中国劳动关系学院精品课系列教材

微积分

主　编　郑红芬

副主编　张　明 王志高

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

应用数学基础(一)

微 积 分

主　编　郑红芬
副主编　张　明　王志高

上海交通大学出版社

内容提要

本书内容包含了微积分的经典理论和方法，涵盖函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数和微分方程简介等。

本书的编写从认知规律入手，重新编排教学内容；针对培养应用型人才的要求，构建课程体系；融合多种媒体方式，方便学生自主学习。同时，适当精简计算和推导中较繁难的部分，增加具有现实背景的实例，注重对解决实际问题能力的培养，力争让使用者在有限的学习时间内对基础数学有较全面的理解和掌握。

本书适合于高等职业教育和应用型本科教育中微积分课程的教学。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/郑红芬主编. —上海：上海交通大学出版社，2015
ISBN 978-7-313-13532-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①郑… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第179791号

微积分

主　　编：郑红芬
出版发行：上海交通大学出版社
地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030
电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海天地海设计印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：17.5
字　　数：338千字
版　　次：2015年12月第1版
印　　次：2015年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-13532-2/O
定　　价：45.00元

前　言

微积分是人类智慧最伟大的成就之一，它不仅在阐明和解决数学、物理学、生物科学、工程科学、经济学、管理科学甚至社会学等各领域问题中发挥着强大的威力，同时也是培养逻辑思维能力、提高数学素养的重要课程。因此，在我国高校的绝大部分理科、工科专业以及经济管理类专业都把微积分列为必修课程，而且正逐步成为所有专业的大学生的必修或选修课程。随着使用面的扩大，微积分教材也应该针对不同对象、不同层次、不同水平的使用者，呈现出不同风格。

本书主要面向以培养应用型人才为主的普通高校，在内容的取舍和编排上作了一些改动。在全书的开头部分增加了微积分概述这一章，让使用者在开始就对微积分有一个整体的把握和初步认识。在核心概念的引入中加入了对其产生的背景和实际问题的介绍，力求使读者对这些基本的概念有一个清晰的直觉。对于理论推理方面则根据不同的对象确定其必要的程度。比如像几个微分中值定理，微积分基本定理这类直观性比较强的定理，本书尽可能地加以证明，以带领读者完成一个从直观到理性的认识过程；而对一些属于数学分析范畴的定理则只给出了直观的描述而不加以证明，比如闭区间上连续函数的性质等；还有一些直观性不强，但很有用的内容，比如洛必达法则，也给出了必要的推理证明。另外，本书还加入了大量的图表，使一些重要的概念和定理更加形象、直观。

当对微积分的知识有所理解和认识后，更进一步的就是在使用中使其得到巩固和深化。因此计算和应用也是必不可少的内容。为此本书在例题和习题的编配上精心选择，不仅题目数量众多，类型丰富，同时具备一定的层次，方便读者由浅入深，循序渐进地掌握相关知识。同时书中还增加了一些对典型题目的分析和常用方法的总结，书末附有各章习题的答案，方便读者进行自学。

本书的部分内容打上了※号，仅供读者自学，一般可以不讲授。另外本书在

编排上充分考虑到能适应不同层次的需要，有较大的灵活性，学时较少的可以只选择一元函数微积分及多元函数微积分，大约需96学时，要使用全部内容，则需128学时。教师也可根据本校实际情况对学时作一定的增减，最好能配置适当学时的习题课。

本书的编写分工如下：第1，6，7章由郑红芬执笔；第4，5章由王志高执笔；第8，9章由张明执笔；第2章由张奎执笔；第3章由贾屹峰执笔；第10章由李静执笔，最后由郑红芬统稿、定稿。吴亚凤对本书的初稿进行了认真地审阅，并提出了许多宝贵的意见。

上海交大出版社对本教材的编写和出版给予了很多的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

尽管作者都有着良好的愿望，但书中的不当和错漏之处仍在所难免，敬请各位同行和读者批评指正！

编 者

2015年6月

目　录

※ 1　微积分概述 …… 1
1.1　微积分学的建立 …… 1
1.2　微积分学的基本内容 …… 3
1.3　学习微积分学要注意的问题 …… 3

2　函数 …… 4
2.1　预备知识 …… 4
2.2　函数 …… 6

3　极限与连续 …… 17
3.1　数列的极限 …… 17
3.2　函数的极限 …… 19
3.3　无穷小量与无穷大量 …… 22
3.4　极限的运算法则 …… 24
3.5　两个重要极限 …… 30
3.6　无穷小量的比较 …… 34
3.7　函数的连续性 …… 36

