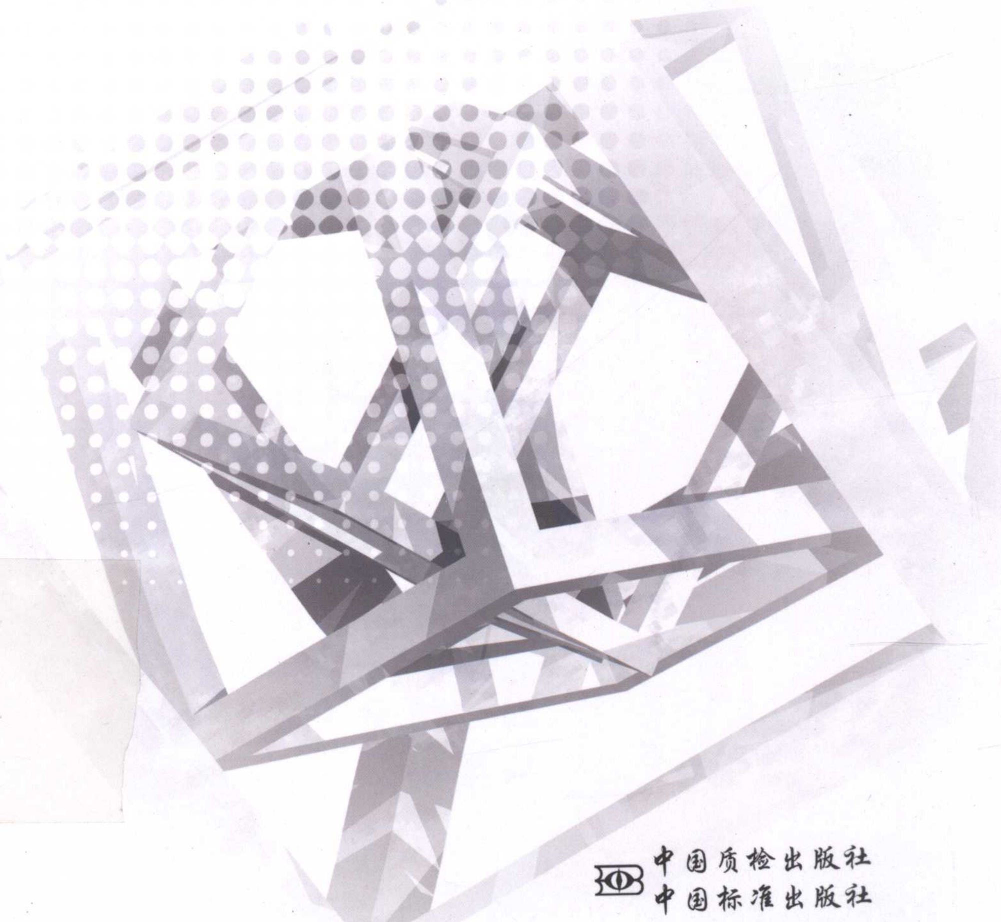
测量不确定度
包含区间及概率分析

崔伟群　卞昕　田锋　著



中国质检出版社
中国标准出版社

测量不确定度包含区间及概率分析

崔伟群　卞　昕　田　锋　著

中国质检出版社
中国标准出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

测量不确定度包含区间及概率分析／崔伟群，卞昕，田锋著．—北京：中国质检出版社，2016.1
ISBN 978-7-5026-4227-3

Ⅰ．①测… Ⅱ．①崔…②卞…③田… Ⅲ．①测量—不确定度—研究 Ⅳ．①TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 263030 号

中国质检出版社
中国标准出版社 出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲 2 号(100029)
北京市西城区三里河北街 16 号(100045)
网址：www.spc.net.cn
总编室：(010)68533533 发行中心：(010)51780238
读者服务部：(010)68523946
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销
*
开本 787×1092 1/16 印张 8.5 字数 195 千字
2016 年 1 月第一版 2016 年 1 月第一次印刷
*
定价 **35.00** 元

前言

国内标准将测量不确定度定义为"根据所用到的信息，表征赋予被测量量值分散性的非负参数"。但是由于这一中文表述存在歧义性，从而导致对测量不确定度的不同理解。

测量不确定度定义的第一种理解为：**根据所用到的信息，表征被测量量值分散性的非负参数，该分散性被计量人员赋予。**

在这一理解中，由于对"被测量量值"的不同理解又反过来引起各种争议，这些争议归根结底为"被测量量值"是什么的问题。是被测量的"真值"？还是被测量的测得值？

如果指的是被测量的"真值"，则基于第一种理解的测量不确定度定义的含义为：**"根据所用到的信息，表征被测量真值分散性的非负参数，该分散性被计量人员赋予。"**这种说法会使一部分计量人员无法接受，这是因为他们认为有的被测量的真值是没有分散性的，他们能够举出诸如光速真值的例子。如果指的是被测量的"测得值"，则基于第一种理解的测量不确定度定义的含义为：**"根据所用到的信息，表征被测量测得值分散性的非负参数，该分散性被计量人员赋予。"**这种说法会使全部计量人员无法接受，这是因为计量人员并不关心测得值是否分散，他们更关心的是真值在哪里？

