普通高等学校“十二五”本科数学规划教材

线性代数

Linear Algebra

東北大學出版社
Northeastern University Press

普通高等学校“十二五”本科数学规划教材

线 性 代 数

Linear Algebra

吴丽华 陈 升 刘明鼎 主编

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 /吴丽华，陈升，刘明鼎主编 .— 沈阳：东北大学出版社，2010.8
普通高等学校“十二五”本科数学规划教材
ISBN 978-7-81102-837-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吴… ②陈… ③刘… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 158261 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市池陆广告印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印 张：12.25
字 数：328 千字
出版时间：2010 年 8 月第 1 版
印刷时间：2010 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义 刘宗玉 责任校对：朗 坤
封面设计：唐敏智 责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-837-9 定 价：23.00 元

前　言

2011年我国就将进入“十二五”时期，高等教育的迅猛发展和科学技术的日新月异，加之计算机的广泛应用及数学软件的普及，对基础课特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求．数学是本科院校几乎所有专业的公共必修课，更是理工、农、医、经、管各专业学生必须掌握的基础知识，其重要程度是不言而喻的．正是考虑了这些因素，我们在总结数学教学经验、探索数学教学发展动向、分析国内外同类教材优劣的基础上，并加入计算机和数学软件的数学实验的内容，编写出这套适于本科院校各专业学生使用的《普通高等学校“十二五”本科数学规划教材》，本书是其中的《线性代数》．

本书依据教育部制订的“线性代数学课程教学基本要求”编写而成，是十几所学校有丰富教学经验的教师集思广益和通力合作的成果．本书力求“深化概念，加强计算，联系实际，注重应用”，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了线性代数课程教学时数减少的趋势．本书具有以下特色：

1．突出数学的基本思想和基本方法．线性代数内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的背景，注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何背景、物理意义和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解，力求使抽象的数学概念形象化．突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握数学的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质和数学的价值．

2．加强基本能力培养．本书安排了较多的例题、习题，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

3．强调实际应用．本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出．例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习线性代数的兴趣和利用线性代数知识解决实际问题的意识和能力．

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用星号“*”标出，供相关专业选择．本书共有7章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形、线性空间与线性变换．各章后面配有习题，第一章至第六章后面还配有测试题，书后附有全部习题和测试题的参考答案．

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教．

作　者

2010年6月

《线性代数》编写人员

主　　　　编： 吴丽华　陈　升　刘明鼎

副　主　编： 冯光庭　崔红新　王永学　陈　勤

其他编写人员： (以姓氏笔画为序)

王　骄　王伟珠　王学理　张艳敏
谭福锦

目　　录

第一章　行列式

解方程是代数中一个基本的问题. 特别是在中学所学代数中, 解方程占有重要的地位. 在中学时, 常采用消元法解二元一次方程组、三元一次方程组, 那么对于多元一次方程组, 又该如何求解呢? 本章首先引入行列式的概念及性质, 然后利用这个工具解多元一次方程组, 即线性方程组. 而余下若干章则在更一般的情况下讨论解线性方程组的问题.

本章的主要内容是: n 阶行列式的定义及性质, n 阶行列式的计算方法及求解线性方程组的 Cramer 法则.

第一节　n 阶行列式

一、二阶与三阶行列式

在高中数学中, 由解线性方程组问题可以引出二阶与三阶行列式的定义.

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

称式(1.1)为二阶行列式, 其中, 元素 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数.

二阶行列式的运算原则: 位于行列式的主对角线(从左上角到右下角的实连线)上的两个元素 a_{11}, a_{22}的乘积, 减去位于副对角线(从右上角到左下角的虚连线)上的两个元素 a_{12}, a_{21}的乘积, 即

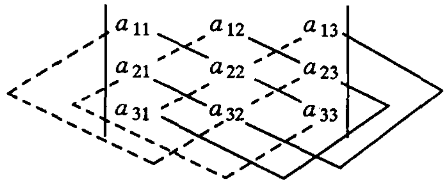
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

对于由 9 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$排成的三行三列的式子, 定义

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

称其为三阶行列式, 其中, 元素 $a_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数.