4　导数与微分 …… 45
4.1　导数 …… 45
4.2　导数的基本公式与运算法则 …… 50
4.3　高阶导数 …… 61
4.4　微分 …… 63

5 **导数的应用** …… 71
5.1 中值定理 …… 71
5.2 未定式的定值法——洛必达法则 …… 77
5.3 函数的单调性和极值 …… 81
5.4 最大值与最小值,极值的应用问题 …… 86
5.5 曲线的凹向与拐点 …… 88
5.6 函数图像的画法 …… 90

6 **不定积分及其方法** …… 96
6.1 不定积分 …… 96
6.2 换元积分法 …… 101
6.3 分部积分法 …… 109
※6.4 几种特殊类型函数的积分 …… 112

7 **定积分及其应用** …… 119
7.1 定积分的概念 …… 119
7.2 定积分的性质 …… 124
7.3 微积分基本定理 …… 127
7.4 定积分的换元积分法 …… 131
7.5 定积分的分部积分法 …… 135
7.6 广义积分 …… 138
7.7 微元法和定积分的应用 …… 142

8 **多元函数微积分** …… 153
8.1 多元函数的基本概念 …… 153
8.2 偏导数 …… 160
8.3 全微分及其应用 …… 165
8.4 多元复合函数的求导法则 …… 168
8.5 隐函数的求导法则 …… 173
8.6 多元函数的极值及其求法 …… 178
8.7 二重积分的概念和性质 …… 184
8.8 二重积分的计算法 …… 188

9　微分方程 …… 196
9.1　微分方程的基本概念 …… 196
9.2　可分离变量的微分方程 …… 198
9.3　齐次微分方程 …… 201
9.4　线性微分方程 …… 204
9.5　全微分方程 …… 208
9.6　可降阶的高阶微分方程 …… 211
9.7　高阶线性微分方程 …… 213
9.8　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 217
9.9　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 221

10　无穷级数 …… 228
10.1　常数项级数的概念和性质 …… 228
10.2　正项级数的判别法 …… 232
10.3　一般常数项级数 …… 238
10.4　幂级数 …… 241
10.5　函数的幂级数展开 …… 249

习题参考答案 …… 260

微积分概述 1

1.1 微积分学的建立

从微积分成为一门学科来说，是在 17 世纪，但是，微分和积分的思想在古代就已经产生了。

公元前 3 世纪，古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中，就隐含着近代积分学的思想。作为微分学基础的极限理论来说，早在古代已有比较清楚的论述。如我国的庄周所著《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这些都是朴素的、也是很典型的极限概念。

到了 17 世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素。归结起来，大约有 4 种主要类型的问题：一是研究运动的时候直接出现的，也就是求即时速度的问题；二是求曲线的切线的问题；三是求函数的最大值和最小值问题；四是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力等。

第一、第二类问题的解决引出了微积分的两大分支之一——微分学，而第四类问题则是另一分支——积分学的核心问题。17 世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题作了大量的研究工作，如法国的费马、笛卡尔、罗伯瓦、笛沙格；英国的巴罗、瓦里士；德国的开普勒；意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论。为微积分的创立做出了贡献。然而在很长时间内，微分和积分一直被当作两类独立的问题来分别对待，直到 17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然只是十分初步的工作，他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求面积问题（积分学的中心问题）。他们建立了微积分基本定理，指出微分和积分是两个互逆的运算，把微分学和积分学有机地结合在了一起，使之成为了一门系统的学科。

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源。牛顿研究微积

分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的。

牛顿在 1671 年写了《流数法和无穷级数》，这本书直到 1736 年才出版，它在这本书里指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的，否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合。他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数。牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（微分法）；已知运动的速度求给定时间内经过的路程（积分法）。