测量不确定度定义的第二种理解为：**根据所用到的信息，表征被测量的一组量值分散性的非负参数，该组量值被计量人员赋予，该组量值是对被测量真值的估计。**

第二种理解是说被测量在测量时间段内存在一个（或一

系列）真值，计量人员通过测量和不确定度评估，赋予被测量在测量时间段内真值的一组估计值，而其中的不确定度用于表征这组估计值的分散性。通俗地说，由于现有能力无法测得被测量真值，在目前的测量水平下，计量人员给出一组值，并依据现有理论估计真值以某一概率处于这组值中，不确定度就是评估计量人员给出的这组值的分散性。

对于以上两种理解，如果只是在文字逻辑上对不确定度进行这样或那样的分析，就容易陷入经验主义的歧途，导致婆说婆有理、公说公有理。只有当计量人员了解不确定度传播公式的推导过程，A、B类两种评定方法结果合成的原因，才能理解不确定度在数学和测量学上的含义。这一部分内容，我在《测量误差与不确定度数学原理》中均有分析，然而由于篇幅所限，当时并没有对测量不确定度的数学和测量学意义进行深入阐述，也没有对测量不确定度如何实现“表征赋予被测量量值分散性”的目的进行深入阐述。

本书以《测量误差与不确定度数学原理》为基础，从数学和测量学角度深入阐述了测量不确定度的测量学含义，测量不确定度包含区间及概率的数学与测量学的异同，高可靠置信区间的给出。试图从理论上明晰目前存在的分歧，使广大计量工作者做到认认真真评定，明明白白应用！

崔伟群
于中国计量科学研究院
2015年10月

目录

第一章

统计概念对应的计量学解释

第一节　计量的目的

对于计量工作人员而言，明确计量工作的目的非常重要。计量是指实现单位统一、量值准确可靠的活动，也就是说计量是一种人类“活动”。这一“活动”的目的有两个：一个是实现单位统一；另一个是实现量值准确可靠。因此从逻辑上而言，这必然预示着在计量这一“活动”之前，统一的单位制和准确可靠的量值应该存在，否则计量这一活动无法完成。

而作为科学用语——“准确可靠”这一描述本身必然要求建立一个参照量用于判定，而且也必然要求这个参照量客观存在且具有某种形式的稳定性。如果这个参照量是主观的，则可靠本身会受到质疑；如果这个参照量不具有某种形式的稳定性，则准确性会受到质疑。因此，计量活动中的计量器具在一定条件下必然满足这一要求。

实现量值的准确可靠有两个含义：第一，是在给定技术条件下，使用准确可靠的计量器具对被测量进行测量；第二，是给出测量结果的可靠性指标。

对于第一个含义而言，首先要具有准确可靠的计量器具，因此这一问题转化为“是否具有技术手段确定计量器具的准确可靠程度”？最简洁的答案，是使用另外一个准确可靠的计量器具进行确定。上述问题不断被重复问询，从而形成了目前的量传溯源体系，在这一体系下，上一级计量器具被视为测量工具，下一级计量器具被视为被测对象。理论上这一问询过程是一个恶循环，要终止这一恶循环，显然不能继续使用另外一个准确可靠的计量器具进行确定，因此历史上采用了强制定义计量基准的方式，将这一恶循环打断。换言之，无论如何实现，计量基准中必然存在无法用一个准确可靠的计量器具进行确定的计量基准量值，而是依靠其他手段赋予的，例如采用强制定义或使用非计量器具进行测量等综合手段确认的。这实际上是哥德尔第一不完备定理的具体体现，即“任意一个包含一阶谓词逻辑与初等数论的形式系统，都存在一个命题，它在这个系统中既不能被证明也不能被否定”。因此，对于某些计量基准的量值（例如千克原器），量值的准确可靠来源于人类的信心或共识。这种信心或共识对于该类计量基准的量值的规范，最简单的就是在其应用范围内是恒定的、不变的、百分之百可靠的，如图 1-1 所示。

然而，图 1-1 中的情况在实践中并不适用，这是因为具体的计量基准往往会由于内部机制的原因和外部因素的干扰，出现如图 1-2 所示的情况——即真值在一定范围内发生变化（当这种变化非常微小，且不能被现代测量手段检测到时，一般近似看作图 1-1 的情况）。

