普通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书

陈荣江　王建平　主编

概率论与数理统计

科学出版社

通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书

概率论与数理统计

主　编　陈荣江　王建平
副主编　陈志成　葛　立　孙成金

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书的编写注重讲清基本概念、基本理论与统计思想，强调基本方法的应用，略去较烦琐的理论推导，力求简洁、清晰地阐述一些概念产生的背景和重要结论使用的技巧和方法，有助于学生接受和掌握所学的内容，达到会用的目的. 书中例题与习题较丰富，为便于实时检测学习的效果，每章后还配备了自我测试题，取材时注重启发性和应用性，着重培养学生的基本运算能力、分析与解决问题的能力.

全书共 10 章. 第 1～5 章为概率论部分，是学习数理统计的必备基础. 第 6～9 章为数理统计部分，主要讲授样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析. 第 10 章简要介绍 MATLAB 统计工具箱中部分函数的功能和使用方法，读者可按需选用.

本书可作为高等学校理工类、经管类、农林类本科各专业概率论与数理统计教材，也可供大专、函授或自考该课程的读者使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 陈荣江，王建平主编. —北京 ：科学出版社，2012
(普通高等教育“十二五”规划教材・理工类大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-033759-7

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①陈… ②王… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 038817 号

责任编辑：张中兴 王 静 房 阳 / 责任校对：包志虹
责任印制：张克忠 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012 年 3 月第一次印刷 印张：20 3/4
字数：400 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛书序

随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，尤其是2004年高中施行“新课改”以来，高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况，不同层次高校的学生和学科对数学的需求也是多样化的. 如何保证和提高地方普通高校大学数学类课程的教学质量，以及如何进行地方普通高等院校创新型人才的培养，成为当前我国地方普通高等院校最重要的研究课题之一. 尤其是作为地方普通高等院校教学第一线的教师来说，十分需要适用于这一层次生源特点和基础水平的大学数学类教材. 河南省教学名师奖获得者、河南省精品课程的主持人郭运瑞教授，2005年以来将“大学数学分层次教学的研究与改革实践”和“高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践”作为其主持的重要研究课题，这两项课题被列入河南省普通高等教育教学改革项目，并获得了“河南省普通高等教育省级教学改革成果奖”. 在这些实践的基础上编写的本套丛书是她带领的教学团队与兄弟院校的教学团队多年奋斗在教学和教学改革第一线的研究与实践的成果.

本套丛书的特色在于，它适应大众教育时代地方普通高等院校的学生和学科的特点及要求，能更好地适应学生专业学习与发展的要求，适应学生自身条件和发展目标的个性化需求. 本套丛书为地方普通高等院校大学数学类课程分层次教学提供了很好的教材. 丛书内容加强了数学概念与实际问题的联系，将数学建模的思想和方法渗透到教材中去，重视培养学生应用数学知识以及数学软件解决实际问题的意识与能力. 同时还注意到对学习内容主线的适当延伸，这有助于开拓学生的思路和眼界，加强数学与其他学科之间的实践联系，体现了数学的应用性. 本套丛书将在大学数学类课程中渗透数学文化的理念贯穿始终，注重学生数学素质的培养. 内容编写简繁得当，叙述简洁明了，前后衔接自然，对学生把握知识之间的联系十分有益.

本套丛书的作者们借鉴了国内外同类教材之长，吸收了众多最新的教学和科研成果，将自己多年的科研成果和教学经验融入了教材中，使教材内容更加充实、更加有新意. 相信本套丛书将会在我国大学数学类课程教学改革和发展的过程中发挥积极有益的作用，满足广大读者的学习需要.

感谢丛书的作者们为我国大学数学教学改革和发展所作的努力.