德国的莱布尼茨是一个博学多才的学者，1684 年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章有一个很长而且很古怪的名字《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》。就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有划时代的意义。它已含有现代的微分符号和基本微分法则。1686 年，莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献。他是历史上最伟大的符号学者之一，他所创设的微积分符号，远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响。现在我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的。

微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力。

前面已经提到，一门科学的创立决不是某一个人的业绩，他必定是经过多少人的努力后，在积累了大量成果的基础上，最后由某个人或几个人总结完成的。微积分也是这样。

不幸的是，由于人们在欣赏微积分的宏伟功效之余，在提出谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立。英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了一百年。

其实，牛顿和莱布尼茨分别是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的。比较特殊的是牛顿创立微积分要比莱布尼茨早 10 年左右，但是正式公开发表微积分这一理论，莱布尼茨却要比牛顿发表早三年。他们的研究各有长处，也都各有短处。那时候，由于民族偏见，关于发明优先权的争论竟从 1699 年始延续了一百多年。

应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的。他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊。牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨的也不能自圆其说。这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生。

直到 19 世纪初，法国科学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家魏尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为了微积分的坚定基础。才使微积分进一步的发展开来。

1.2 微积分学的基本内容

欧氏几何也好，上古和中世纪的代数学也好，都是一种常量数学，微积分才是真正的变量数学，是数学中的大革命。微积分是一种数学思想，简单说，微分就是“无限细分”，积分就是“无限求和”。微积分研究的主要对象是函数，采用的方法是极限。通常用以直代曲，以不变代变等方式把要求的量定义为另一个更容易计算的量的极限，这是微积分理论的精髓所在。

微积分的基本概念和内容包括微分学和积分学。

微分学的主要内容包括：极限理论、导数、微分等。

积分学的主要内容包括：定积分、不定积分等。

1.3 学习微积分学要注意的问题

首要的一步就是要理解“极限”引入的必要性：因为，代数是人们已经熟悉的概念，但是，代数无法处理“无限”的概念。所以，必须要利用代数处理代表无限的量，这时就精心构造了“极限”的概念。在“极限”的定义中，我们可以知道，这个概念绕过了用一个数除以0的麻烦，相反引入了一个过程任意小量。就是说，除的数不是零，所以有意义，同时，这个小量可以取任意小，只要满足在德尔塔区间，都小于该任意小量，我们就说他的极限为该数——你可以认为这是投机取巧，但是，他的实用性证明，这样的定义还算比较完善，给出了正确推论的可能性。这个概念是成功的。

其次，要了解微积分中的一系列核心概念，如函数连续性、导数、微分、定积分，都是用某种结构的极限来定义的。而在核心概念的引入上，基本都遵循下述模式：实际问题引出概念，定义证明某些基本初等函数的情况，寻找运算法则，利用运算法则和某些基本初等函数的情况推出初等函数的情况。

最后，微积分是与实际应用联系着发展起来的，它在天文学、力学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学的多个分支中，有越来越广泛的应用。特别是计算机的发明更有助于这些应用的不断发展。

函　数　2

函数描述了变量之间的依赖关系，是微积分最基本的研究对象。本章讨论了函数的基本思想、一般特性、函数图像及函数的变换与组合的方法，同时考察了微积分中出现的主要函数类型，为深入学习微积分打下基础。

2.1 预备知识

2.1.1 集合

具有某种共同属性的对象汇集成的总体称为**集合**。集合中的对象称为这个集合的**元素**。例如，某班全体学生构成的集合，这个班的每一个学生就是这个集合的元素。如全体实数构成的集合，称为**实数集**，每一个实数就是实数集中的元素。

通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, …表示集合，用小写字母 a, b, c, …表示集合中的元素。习惯上用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，用 $\mathbf{C}$ 表示复数集。

如果 a 是集合 $\boldsymbol{A}$ 中的元素，就说 a 属于 $\boldsymbol{A}$，记作：$a \in \boldsymbol{A}$，否则就说 a 不属于集合 $\boldsymbol{A}$，记作：$a \notin \boldsymbol{A}$。