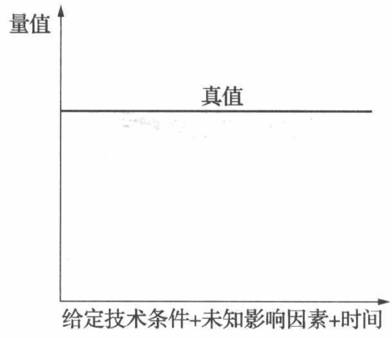


图 1-1 计量基准真值恒定不变

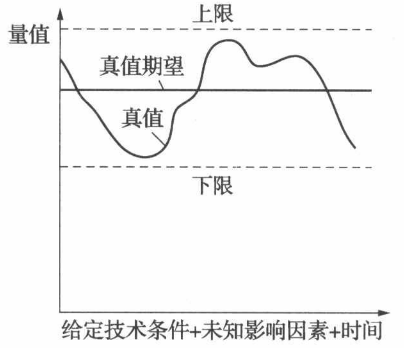


图 1-2 在给定技术条件下，计量基准真值变化

为了解决这一问题，“量子化”成为计量基准追求的终极目标[可参考(英)泰瑞·奎恩的《从实物到原子》]。然而这种追求依旧是理念中的，这是因为当无限理想的理念向有限客观现实转化的时候，必然受到现实局限，从而其表现形式与理念产生这样或那样的差异，使得计量基准无法百分之百与其定义吻合，如图 1-3 所示。例如，我们给出的光速与客观世界中的光速必然会有差异。或者由于客观基准的本身特性，其真值随未知影响因素随机变化，为了统一量值，给出一个约定真值，如图 1-4。从而赋予该计量基准一个或一系列约定真值。

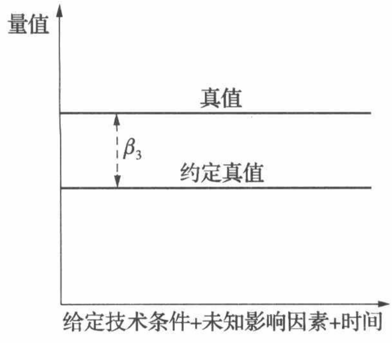


图 1-3 真值恒定不变情况下的约定真值

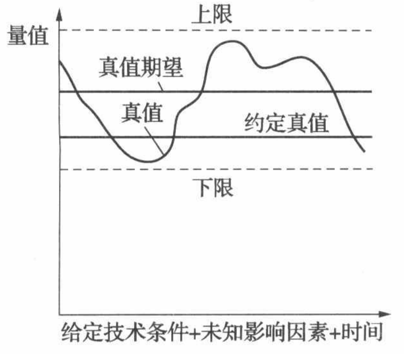


图 1-4 真值变化情况下的约定真值

对于第一个含义而言，其次要具有合适的测量手段，这里的合适是指测量手段与目的应匹配。换言之，测量的结果与被测量真值之间的差异应在规定的可接受范围内。这就需要涉及准确可靠的第二个含义，即如何评估测量结果的可靠性。

在实际工作中，计量人员的终极目的是希望能够获得并准确测得图 1-1、图 1-2 中被测量的真值或真值总体期望。显然在图 1-1 的情况下，如果能够获得被测量的真值，则该真值在下次使用中必然能够被预测；然而在图 1-2 的情况下，除非真值的变化非常有规律，否则这种预测非常困难，只能使用真值总体的期望作为预测的一个输入条件。

因此，计量人员希望能够通过一组测量结果以及相应测量结果的可靠性，在下次使用时，这组测量结果能够被继续使用。这就要求在理论上解决如何评估测量结果可靠性的问题，而解决这一问题，首先需要研究测量结果与真值或真值总体期望、约定真值之间的关系。

第二节　真值(真值总体期望)与测得值总体期望的关系

从计量角度而言,要获得测量结果的期望必然要求使用计量器具对被测量进行无限次测量。在这种测量模式下,测得值总体期望与被测量真值有如下关系:

(1) 针对图 1-1 的情况,测得值总体期望等于真值,即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时,测得值总体的期望以 100%的概率等于被测量的真值。这一情况说明,在整个测量过程中,所有对测得值的影响均为白噪,如图 1-5 所示。

(2) 针对图 1-1 的情况,测得值总体期望与真值相差一个常数,即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时,测得值总体的期望以 100%的概率与被测量的真值相差一个常数。这一情况说明,在整个测量过程中,除了白噪声之外,还有一组系统性的固定影响未被消除,如图 1-6 所示。

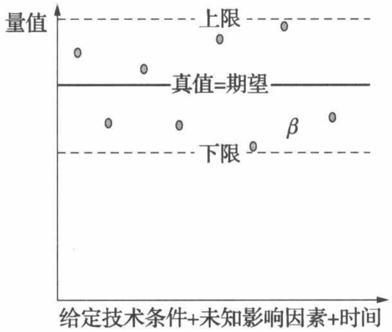


图 1-5　图 1-1 所对应的测得值
测得值总体期望＝真值

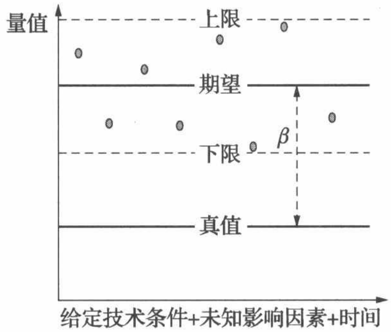


图 1-6　图 1-1 所对应的测得值
真值＝测得值总体期望＋常数

(3) 针对图 1-2 的情况,测得值总体期望等于真值总体期望,即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时,被测量真值虽然不唯一,但真值总体的期望唯一且不变,且测得值总体的期望以 100%的概率与被测量真值总体的期望相同。这一情况说明,在整个测量过程中,导致真值变化和测得值变化的所有影响因素通过统计手段均可消除,如图 1-7 所示。