顾　沛

2012年3月

于南开大学

前　　言

概率论与数理统计是现代数学的重要分支，是全国高等院校理工、经管类专业的主要基础课程，它在自然科学、经济管理和工程技术各领域都有着广泛的应用，随着计算机的普及和优秀统计软件的推广应用，概率统计在金融保险、生物医学等众多领域内所起的作用日趋明显．随着我国经济建设的迅速发展，网络技术的不断更新和通信设施的日益普及，人们可以通过各种媒体获得越来越多的统计信息，它们传递着政府部门的重要政策导向，也与我们的日常生活密切相关，没有良好的数理统计知识素质就难以很好地把握和充分利用有价值的统计信息．因此，为培养人才具有较全面的素质，这门课程是不可或缺的．

面对科学技术的迅猛发展以及社会对人才综合素质要求的提高，人们多年来一直探索数学课程新的教学内容体系和教学方法，根据本课程的特点并结合各专业的需要对概率论与数理统计课程教学进行了教学改革与实践，本书以教育部颁布的高等学校工科数学教学基本要求为依据，结合多年教学实践，编写了这本教材．本教材着眼于强调基本概念、基本思想、基本方法．通过典型例子的讲解体现处理问题的思想．在编写过程中力求做到：

(1) 由浅入深，深入浅出，化难为易，叙述简明扼要，注重可读性．

(2) 注重随机数学概念的直观背景介绍，以便于学生对随机现象的直观理解，同时对基本概念、重要公式和定理，注意其实际意义的阐述，如在讲述概率论中的独立性、条件概率、全概率公式、期望、方差等重要概念时，我们不仅花了一定的篇幅论述其直观背景与含义，还举了较多有趣的例子．

(3) 提高学生的逻辑思维能力，注重教材结构及内容的系统性与严谨性，以期培养学生的数学素质．

(4) 重视应用能力的培养．介绍了如何使用 MATLAB 中的相关命令进行概率和统计计算以及绘制统计图形的方法，通过随机数的生成使学生加深对随机变量的认识．希望通过学习既有益于学生对概率统计基本理论的理解，又能初步使用现代计算技术进行统计分析，提高学生的统计建模应用能力．

全书共 10 章．第 1～5 章为概率论部分，主要包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，是数理统计的必备基础．第 6～9 章为数理统计部分，内容包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析．第 10 章简要介绍 MATLAB 统计工具箱中部分函数的功能和用法，供

读者因需选用.

本书由陈荣江、王建平主编.参加本书编写的有:陈荣江、王建平、陈志成、葛立、孙成金、贾积身、包东娥、吴亮、张红云.最后由陈荣江、陈志成负责统稿.

在本教材编写过程中,陈付贵教授、郭运瑞教授审阅了全稿并提出了许多宝贵意见.同时,本教材的编写得到科学出版社、河南科技学院教务处、河南农业大学教务处及数学科学学院领导和同事的关心和大力支持,对此我们表示衷心的感谢.

由于编者能力和水平有限,书中难免有不妥之处,敬请专家和广大读者不吝赐教.

编　者

2011 年 12 月

目　　录

第1章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支. 恩格斯说过:“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律.”概率论的任务就在于揭露与研究随机现象的规律性. 本章首先阐明了在大量重复试验中随机事件的频率的稳定性,从而引出随机事件的概率的概念. 然后叙述概率的古典定义、概率的性质、条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式以及事件的独立性,最后讲述独立试验序列中的二项概率.

1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象,一般来说可分为两类:一类是**必然现象**,或称**确定性现象**;另一类是**随机现象**,或称**不确定性现象**. 必然现象是指在相同条件下重复试验,所得结果总是确定的现象——只要试验条件不变,试验结果在试验之前是可以预言的. 例如,在标准大气压下,水被加热到100℃必然沸腾;两个同性的电荷一定互斥;做匀速直线运动的物体,如无外力作用,必然继续做匀速直线运动等,这些现象都是必然现象. 随机现象是指在相同条件下重复试验,所得结果不一定相同的现象,即试验结果是不确定的现象. 对这种现象来说,在每次试验之前哪一个结果发生,是无法预言的. 例如,出生前对新生婴儿性别的判定;抛掷一枚质地均匀的硬币,硬币落地后的结果是否为带国徽的一面朝上;从一批产品中,随机抽检一件产品,结果可能

是正品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果可能不相同等，这些现象都属于随机现象.