如果集合 $\boldsymbol{A}$ 中的元素可以一一列举出来，如喜、怒、哀、乐同属于人的情绪，构成一个集合，并以 $\boldsymbol{A}$ 来表示，则 $\boldsymbol{A}=\{$喜，怒，哀，乐$\}$。再如自然数集 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$。这种在"{}"内把元素一一列举出来的表示集合的方法，称为**列举法**。当集合 $\boldsymbol{A}$ 中的元素不能一一列出时，则可以采用**描述法**，以 x 表示 $\boldsymbol{A}$ 的元素，将集合 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}=\{x \mid x$ 所具有的性质$\}$。

【例 2-1】 $\boldsymbol{A}=\{x \mid 1<x<3\}$ 表示大于 1 且小于 3 的全体实数构成的集合。

【例 2-2】 $\boldsymbol{B}=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$ 表示方程的根的集合。由于这个二元方程只有两个根，所以也可以用列举法将此集合表示为 $\boldsymbol{B}=\{2, 3\}$。

不含任何元素的集合叫做**空集**。记作$\varnothing$。例如，$\{x \mid x^2+1=0\}$ 是空集。

$\boldsymbol{A}=\{x \mid x \in \boldsymbol{B}\}$ 表示集合 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都是集合 $\boldsymbol{B}$ 中的元素，称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的**子集**，记作 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 包含于 $\boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{B}$ 包含 $\boldsymbol{A}$。例如，$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$。

如果 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的元素完全相同。

关于子集有以下结论：

(1) $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}$，即任何一个集合是其自身的子集。

(2) 对任意集合 $\boldsymbol{A}$，有 $\varnothing \subset \boldsymbol{A}$，即空集是任意集合的子集。

(3) 若 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}$，即集合的包含关系具有传递性。

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in \boldsymbol{A}$ 或 $x \in \boldsymbol{B}\}$ 表示所有属于 $\boldsymbol{A}$ 或属于 $\boldsymbol{B}$ 的元素共同构成的一个新的集合，称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的**并集**，简称**并**。

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in \boldsymbol{A}$ 且 $x \in \boldsymbol{B}\}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 共同的元素构成的一个新的集合，称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的**交集**，简称**交**。

【例 2-3】 设 $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 4\}$，$\boldsymbol{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$，则

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},\ \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{3, 4\}。$$

【例 2-4】 设 $\boldsymbol{A} = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant +\infty\}$，$\boldsymbol{B} = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$，则

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}。$$

2.1.2 绝对值

定义 2.1.1 设 $x \in \mathbf{R}$，符号 $|x|$ 表示 x 的绝对值，定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

绝对值的几何意义：$|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点的距离。

绝对值具有下述性质：

(1) $\sqrt{x^2} = |x|$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) 当 $a > 0$ 时，$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$，$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$

(6) $|xy| = |x| \cdot |y|$，$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$，$y \neq 0$

(7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$，$|x - y| \geqslant |x| - |y|$

2.1.3 常量与变量

在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量。有的量在过程中不起变化，保持定值，称之为**常量**，例如健康人的体温；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，则称之为**变量**，例如气温。常量可以看作是变量的特例。

2.1.4 区间与邻域

集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 简记为 (a, b)，称为**开区间**；

集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 简记为$[a, b]$,称为**闭区间**;

集合 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 简记为$[a, b)$, $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 简记为$(a, b]$,称为**半开区间**。

此三类区间称为**有限区间**,其长度为 $b-a$。此外,还有下面几类**无限区间**:

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$, 即全体实数的集合。

其中$-\infty$和$+\infty$,分别读作"负无穷大"和"正无穷大",它们不是数,仅仅是记号。

当变量的变化连续时,其变化范围常用区间来表示。在数轴上来说,**区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体。

集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 可以用区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 或不等式 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 表示,称为点 x_0 的 δ 邻域,简记为 $\boldsymbol{U}(x_0, \delta)$。在数轴上,$\boldsymbol{U}(x_0, \delta)$表示以点 x_0 为对称中心,δ 为半径画出的开区间。在微积分中还常常用到集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$,将点 x_0 排除在外,简记为 $\mathring{\boldsymbol{U}}(x_0, \delta)$,称作去心邻域。

2.2 函 数

2.2.1 函数关系

在微积分学中,要处理的最基本对象就是函数。那么什么是函数呢? 事实上,只要一个变量的取值依赖于另一个变量的值,函数通常就产生了。

【例 2-5】 圆的面积 S 依赖于它的半径 r,对应规则由一个代数式子 $S = \pi r^2$ 给出,对于每一个正数 r,在规则之下有唯一确定的面积 S 的值,我们说 S 是 r 的函数。