(4) 针对图 1-2 的情况,测得值总体期望与真值总体期望相差一个常数,即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时,被测量真值虽然不唯一,但真值总体的期望唯一且不变,且测得值总体的期望以 100%的概率与被测量真值总体的期望相差一个常数。这一情况说明,在整个测量过程中,导致真值变化和测得值变化的部分影响因素可通过统计手段均消除,而另一部分的影响因素无法使用常规统计手段消除,如图 1-8 所示。

(5) 针对图 1-3 的情况,测得值总体期望等于真值,即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时,测得值总体的期望以 100%的概率等于被测量的真值,并与约定真值相差一个固定常数。这一情况说明,测量结果实现了测量的终极目标,且在整个测量过程中,所有对测得值的影响均为白噪,如图 1-9 所示。

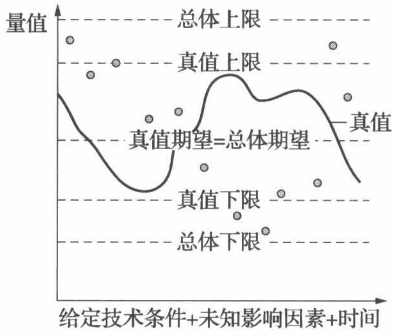


图 1-7　图 1-2 所对应的测得值

测得值总体期望＝真值总体期望

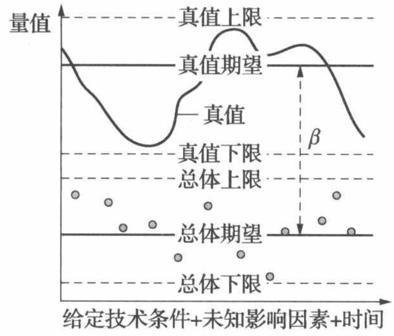


图 1-8　图 1-2 所对应的测得值

真值总体期望＝测得值总体期望＋常数

(6) 针对图 1-3 的情况，测得值总体期望等于约定真值，即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时，测得值总体的期望以 100％的概率等于被测量的约定真值，并与真值相差一个固定常数。这一情况说明，测量结果未实现测量的终极目标，且在整个测量过程中，除了白噪声之外，还有一组系统性的固定影响未被消除，如图 1-10 所示。

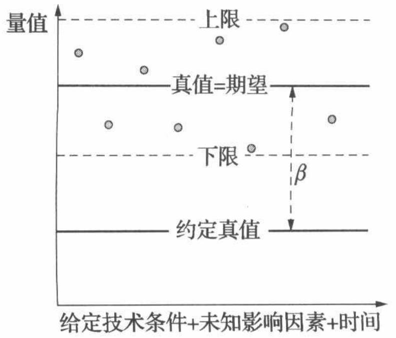


图 1-9　图 1-3 所对应的测得值

真值＝测得值总体期望

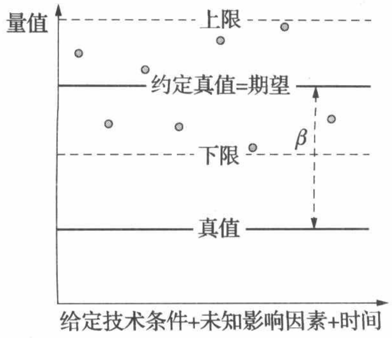


图 1-10　图 1-3 所对应的测得值

测得值总体期望＝约定真值

(7) 针对图 1-3 的情况，测得值总体期望与真值、约定真值各相差一个常数，即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时，测得值总体的期望以 100％的概率与被测量的真值、约定真值各相差一个常数。这一情况说明，测量结果未实现测量的终极目标，且在整个测量过程中，除了白噪声之外，还有一组系统性的固定影响未被消除，如图 1-11 所示。

(8) 针对图 1-4 的情况，测得值总体期望等于真值总体期望，而与约定真值相差一个常数，即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时，测得值总体的期望以 100％的概率与被测量的真值相等，并与约定真值相差一个常数。这一情况说明，测量结果实现了测量的终极目标，在整个测量过程中，导致真值变化和测得值变化的所有影响因素通过统计手段均可消除，如图 1-12 所示。

(9) 针对图 1-4 的情况，测得值总体期望等于约定真值，而与真值总体期望相差一个常数，即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时，测得值总体的期望以 100％的概率与