虽然随机现象在一定条件下，可能出现这样或那样的结果，而且在每一次试验或观察之前不能预知这一次试验的确切结果，但人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性.例如：掷一枚质地均匀的硬币，当投掷次数很多时，就会发现出现正面和反面的次数几乎各占一半；又如，对一个目标进行射击，当射击次数较少时，弹孔的分布没有明显的规律性，但当射击次数非常多时，就会发现弹孔的分布呈现一定的规律性：即弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀；再如，调查多户家庭，其消费水平呈现“两头少，中间多”的状况，即处于中间状态的家庭占多数.

这种在每次试验中呈现不确定性，而在大量重复试验中又呈现某种统计规律性的现象叫**随机现象**.概率统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一个数学分支，它被广泛地应用于自然科学及社会科学的诸多领域中.

1.1.2 随机试验与随机事件、样本空间

对随机现象进行研究时，人们通常要进行大量的观察、试验.如果试验具有以下三个特点，则称之为**随机试验**.

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验结果不止一个，且可以预知一切可能的结果的取值范围；

(3) 试验前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验是一种含义较广的术语，它包括对随机现象进行观察、测量、记录或做科学试验等.随机试验也简称为**试验**，记为 E.以后所提到的试验都是指随机试验.

在随机试验中可能发生也可能不发生的结果，称为**随机事件**，简称**事件**.

在一个试验中，不论可能的结果有多少个，总可以从中找出这样一组基本结果，满足：

(1) 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果；

(2) 任何事件，都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果称为**样本点**，记为 e，只含有一个样本点的事件称为**基本事件**，或记为 $\{e\}$.

随机试验 E 的全体样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 S.

随机事件可表述为样本空间中样本点的某个集合，常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.显然，一切事件均可分解为若干基本事件的和，而基本事件不可再分.所谓**事件 A 发生**，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的**某个**样本点出现.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**.样本空间 S 包含所有的样本点，

每次试验它必然发生，因此，它是一个必然事件. 必然事件用 S 表示，它是样本空间 S 的一个子集. 在每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$. 它是样本空间 S 的一个空子集.

必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究方便，把它们作为随机事件的两个极端情形来处理.

下面是一些试验的例子.

E_1:掷一颗骰子，观察所掷的点数是几.

E_2:质检部门抽查市场某种商品的质量，检查商品是否合格.

E_3:观察某网站一分钟内受到点击的次数.

E_4:对某只灯泡做实验，观察其使用寿命.

这里所举的 4 个试验中，若以 S_i 表示试验 E_i 的样本空间($i=1,2,3,4$)，则

$S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$S_2=\{$合格品，不合格品$\}$.

$S_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

$S_4=\{t,t\geqslant 0\}$.

需要说明的是：在 E_3 中，虽然网站一分钟内受到点击的次数是有限的，不会非常大，但一般说来，人们从理论上很难定出网站一分钟内受到点击次数的有限上限. 为了方便，我们把上限视为∞. 这样的处理方法在理论研究中经常被采用.

例 1.1.1 掷一颗骰子，用 $A_1=\{1\},A_2=\{2\},\cdots,A_6=\{6\}$分别表示所掷的结果为"一点"至"六点"，$B$ 表示"偶数点"，C 表示"奇数点"，D 表示"四点或四点以上". 若试验的目的是观察所掷的点数是几，试写出样本空间；指出 $A_1,A_2,\cdots,A_6,B,C,D$ 事件中哪些是基本事件；表示事件 B,C,D.

解 投掷后可能有 6 种不同的结果 $A_1,A_2,\cdots,A_6$，样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$；$A_1,A_2,\cdots,A_6$都是基本事件；$B=\{2,4,6\},C=\{1,3,5\},D=\{4,5,6\}$.

例 1.1.2 将一枚均匀对称的硬币掷两次，观察正反面出现的情况，写出此试验的样本空间；若设 $A=$"两次掷出朝上的面相同"，$B=$"两次掷出朝上的面至少有一个正面"，表示事件 A,B.

解 样本空间 $S=\{$(反,反),(正,反),(反,正),(正,正)$\}$. $A=\{$(反,反),(正,正)$\}$，$B=\{$(正,反),(反,正),(正,正)$\}$.

根据事件发生的意义，在例 1.1.1 中，当投掷结果为"四点"时，事件 A_4,B,D 均发生.