【例 2-6】 做自由落体运动的物体经过的路程 s 依赖于时间 t,对于 t 的每一个值,根据对应规则 $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ 可以唯一确定 s 的值,同样称 s 为 t 的函数。

【例 2-7】 世界人口数量 P 依赖于时间 t。表 2.2.1 给出了某些年份时世界人口的粗略统计,从表中可以看到,对于每一个时间 t 的取值,确实存在一个确定的人口数 P 与之对应。例如,

$$P(1988) = 5\,111\,000\,000$$

所以说 P 是 t 的函数。

表 2.2.1 世界人口

年份	1986	1987	1988	1989	1990	1991
人口数（百万）	4 936	5 023	5 111	5 201	5 329	5 422

【例 2-8】 在自动记录气压计中，有一个匀速转动的圆柱形记录鼓。印有坐标方格的记录纸就裹在这鼓上。记录鼓每 24 小时转动一周。气压计指针的端点装有一支墨水笔，笔尖接触着记录纸。这样，经过 24 小时之后，取下的记录纸上就描画了一条曲线。给定一个时间 t 的值，图形中就能给出一个确定的气压 p 的值。这条曲线就表示了气压 p 随时间 t 变化的函数关系。

以上的每一个例子都描述了一种规则。通过它，只要给定一个变量的值，另一个变量就被赋予一个确定的值。在这种情形中，称第二个变量是第一个变量的函数。现在，给出函数关系的定义。

定义 2.2.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集，如果在对应法则 f 之下，对于每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数关系。或称变量 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$。

数集 D 称为函数的定义域，也可以记作 $D(f)$。

x 称为自变量，y 称为因变量。

若 $x_0 \in D(f)$，则称函数 $f(x)$在点 $x = x_0$ 处有定义。

x_0 所对应的 y 值，记作 y_0 或 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x = x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 的函数值。

当 x 取遍整个定义域 D 时，全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$，称为函数的值域，记作 Z 或 $Z(f)$。

在这个定义内存在着两个要素：①函数的定义域 D，它给出了自变量 x 的取值范围；②对给定的 x，用以确定函数值 y 的对应法则 f。至于值域，已经由定义域和对应法则所共同确定了。所以，两个函数相同，只有在定义域和对应法则都相同的情况下才成立。例如，函数 $f(x) = 2\ln x$ 和 $g(x) = \ln x^2$ 是不同的函数，因为前者的定义域为 $\{x \mid x > 0\}$，后者的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$，二者并不相同；$f(x) = x\sqrt{1-x}$ 和 $g(x) = \sqrt{x^2(1-x)}$ 也是不同的函数，因为后者 $\sqrt{x^2(1-x)} = |x|\sqrt{1-x}$ 与 $x\sqrt{1-x}$ 是不同的对应法则；而函数 $f(x) = 2\ln|x|$ 和 $g(x) = \ln x^2$，定义域都是 $\{x \mid x \neq 0\}$，又根据对数性质知 $2\ln|x| = \ln x^2$，即对应法则一致，所以这两个函数相同。

将函数想象成一个机器，有助于理解这一概念。如果 $x \in D$，则 x 能够作为一个输入进入到机器当中，并通过对应法则 f 产生一个输出 $f(x)$，定义域是所有输入

的集合，值域则是所有输出的集合。

【例2-9】 设 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(x-1)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$。

解： $f(0)=0^2-3\times 0+2=2$

$f(1)=1^2-3\times 1+2=0$

$f(x-1)=(x-1)^2-3(x-1)+2=x^2-5x+6$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\frac{1}{x}+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2$

$$\begin{aligned}f[f(x)]&=[f(x)]^2-3f(x)+2=(x^2-3x+2)^2-3(x^2-3x+2)+2\\&=x^4-6x^3+10x^2-3x\end{aligned}$$