三阶行列式的运算原则表示如下:



(1.4)

例 1.1 计算二阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}.$$

解 $D=3\times1-2\times(-2)=7.$

例 1.2 计算三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ -1 & 8 & 3\end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned}D&=2\times(-4)\times3+1\times1\times8+0\times(-1)\times(-1)-\\&\quad 1\times(-4)\times(-1)-0\times1\times3-2\times(-1)\times8\\&=-24+8-4+16=-4.\end{aligned}$$

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元线性方程组的解表达为简洁的形式.

设方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2,\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix},$$

其中，D 是系数行列式，$D_i(i=1,2)$是把 D 中第 i 列元素换成方程组(1.5)中的常数项. 则当 $D\neq0$ 时，方程组(1.5)有唯一解：

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D}.\tag{1.6}$$

同样，设方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3,\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

其中，D 是系数行列式，$D_i(i=1,2,3)$是把 D 中第 i 列元素换成方程组(1.7)中的常数项．则当 $D\neq0$ 时，方程组(1.7)有唯一解：

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D},\quad z=\frac{D_3}{D}. \tag{1.8}$$

例 1.3 求解二元线性方程组：

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+\ \ x_2=1. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-3.$$

例 1.4 解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+\ \ x_3=\ \ 1, \\ \ \ x_1-5x_2+3x_3=\ \ 2, \\ \ \ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=-1. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-10-1-12+5+4+6=-8\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6,$$

所以方程组的解为

$$x_1=-\frac{11}{8},\quad x_2=-\frac{9}{8},\quad x_3=-\frac{3}{4}.$$

从以上讨论，自然产生一个问题：对于四元及四元以上的线性方程组而言，是否有类似的行列式定义及求解规则呢？答案是肯定的．

二、n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，首先介绍排列的定义及性质．

由数字 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列．n 级排列的总数是 $n!$．例如，2413 是一个 4 级排列，45321 是一个 5 级排列．那么由 1，2，3，4 可以组成 $4!$ 个排列．

显然，$12\cdots n$ 是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按照递增的顺序排起来的，其他的排列都或多或少地破坏自然顺序．那么，在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数．例如，2431 中，21，43，41，31 是逆序，2431 的逆序数就是 4．而 45321 的逆序数是 9．逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列．例如，2431 是偶排列，45321 是奇排列，$12\cdots n$ 的逆序数是零，因此是偶排列．

例 1.5 求排列 641523 的逆序数．

解 6 级排列的标准列为 123456，下面逐一分析各数的逆序数．

首位 6 的逆序数为 0，4 的逆序数为 1，1 的逆序数为 2，5 的逆序数为 1，2 的逆序数为 3，3 的逆序数为 3．所以，排列 641523 的逆序数为 10．

例 1.6 求排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数．

解 n 级排列的标准列为 $12\cdots n$．

首位 n 的逆序数为 0，$n-1$ 的逆序数为 1，$n-2$ 的逆序数为 2，……，2 的逆序数为 $n-2$，1 的逆序数为 $n-1$．所以，排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数为

$$0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

关于排列的奇偶性，有下列的基本事实．

定理 1.1 一个排列中任意两个元素对换，排列的奇偶性改变．

了解了排列的概念及性质后，下面依据二阶行列式、三阶行列式的定义，给出 n 阶行列式的定义．

二阶行列式和三阶行列式的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

从二阶和三阶行列式的定义中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成的．在 $n=2$ 时，由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 这两项；在 $n=3$ 时，有 6 项．而且每一项乘积都带有符号，这符号是按什么原则决定的呢？在三阶行列式的展开式中，项的一般形式可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中，$j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个排列．可以

看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，对应的项带有正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，带有负号.

依据二阶和三阶行列式的分析，给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1　将 n^2 个元素所构成的含有 n 行 n 列的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示一个数值，记做 D. 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中，$\sum$ 是对所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的形式求和，t 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，n 为行列式的阶数，n 阶行列式共有 $n!$ 项.