1.1.3 事件之间的关系与运算

随机事件是一个集合，因此事件之间的关系与运算可以按集合论中的处理，但应根据"事件发生与否"给出它们在概率论中的提法.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生则导致事件 B 发生，即 A 中每个样本点都属于 B，则称 A **含于** B 或 B **包含** A，记为 $A\subset B$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

易知 $A\subset B$ 等价于若 B 不发生则 A 必不发生. 对于任何事件，有 $\varnothing\subset A\subset S$.

2. 事件的和(并)

设 A,B 为两事件，则称事件"A 发生或 B 发生"为 A 与 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$. 它是由 A,B 中一切样本点共同组成的集合.

一般地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，可数个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示所列诸事件中至少有一个发生.

3. 事件的积(交)

设 A,B 为两事件，则称事件"A 与 B 都发生"为 A 与 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合.

一般地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，可数个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示所列诸事件全发生.

4. 事件的差

设 A,B 为两事件，则称事件"A 发生但 B 不发生"为 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$. 这是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合.

例如，在例 1.1.2 中，$A-B=\{(反,反)\}$.

5. 互斥(不相容)事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 为**互斥事件**，或**互不相容事件**，这时 A 与 B 没有公共的样本点. 显然，不同的基本事件是互不相容的.

6. 互逆(对立)事件

设 A,B 为两事件，若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称 A 与 B 为**互逆事件**，或**对立事件**，这时 B 叫做 A 的**逆事件**，记为 $\overline{A}$，即 A 不发生. 显然，这时有 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$，$\overline{A}=S-A$. 易知，若 A,B 是任意两事件，则

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=S,\quad A-B=A\overline{B},\quad \overline{\overline{A}}=A$$

由定义知，对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必为对立事件. 以上事件之间的关系与运算可以用**文氏图**来直观地表示. 若用平面上的一个矩形表示样本空间 S，矩形内的点表示基本事件，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则 A 与 B 的各种关系及运算如图 1.1.1～图 1.1.6 所示.

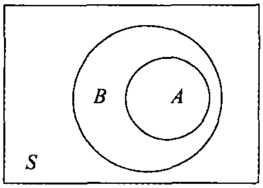

图 1.1.1

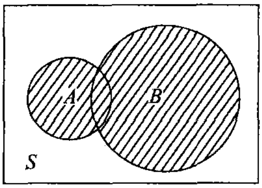

图 1.1.2

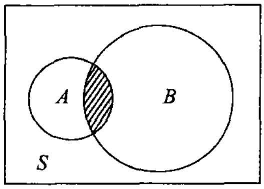

图 1.1.3

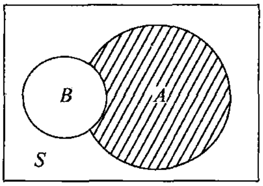

图 1.1.4

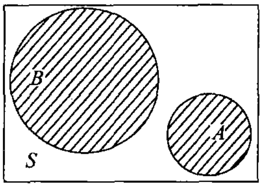

图 1.1.5

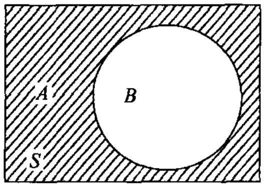

图 1.1.6

7. 事件的运算律

设 $A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$ 为事件，则有

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$$

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(3) 分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(4) 德·摩根律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

对于任意多个事件，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

例 1.1.3　设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) A,B,C 恰有一个发生；

(5) A,B,C 中至少有一个发生；

(6) A,B,C 中不多于两个发生；

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生；

(8) A,B,C 恰有两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$.

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(3) ABC.

(4) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

(5) $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$.

(7) $(A\cup B)\overline{C}$ 或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}$.

(8) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

1.2　频率与概率

1.2.1　频率及其性质

一个随机试验有多个可能的结果，但人们在实践中常常发现，各种可能的结果出现的机会不尽相同. 就是说，在多次重复试验中，有些结果出现的次数明显要多些，有些则要少些，它们具有统计规律性. 例如，我国人口中具有 O 型血的人数明显地高于其他血型. 为了揭示这种规律性，合理地刻画事件在一次试验中发生的可能性大小，我们先引进频率的概念，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数字度量——概率.

