等比级数的敛散性

设：

$$\sum_{u=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots(a\neq0,q\neq0)$$

即：$S_n-a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$，若$|q|<1$，则级数收敛，答$|q|\geqslant1$，则级数发散。

事实上，

当$|q|<1$时，$\lim_{n\to\infty}a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}$，因此，级数收敛，

当$|q|>1$时，$\lim_{n\to\infty}a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$不存在，因此，级数发散；

当$q=1$时，$S_n=n\cdot a$，且$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在，所以级数发散；

当$q=-1$时，$S_n=\begin{cases}0 & n\text{为偶数时}\\ a & n\text{为奇数时}\end{cases}$

又$a\neq 0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，从而级数也发散。总之，当$|q|<1$时级数收敛，其和为$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant 1$时，级数发散。

4.基本性质

（1）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$各项乘以一个不为零的常数后，它的敛散性不变。即：

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n=C\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (C\neq o)$$

（2）二个收敛级数，可以逐相相加或逐项相减，组成的新级数也收敛，其和是各级数之和或差。即：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S',\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n=S'',\ \text{则}\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n u_n\pm\ )=S'\pm S''$$

推广：

①若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$发散

②若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$可能发散，也可能收敛，

例如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$都发散，但是，$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+(-1)^{n-1}]$收敛，其和为0。

（3）一个级数增加或减少有限项，不改变级数的敛散性（级数和一般是要改变的）。

（4）一个收敛级数加括号后所成的级数仍然收敛，级数和不改变；但是，收敛的级数去括号后不一定收敛。

例如：$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$收敛，级数的和为零，但是，去括号后为：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$发散

5.正项级数的比较审敛法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$为正项级数，并且$u_n \leqslant v_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u$也收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$

也散发。

6.正项级数的比值审敛法

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=P$，则，当

①$\rho<1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

②$\rho>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

③$\rho=1$ 时，该方法失效（改用其他方法）

7.正确级数的根值审敛法

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=q$，则

①当$q<1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

②当$q>1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

8.P——级数的审敛法

对于 $1+\frac{1}{2p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{4p}+\cdots+\frac{1}{np}+\cdots$（常数 $P>O$当$P>1$ 时，P—级数收盛；当$O<P\leqslant 1$ 时， P— 级数

发散。

9.交错级数审敛法

形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u, u_n \leqslant O$为交错级数，如果级数满足条件①$u \geqslant u_{n+1}$，②$\lim_{n\to\infty} u_n = O$，则级数收敛，其和$S \leqslant u_1$且余项$r_n$的绝对值$|v_n| \leqslant u_{n+1}$

10. 绝对收敛与条件收敛

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (u_n \in R)$，如果级数各项取绝对值（即 $\sum_{n=u}^{\infty}|u_n|$）后，级数收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (u_n \in R)$ 是绝对收敛。在讨论绝对收敛时．按正项级数审敛法审定。

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (u_n \in R)$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u|$发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是条件收敛。

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

注意：除以上概念和基本内容，我们还应熟知什么是等

比级数，正项级数，交错级数，P——级数，调和级数。

（三）解题方法

1.对于级数由通项写出有限项，比较好掌握，但由有限项找出通项，一般是比较困难的。因为没有一般的法则可遵循，这要根据级数中每项的具体形式，寻找它们与项数n的内在联系，即寻找u_n与n的函数关系$u_n=f(n)$。例如：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{5}{24}+\frac{12}{64}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2\cdot 2}+\frac{5}{2^3\cdot 3}+\frac{12}{2^4\cdot 4}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2^2-2}{2^2\cdot 2}+\frac{2^3-3}{2^3\cdot 3}+\frac{2^4-4}{2^4\cdot 4}+\cdots+\frac{2^n-n}{2^n\cdot n}+\cdots$$

所以，此级数的通项为：

$$U_n=\frac{2^n-n}{2^n\cdot n}$$

2.在已掌握以上定理，性质及概念的基础上怎样来判别级数的敛散性呢？通常按以下步骤进行：

（1）对于数项级数先检验通项是否满足收敛的必要条件，如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq O$，则级数发散。如果满足$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=O$，还要进一步考察。例如：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{虽有}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=O\text{，但此级数发散。}$$

（2）如果可以找出前n项之和S_n的表达式可用定义来判定。

（3）首先判断数项级数的类型，然后再用有关定理来进行判定。

（4）如用比较判定法时．通常用调和级数、等比级数P——级数的敛散性来比较判定

二、典型例题分析

【例1】写出下列级数的一般项：

（1）$-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$

解：分子从第三项起是按自然顺序排列的，它与项数的关系是$n-2$，而分母则从第3项起比分子大3，分母是$n-2+3=n+1$，因此，级数的通项是$u=\frac{n-2}{n+1}$。

（2）$\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{10}-\frac{a^5}{17}+\frac{a^6}{26}+\cdots$

解：由于每项的符号由$(-1)^{n+1}$决定，又分子第n项的幂是$n+1$，而分母从第二项以后可以看出是项数的平方加上1，即n^2+1，因此，此级数的通项是

$$u_n=(-1)^{n+1}\frac{a^{n+1}}{n^2+1}$$

【例2】 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$的敛散性。

解：由于$U_n=\frac{n^n}{n!}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdots\cdots\cdot\frac{n}{n}$而$\frac{n}{1}\geqslant 1$，$\frac{n}{2}\geqslant 1$，$\frac{n}{3}\geqslant 1$，…，$\frac{n}{n}=1$，

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot n\cdot n\cdots\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\neq 0$