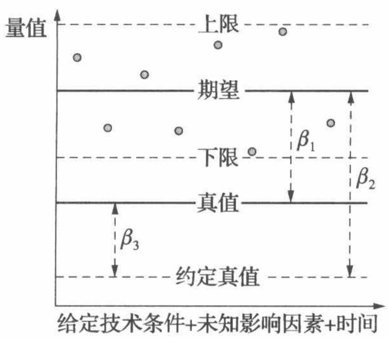


图 1-11　图 1-3 所对应的测得值

测得值总体期望＝真值＋常数

测得值期望＝约定真值＋常数

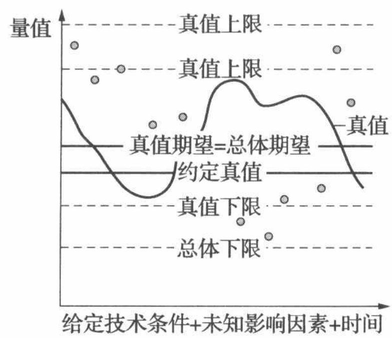


图 1-12　图 1-4 所对应的测得值

测得值总体期望＝真值总体期望

约定真值＝真值总体期望＋常数

被测量的约定真值相等，并与真值总体期望相差一个常数。这一情况说明，测量结果未实现测量的终极目标，在整个测量过程中，导致真值变化和测得值变化的部分影响因素可通过统计手段消除，而另一部分的影响因素无法使用常规统计手段消除，如图 1-13 所示。

（10）针对图 1-4 的情况，测得值总体期望与约定真值、真值总体期望各相差一个常数，即当计量人员在重复性条件下进行无限次测量时，测得值总体的期望以 100％的概率与被测量的约定真值、真值总体期望各相差一个常数。这一情况说明，测量结果未实现测量的终极目标，在整个测量过程中，导致真值变化和测得值变化的部分影响因素可通过统计手段消除，而另一部分的影响因素无法使用常规统计手段消除，如图 1-14 所示。

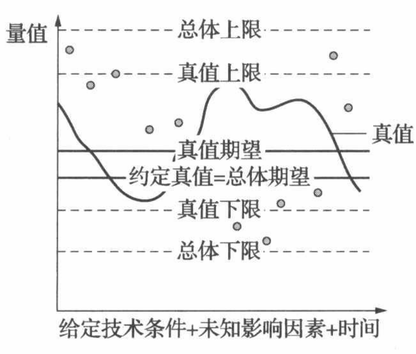


图 1-13　图 1-4 所对应的测得值

约定真值＝测得值总体期望

测得值总体期望＝真值期望＋常数

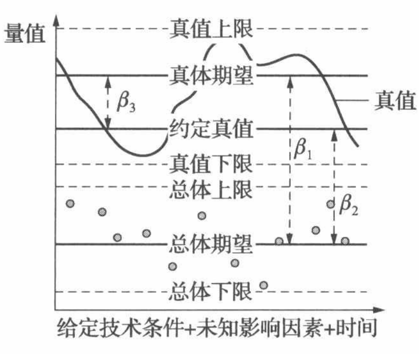


图 1-14　图 1-4 所对应的测得值

真值总体期望＝测得值总体期望＋常数

约定真值＝测得值总体期望＋常数

第三节　真值（真值总体期望）与测得值总体期望、样本均值的关系

在实际测量中，测量往往是有限次的，因此在概率上讨论的应该是样本均值与测得值总体期望的关系；而在计量上，讨论的应该是样本均值与真值或真值总体期望之间的关系。

(1)在图 1-5、图 1-7 中测得值总体期望＝真值(真值总体期望)的情况下，样本均值与测得值总体期望相差一个数，且这个数随着样本容量的增大以 100%的概率趋向于 0，如图 1-15 所示。

(2)特别地，在图 1-5、图 1-7 中测得值总体期望＝真值(真值总体期望)的情况下，样本均值与测得值总体期望相等，如图 1-16 所示。

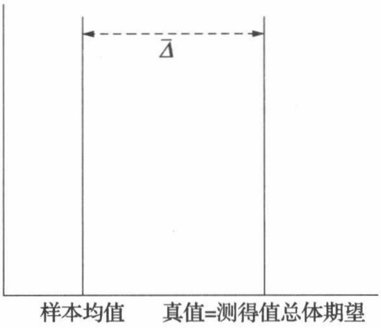


图 1-15　真值(真值总体期望)＝样本均值＋数
测得值总体期望＝真值(真值总体期望)