有时将 n 阶行列式记为 $\det(a_{ij})$. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

例 1.7　计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　在 $\sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中，要使 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$，应取 $a_{3j_3} = a_{32}$，从而 $a_{1j_1} = a_{14}$，$a_{4j_4} = a_{43}$，$a_{2j_2} = a_{21}$，所以只有 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} = a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$ 是非零的，4123 的逆序数为 3，故

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} = (-1)^3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = -1.$$

由定理 1.1，可以得到行列式的另一个定义.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $1\cdots p\cdots q\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 对换元素 a_{pj_p} 与 a_{qj_q} 成

$$(-1)^t a_{1j_1} \cdots a_{qj_q} \cdots a_{pj_p} \cdots a_{nj_n},$$

这一项的值不变，而行标和列标排列却发生了变化. 原行标排列为 $1\cdots p\cdots q\cdots n$，逆序数为 0，原列标排列为 $j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n$，逆序数为 t；新行标排列为 $1\cdots q\cdots p\cdots n$，逆序数为 r(由定理 1.1，r 为奇数)，新列标排列为 $j_1\cdots j_q\cdots j_p\cdots j_n$，逆序数为 t_1. 由定理 1.1 有

$$(-1)^t = -(-1)^{t_1} = (-1)^r (-1)^{t_1} = (-1)^{r+t_1} = (-1)^{t+0}.$$

于是，对换两个元素后，行列标逆序数之和的奇偶性并不改变. 经过多次对换也是如此. 因此，经过有限次对换后，使

$$(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

此时列标为标准排列，s 为行排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数. 因此，行列式的定义也可以写为

$$D=\sum(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.$$

三、行列式按行(列)展开

对于 n 阶行列式，不能像计算二阶、三阶行列式那样定义. 因此，对一般的 n 阶行列式给出另外一种定义，即递归法定义.

首先观察三阶行列式的定义：

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

可知，三阶行列式可以通过降阶成二阶行列式进行定义，二阶行列式与它前面元素的关系是去掉前面元素所在行和列后形成二阶行列式(不改变余下元素的位置关系)，而正负号是由括号前元素的行标、列标之和的奇偶性确定的，行(标)+列(标)=偶数，为正；否则为负. 事实上，不只三阶行列式的任一行(列)元素有此展开式，对高阶行列式也有此展开式.

定义 1.2 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$组成的 n 阶行列式

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.\end{aligned}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j},$$

M_{1j}是D 中去掉第 1 行第 j 列全部元素后，按原顺序排列的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix}a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&\cdots&a_{3,j-1}&a_{3,j+1}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

并称 M_{1j}为元素 a_{1j}的余子式，A_{1j}为元素 a_{1j}的代数余子式.

例 1.8 求

$$D=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$$

中元素 4 对应的余子式与代数余子式.

解 元素 4 对应 a_{12}，则余子式是 $M_{12}=\begin{vmatrix}2&8\\3&9\end{vmatrix}=-6$，而它的代数余子式是

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(-6)=6.$$

定理 1.2 n 阶行列式的值等于其中任一行(列)元素与其代数余子式的乘积的和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+A_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

例 1.9 设

$$D_4(x)=\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\-1&1&1&-1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\end{vmatrix},$$

求其展开式中 x^2 项的系数.

解 将 $D_4(x)$按第一行展开，得

$$D_4(x)=1\cdot A_{11}+x\cdot A_{12}+x^2\cdot A_{13}+x^3\cdot A_{14},$$

则可见 x^2 项的系数为 x^2 的代数余子式，即为

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-4.$$

第二节 n 阶行列式的性质

直接利用行列式的定义计算行列式，一般是烦琐的. 因此，要从定义推导出行列式的一些性质，以简化行列式的计算.

性质 1.1 行列式的行与列(按原顺序)互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

D^{T} 称为 D 的转置行列式.

证

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

按定义有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum(-1)^t a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

由行列式另一定义有 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.2 互换行列式的任意两行(两列)，行列式变号.

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

由定义

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设 t_1 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，所以 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$. 故

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} = -D. \end{aligned}$$

性质 1.3 (线性性质)有以下两条：

(i) 把行列式中某一行(列)的所有元素都乘以一个数 k，等于用数 k 乘以行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(ii) 如果行列式的某行(列)的各元素是两个元素之和，那么这个行列式等于两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　(i) 按定义，有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n},$$

则乘以 k 便是

$$\begin{aligned} kD &= k\left(\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\right) \\ &= \sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) 按定义，有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

性质 1.4 若行列式中的某行(列)元素全是 0，则行列式的值为 0.

性质 1.5 如果行列式中有两行相同，那么行列式为零.

性质 1.6 如果行列式中两行成比例，那么行列式为零.

性质 1.7 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 根据性质 1.3(ii)及性质 1.6，得

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

故结论成立.