这里将“()”中的输入对象直接代入到函数“机器”的输入——x 的位置上去，进行运算。可以看出对应法则是函数本身固有的，不随输入的变化而改变。

【例2-10】 已知 $f(x+1)=\frac{1}{x}+1$，求 $f(x)$，$f(x-1)$。

解： 令 $x+1=u$，则 $x=u-1$，代入原式，得

$$f(u)=\frac{1}{u-1}+1$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+1$$

$$f(x-1)=\frac{1}{(x-1)-1}+1=\frac{1}{x-2}+1$$

在未指定的情况下考虑函数定义域的时候，如果是实际问题，函数定义域由实际意义确定。如在例 2-5 中 $D=(0,+\infty)$；例 2-6 中，$D=[0,t_0]$，t_0 是物体着地的时刻；例 2-7 中，$D=\{1986,1987,1988,1989,1990,1991\}$；例 2-8 中，$D=[0,24]$。

如果函数是以抽象的解析式的形式表示，定义域是使得解析式有意义的自变量取值的全体，称为函数的**自然定义域**，一般来说遵循以下规则：分式的分母不能为零，偶次方根的被开方数非负，对数的真数必须大于零，以及某些三角函数与反三角函数有其特定的变化范围，等等。

【例2-11】 求函数 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}+\arcsin\frac{x-1}{5}$ 的定义域。

解： 给定函数的表达式要有意义，定义域需要满足：

$9-x^2\geqslant 0$，即 $-3\leqslant x\leqslant 3$

$x+2>0$，即 $x>-2$

$\ln(x+2)\neq 0$，即 $x\neq -1$

$$-1 \leqslant \frac{x-1}{5} \leqslant 1, \text{即} -4 \leqslant x \leqslant 6$$

取上述变化范围的交集，即得到所求函数定义域：$D=(-2, -1) \cup (-1, 3]$。

函数概念的定义也可以建立在更普遍的观点之上，就是当自变量 x 每取定一个数值，对应的 y 的数值不只一个，而是几个甚至是无穷多，则称此函数为**多值函数**，以区别于前面定义的**单值函数**。例如 $y^2=1-x^2$ 就是一个多值函数，其图形是以原点为圆心的单位圆。这个多值函数也可以写做 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，分成两个**单值分支** $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，其图形分别是上半圆和下半圆。在微积分教程中，通常都避免讨论多值函数，如果不作特别声明，本书中提到函数均指单值函数。

2.2.2 函数的表示法

有三种方法来表示一个函数：

列表法：用数据的对应列表来表示函数。如例 2-7 中所示的函数，又如大家中学时常用的对数表、三角函数表均是以表格的形式来表示函数。

图形法：直接用图像来表示函数关系。如例 2-8 中自动记录气压计在记录纸上画出的曲线就直接给出了气压 p 随时间 t 变化的函数关系。图形法有着直观、一目了然的优点，常在函数研究中作为重要的辅助工具。

公式法：用数学解析式来表示函数。如例 2-5 和例 2-6 均是用公式法表示的函数。函数的公式表示法在数学研究和分析中担任着极其重要的角色，往后我们将主要研究采用公式法表示的函数。

在公式法中，若因变量 y 直接用 x 的解析式表示出来，即 $y=f(x)$，这样的函数称为显函数。如 $y=x^2$，$y=\sin x+1$ 都是**显函数**。若两个变量之间的函数关系是用方程 $F(x, y)=0$ 来表示，则称为**隐函数**。例如 $3x+2y=1$，$xy-e^{x+y}=0$ 都是隐函数。

有的隐函数，可以从方程 $F(x, y)=0$ 中解出 y 来，表示为显函数，此一过程称为隐函数的显化。如由 $3x+2y=1$ 中解出 y，得显函数 $y=\dfrac{1-3x}{2}$。但多数情况下是不能从方程中解出 y 的，也就是隐函数无法显化，例如 $xy-e^{x+y}=0$ 就是如此。

如果两个变量之间的函数关系要用两个或两个以上的数学解析式来表示，则称此为**分段函数**。例如 $y=\begin{cases} x^2, & -2 \leqslant x<0 \\ 2, & x=0 \\ 1+x, & 0<x \leqslant 3 \end{cases}$，就是分段函数，在定义域的不同范围内使用不同的数学式子来表达函数关系。

2.2.3 函数的几种简单性质

1) 有界性

定义 2.2.2 设函数 $f(x)$ 定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对 $\forall x \in I$，总有 $\exists M>0$，