定义 1.2.1　在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**，称 n_A 与 n 的比值 n_A/n 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

由定义，易知频率具有以下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为 k 个两两互斥的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

性质(3)称为频率的**有限可加性**，它在定义概率时起到重要作用. 我们在这里仅就这一条性质给出一个简单证明.

设两个事件 A,B 不相容，又设在 n 次试验中，$A,B,A\cup B$ 发生的频数分别为 $n_A,n_B,n_{A\cup B}$. 由于 A 与 B 不能同时发生，故有 $n_{A\cup B}=n_A+n_B$，从而

$$f_n(A\cup B)=\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A+n_B}{n}=f_n(A)+f_n(B)$$

对于 k 个两两互斥事件，有 $n_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i}=\sum\limits_{i=1}^{k}n_{A_i}$，从而有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$$

事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生得越频繁，即 A 在一次试验中发生的可能性越大，但是，频率具有随机波动性，即使同样进行了 n 次试验，n_A 却会不同. 但这种波动不是杂乱无章的，在第 5 章的大数定律中，我们将看到若增加试验次数 n，则随机波动性将会减小. 随着 n 逐渐增大，$f_n(A)$ 也就逐渐稳定于某个常数 $P(A)$. 这样，常数 $P(A)$ 客观上反映了事件 A 发生的可能性大小.

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(K. Pearson)曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果见表 1.2.1.

表 1.2.1　抛硬币试验表

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面频率
D. Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	5981	0.4984
K. Pearson	24000	12012	0.5005

表 1.2.1 显示：出现正面的频率 $f_n(A)$ 具有波动性，且当 n 较小时，它随机波动的幅度较大；当 n 较大时，它随机波动的幅度较小. 总在 0.5 附近波动. 最后，随着试验次数 n 的逐渐增加，$f_n(A)$ 逐渐稳定于常数 0.5. 这个 0.5 就能反映正面出现的可能性的大小.

又如，对某类农作物种子进行发芽率试验. 从一大批此种子中抽取 8 批种子做发芽试验，其结果见表 1.2.2.

表 1.2.2　种子发芽率试验数据

种子粒数	10	70	310	700	1500	2000	3000	5000
发芽粒数	9	60	282	630	1339	1806	2715	4508
发芽率	0.9	0.857	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905	0.9016

这里，我们可将观察一粒种子是否发芽作为一次试验. 若种子发芽，则记事件 A 发生. 从表 1.2.2 中不难发现：事件 A 在 n 次试验中发生的频率 $f_n(A)$ 也具有随机波动性，且当 n 较小时，它随机波动的幅度较大；当 n 较大时，随机波动的幅度较小. 最后，随着 n 的逐渐增大，$f_n(A)$ 逐渐稳定于固定值 0.9.

大量实验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数. 每个事件都有一个这样的常数与之对应. 这就是说，频率 $f_n(A)$ 具有**稳定性**. 实践中，当试验重复大量次数时，常以频率 $f_n(A)$ 来表征事件 A 发生可能性的大小. 理论上可将事件 A 的频率 $f_n(A)$ 当 n 无限增加时所逐渐趋向稳定的那个常数 $P(A)$ 定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计定义.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2.2 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A. 若当试验次数 n 很大时，频率 n_A/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，且随着试验次数 n 的增加，其摆动的幅度越来越小，则称数 p 为随机事件 A 的**概率**，记为 $P(A)=p$.

由定义，显然有

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1;\quad f_n(S)=1;\quad P(\varnothing)=0$$

概率的统计定义本身存在着很大的缺陷，即定义中的“稳定地在某一数值 p 的附近摆动”含义模糊，如何理解“摆动的幅度”？难免带有人为的主观性. 为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表征事件发生可能性大小的概率的公理化定义.

1.2.3 概率的公理化定义

定义 1.2.3 设随机试验 E 的样本空间为 S. 若按照某种方法，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，且满足以下公理：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.2.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的定义，可推出概率的一些重要性质.

性质 1.2.1 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$. 由概率的可列可加性式(1.2.1)，得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式得 $P(\varnothing)=0$.