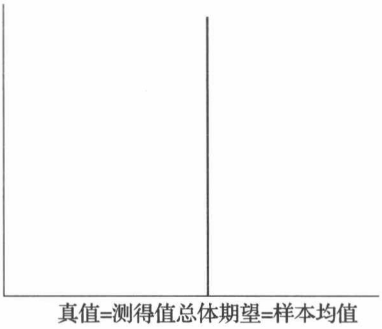


图 1-16　真值(真值总体期望)＝样本均值
测得值总体期望＝样本均值

(3)在图 1-6、图 1-8 中真值(真值总体期望)＝测得值总体期望＋常数的情况下，样本均值与测得值总体期望相等，如图 1-17 所示。

(4)特别地，在图 1-6、图 1-8 中真值(真值总体期望)＝测得值总体期望＋常数的情况下，样本均值与被测量真值(真值总体期望)相等，如图 1-18 所示。

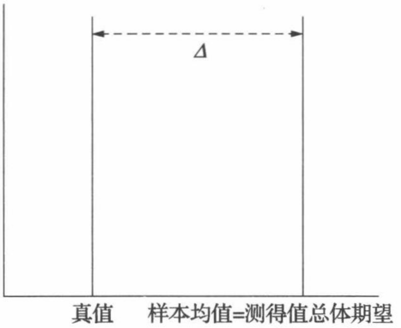


图 1-17　样本均值＝测得值总体期望
测得值总体期望＝真值(真值总体期望)＋ 常数

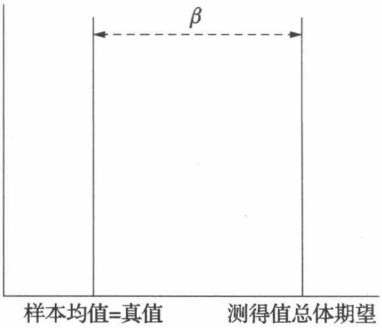


图 1-18　样本均值＝真值
测得值总体期望＝真值＋常数

(5)特别地，在图 1-6、图 1-8 中真值(真值总体期望)＝测得值总体期望＋常数的情况下，样本均值与被测量真值(真值总体期望)、测得值总体期望各相差一个数，并且与测得值总体相差的数随着样本容量的增大以 100%的概率趋向于 0，如图 1-19 所示。

(6)在图 1-9、图 1-12 中真值(真值总体期望)＝测得值总体期望的情况下，样本均值与被测量真值(真值总体期望)、约定真值各相差一个数，并且与测得值总体相差的数随着样本容量的增大以 100%的概率趋向于 0，如图 1-20 所示。

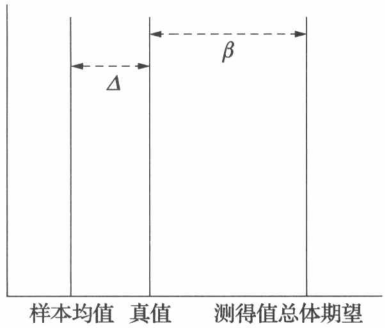


图 1-19　样本均值＝真值(真值总体期望)＋数
真值(真值总体期望)＝
测得值总体期望＋常数

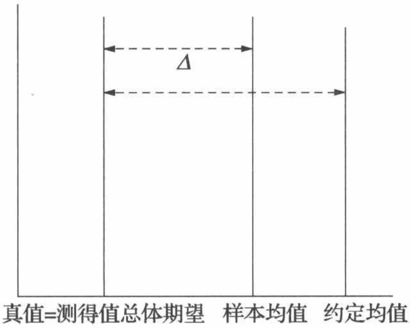


图 1-20　真值(真值总体期望)＝
测得值总体期望

(7)特别地,在图 1-9、图 1-12 中真值(真值总体期望)＝测得值总体期望的情况下,样本均值与被测量真值(真值总体期望)相等,如图 1-21 所示。

(8)特别地,在图 1-9、图 1-12 中真值(真值总体期望)＝测得值总体期望的情况下,样本均值与约定真值相等,如图 1-22 所示。

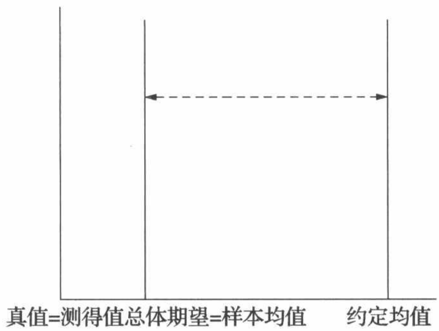


图 1-21　真值(真值总体期望)＝
样本均值＝测得值总体期望
约定直值＝真值(真值总体期望)＋常数

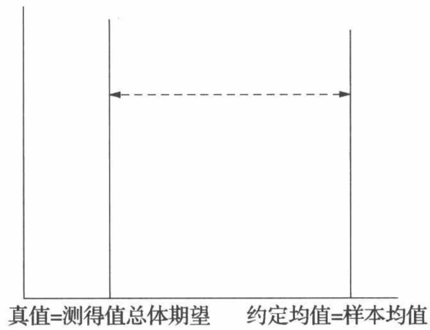


图 1-22　真值(真值总体期望)＝
测得值总体期望
约定真值＝样本均值
约定真值＝真值(真值总体期望)＋常数

(9)在图 1-10、图 1-13 中约定真值＝测得值总体期望的情况下,样本均值与被测量真值(真值总体期望)相差一个数,并且与测得值总体期望相差的数随着样本容量的增大以 100％的概率趋向于 0,如图 1-23 所示。

(10)特别地,在图 1-10、图 1-13 中约定真值＝测得值总体期望的情况下,测得值总体期望与被测量真值(真值总体期望)相差一个常数,并且与样本均值相等,如图 1-24 所示。

(11)特别地,在图 1-10、图 1-13 中约定真值＝测得值总体期望的情况下,样本均值与被测量真值(真值总体期望)相等,如图 1-25 所示。

(12)在图 1-11、图 1-14 中约定真值、真值(真值总体期望)、测得值总体期望各不相同的情况下,样本均值与被测量真值(真值总体期望)相等,如图 1-26 所示。

(13)在图 1-11、图 1-14 中约定真值、真值(真值总体期望)、测得值总体期望各不相同的

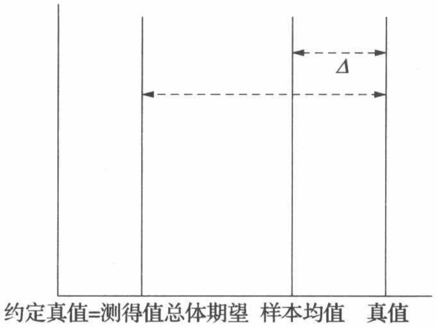


图 1-23　约定真值＝ 测得值总体期望
样本均值＝真值(真值总体期望)＋数
约定真值＝真值(真值总体期望)＋常数

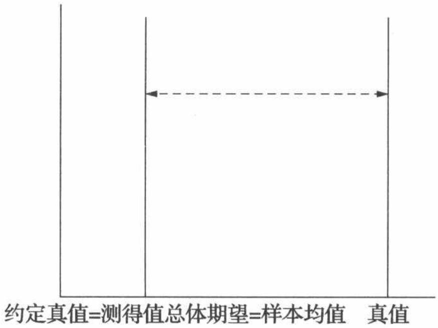


图 1-24　约定真值＝测得值
总体期望＝样本均值
测得值总体期望＝真值＋常数

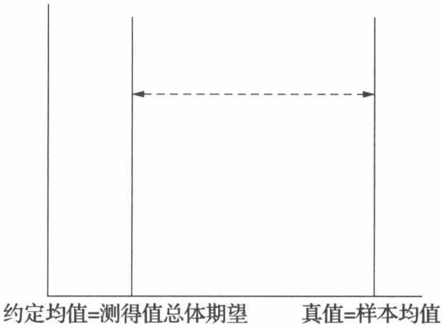


图 1-25　约定真值＝测得值总体期望
约定真值＝真值＋常数
样本均值＝真值

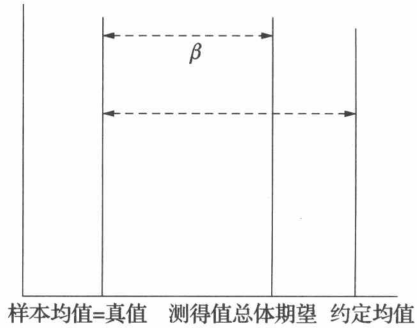


图 1-26　样本均值＝真值
(真值总体期望)

情况下，样本均值与测得值总体期望相等，如图 1-27 所示。

(14)在图 1-11、图 1-14 中约定真值、真值(真值总体期望)、测得值总体期望各不相同的情况下，样本均值与约定真值相等，如图 1-28 所示。

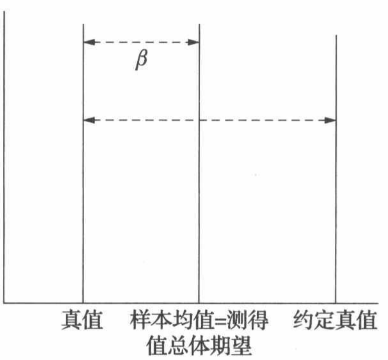


图 1-27　样本均值＝测得值总体期望

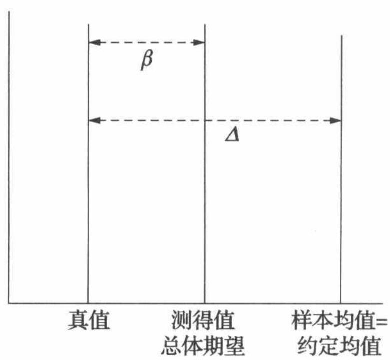


图 1-28　样本均值＝约定真值

(15)在图 1-11、图 1-14 中约定真值、真值(真值总体期望)、测得值总体期望各不相同的情况下,样本均值与约定真值、真值(真值总体期望)、测得值总体期望各相差一个数,如图 1-29 所示。

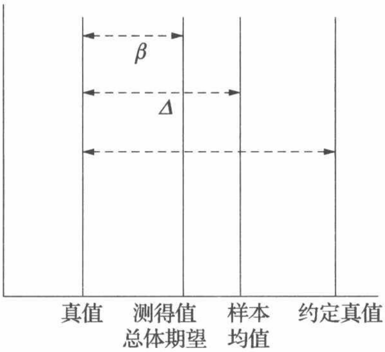


图 1-29　样本均值与约定真值、真值(真值总体期望)、测得值总体期望各相差一个数

第四节　依据测得值样本给出的置信区间与测得值总体期望、真值(真值总体期望)的关系

为了研究测得值与真值的关系,从概率论角度必然要研究测得值样本均值与期望之间的关系。概率论从理论上明确指出了样本均值与总体期望之间具有如下关系:总体期望以一定置信概率落在以样本均值为中心的置信区间内。因此,当获得一定容量的测得值样本时,根据概率理论,测量人员就能给出总体期望的置信区间和概率。但是就真值而言,却无法简单地给出这种关系。具体情况如下:

(1)在图 1-15 的情况下,通过测得值样本,可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率,同样也可以获得真值(真值总体期望)的包含区间和包含概率,如图 1-30 所示。

(2)在图 1-16 的情况下,通过测得值样本,可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率,同样也可以获得真值(真值总体期望)的包含区间和包含概率,实际上在已知条件下,样本均值就是真值,如图 1-31 所示。

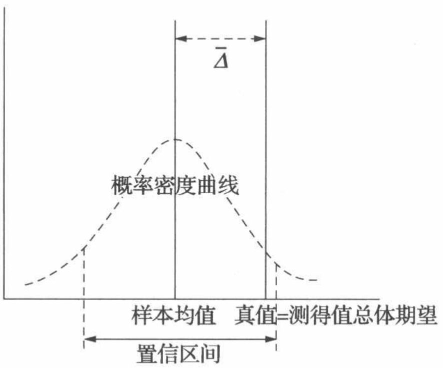


图 1-30　真值(真值总体期望)=测得值总体期望

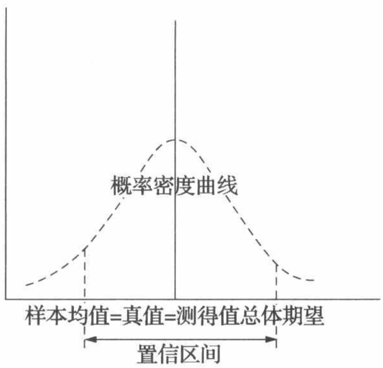


图 1-31　真值(真值总体期望)=测得值总体期望

(3)在图 1-17 的情况下，通过测得值样本，可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率，但是无法通过测得值统计信息获得真值(真值总体期望)的包含区间和包含概率，如图 1-32 所示。

(4)在图 1-18 的情况下，通过测得值样本，可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率，并在已知条件下，样本均值就是真值(真值总体期望)，如图 1-33 所示。

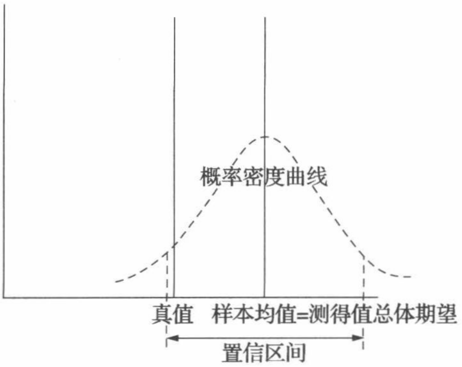


图 1-32 样本均值 = 测得值总体期望

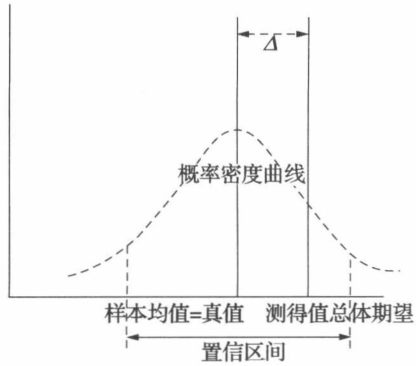


图 1-33 样本均值=真值(真值总体期望)

(5)在图 1-19 的情况下，通过测得值样本，可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率，无法通过测得值统计信息获得真值(真值总体期望)的包含区间和包含概率，如图 1-34 所示。

(6)在图 1-20 的情况下，通过测得值样本，可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率，同样也可以获得真值(真值总体期望)的包含区间和包含概率，如图 1-35 所示。

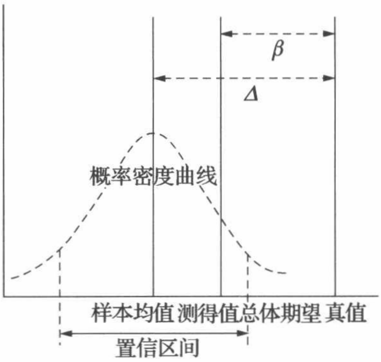


图 1-34 样本均值=测得值总体期望、测得值总体期望=真值(真值总体期望)+常数

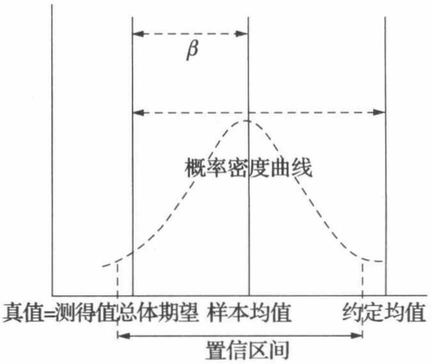


图 1-35 真值(真值总体期望)=测得值总体期望

(7)在图 1-21 的情况下，通过测得值样本，可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率，样本均值就是真值(真值总体期望)如图 1-36 所示。

(8)在图 1-22 的情况下，通过测得值样本，可以获得测得值总体期望的置信区间和置信概率，同样也可以获得真值(真值总体期望)的包含区间和包含概率，如图 1-37 所示。